# Medan Elektromagnetik

## ANALISIS VEKTOR

# Skalar dan Vektor

- **Skalar** : besaran/ kuantitas yang nilainya dapat direpresentasikan oleh sebuah bilangan nyata tunggal (baik positif maupun negatif).
- Jarak jatuh ***L*** sebuah benda dari ketinggiannya semula dalam waktu ***t***.
- Suhu ***T*** pada tiap-tiap titik berkoordinat ***x***, ***y***, dan ***z*** dalam suatu wadah.
- ***L***, ***t***, ***T***, ***x***, ***y***, *dan* ***z*** adalah **skalar**
- Contoh besaran skalar: **massa**, **kerapatan zat**, **tekanan**, **volume**, dll.

Institut Teknologi Kalimantan

ELEKTRO ITK

# Skalar dan Vektor

- Besaran **Vektor** memiliki sebuah **magnitudo** dan sebuah **arah** di dalam **ruang berdimensi n**.
- Fokus bahasan → ruang **berdimensi dua** atau **tiga**.
- Contoh besaran vektor: Gaya, Kecepatan, Percepatan, sebuah garis lurus yang ditarik dari kutub positif ke kutub negatif dari sebuah baterai.

# Skalar dan Vektor

- Medan (baik skalar maupun vektor) dapat didefinisikan secara matematis sebagai suatu fungsi yang menghubungkan sebuah titik awal dengan sembarang titik lainnya di dalam ruang.
- Nilai medan berubah-ubah menurut waktu dan posisi di dalam ruang.
- Notasi vektor → **A** (**bold**) atau $\vec{A}$ (anak panah)
- Notasi skalar → *A (italic)*

Institut Teknologi Kalimantan

ELEKTRO ITK

# Aljabar Vektor

- Penjumlahan vektor mengikuti "aturan jajaran genjang".


- Hukum komutatif → A + B = B + A
- Hukum asosiatif → A + (B + C) = (A + B) + C
- A – B = A + ( - B) → tanda negatif = vektor dibalik arahnya

Institut Teknologi Kalimantan
ELEKTRO ITK

# Aljabar Vektor

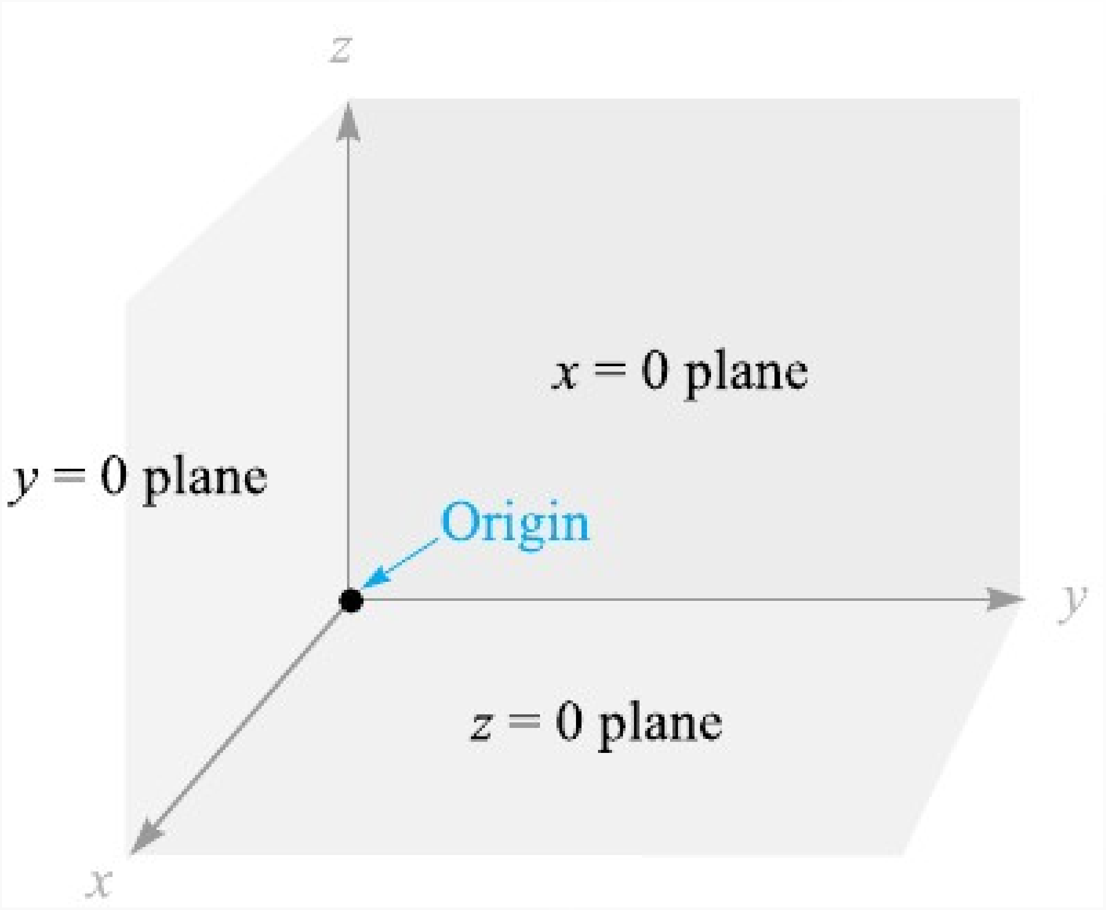
- Vektor dapat dikalikan dengan skalar.
- Magnitudo vektor akan berubah, namun arahnya tidak berubah jika skalar bernilai positif.
- Hukum asosiatif dan hukum distributif

$$
\begin{aligned}
(r+s)(\vec{A}+\vec{B}) &= r(\vec{A}+\vec{B}) + s(\vec{A}+\vec{B}) \\
&= r\vec{A} + r\vec{B} + s\vec{A} + s\vec{B}
\end{aligned}
$$

# Sistem Koordinat Persegi

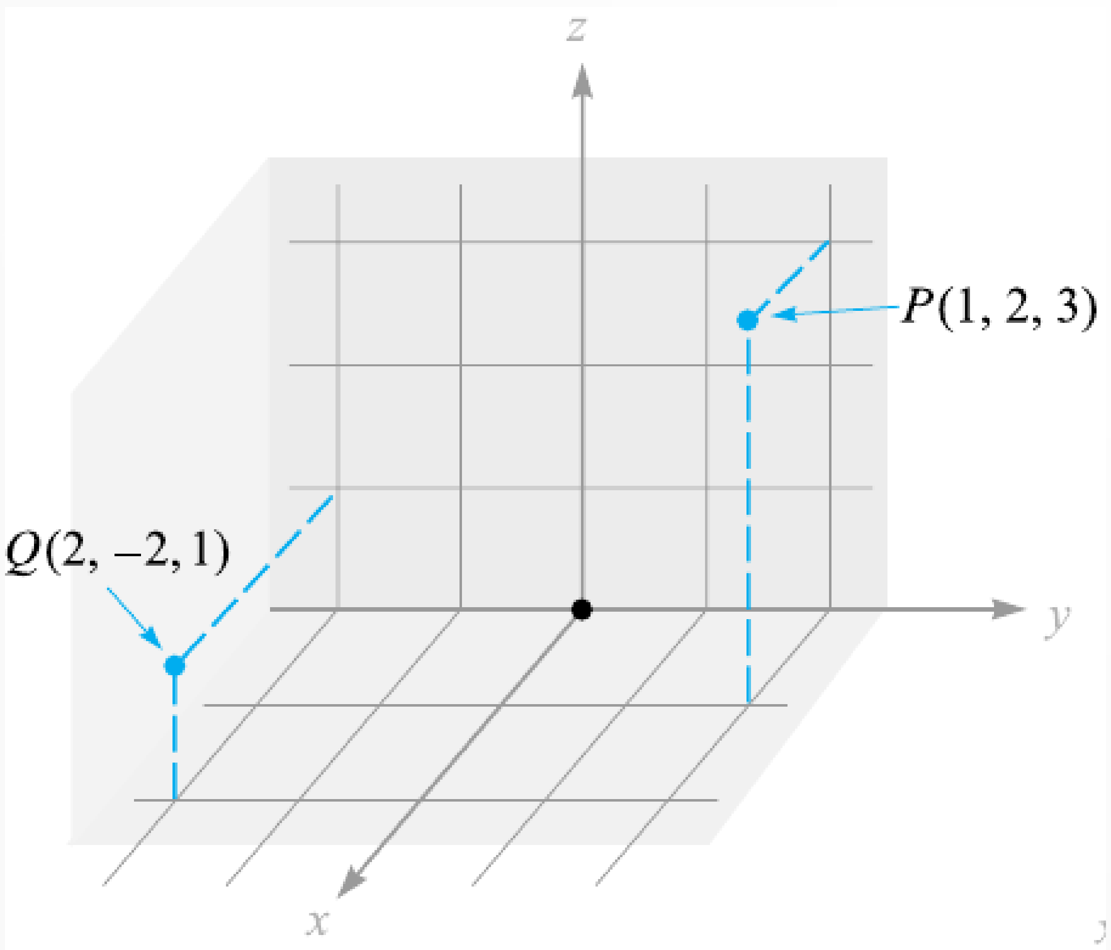
- Metode penjabaran vektor → panjang, arah, sudut, dan proyeksi-proyeksi (komponen-komponen) yang spesifik.
- Metode yang paling mudah → sistem koordinat kartesian persegi

# Sistem Koordinat Persegi



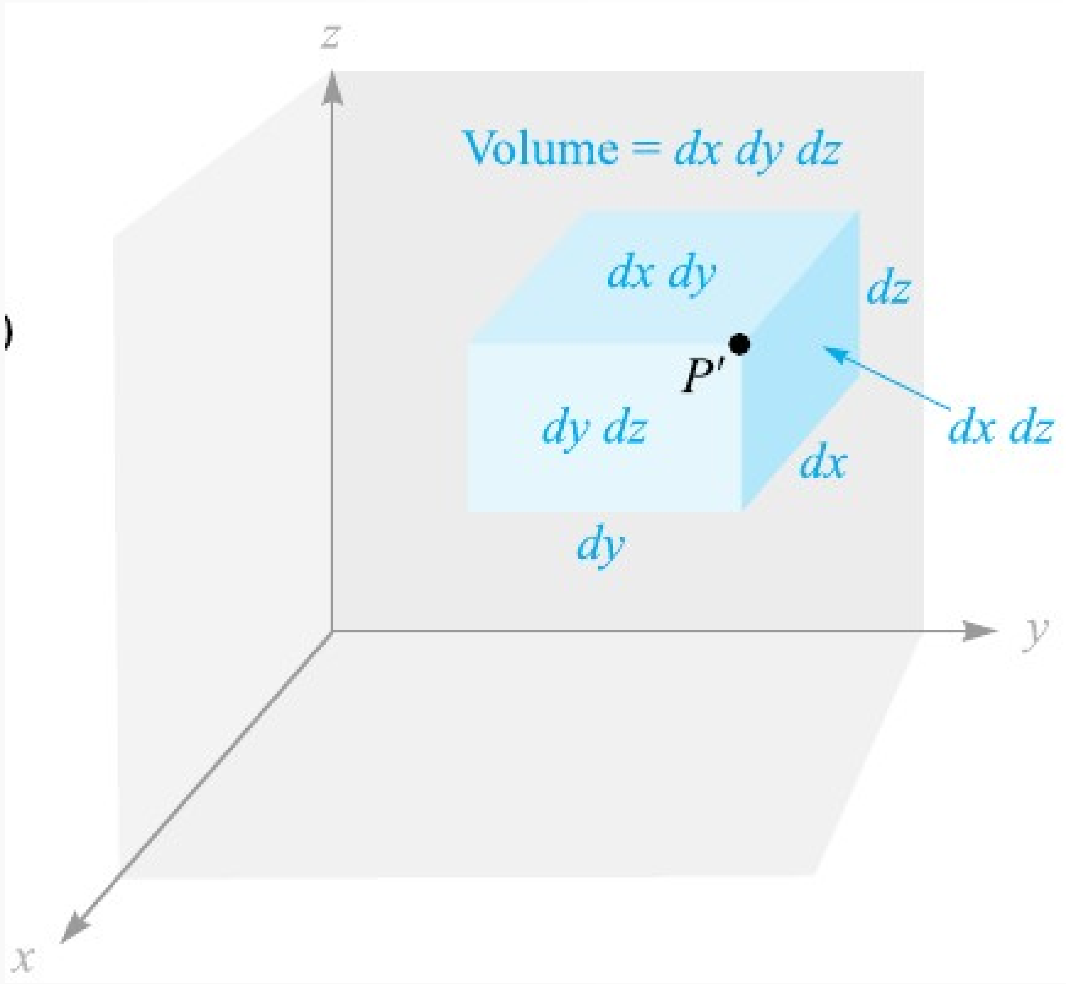

- Sistem koordinat berorientasi tangan kanan
- Jari tangan kanan yang melengkung ke dalam mengindikasikan arah perputaran sumbu-*x* menuju sumbu-*y*, maka ibu jari menunjukkan arah sumbu-*z*.

# Sistem Koordinat Persegi




- Perpotongan antara bidang *x*, *y* dan *z*.
- *P* → perpotongan antara
  - bidang $x = 1$,
  - bidang $y = 2$,
  - dan bidang $z = 3$.
- *Q* → perpotongan antara
  - bidang $x = 2$,
  - bidang $y = -2$,
  - dan bidang $z = 1$.

# Sistem Koordinat Persegi



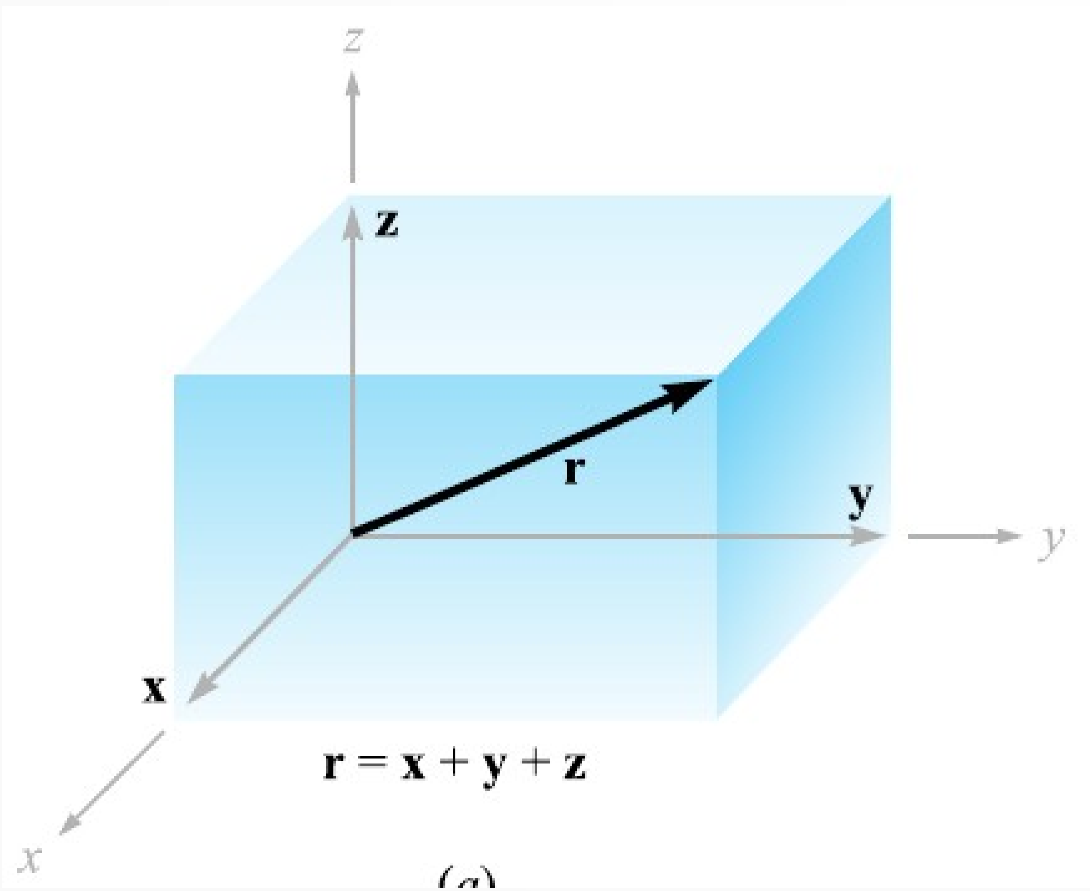

- Pergeseran titik *P* dalam jumlah sangat kecil → *P'*
- Koordinat titik *P'* adalah $x + dx$, $y + dy$, dan $z + dz$.
- Keenam bidang = tiga bidang awal dan tiga bidang yang bergeser → membentuk sebuah paralelepipedum
- Volume $dv = dxdydz$
- Luas diferensial $dS$ sebesar $dxdy$, $dydz$, $dzdx$.
- Jarak $dL$, dari P ke P', adalah

$$\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

Institut Teknologi Kalimantan

ELEKTRO ITK

# Komponen-Komponen Vektor dan Vektor Satuan



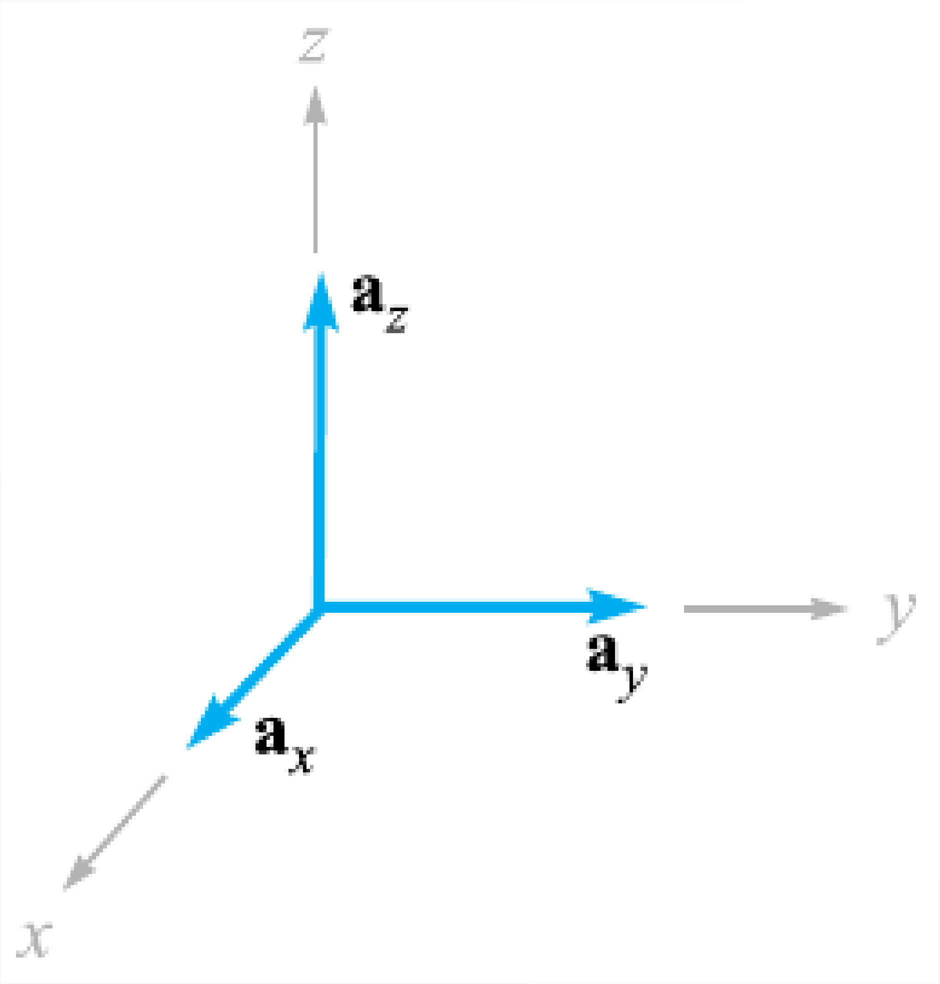

- Diketahui vektor **r**
- Cara menjabarkan vektor **r** adalah dengan memberikan tiga buah *vektor komponen*
- Vektor komponen memiliki arah yang sejajar dengan masing-masing koordinat
- Sehingga,

  **r = x + y + z**

Institut Teknologi Kalimantan

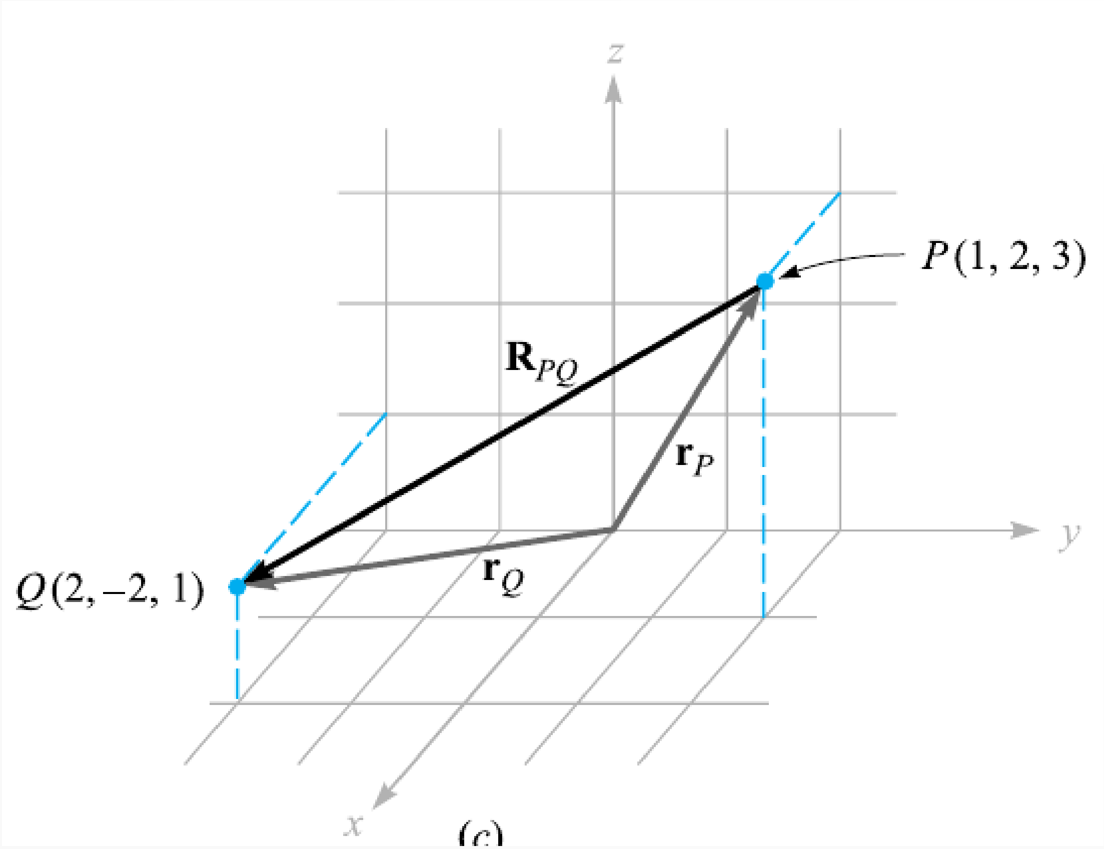
ELEKTRO ITK

# Komponen-Komponen Vektor dan Vektor Satuan




- Komponen vektor memiliki magnitudo yang ditentukan oleh vektor **r**, namun arahnya selalu diketahui dan tetap
- Sehingga muncul istilah **vektor-vektor satuan** → memiliki magnitudo sebesar satu dan arah yang selalu sama dengan sumbu koordinat terkait
- $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_z$ adalah vektor-vektor satuan yang berturut-turut memiliki arah sama dengan sumbu-*x*, *y*, dan *z*.

# Komponen-Komponen Vektor dan Vektor Satuan




$$\mathbf{R_P} = \mathbf{a_x} + 2\mathbf{a_y} + 3\mathbf{a_z}$$

$$\mathbf{R_Q} = 2\mathbf{a_x} - 2\mathbf{a_y} + \mathbf{a_z}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R_{PQ}} &= \mathbf{r_Q} - \mathbf{r_P} \\ &= (2-1)\mathbf{a_x} + (-2-2)\mathbf{a_y} + (1-3)\mathbf{a_z} \\ &= \mathbf{a_x} - 4\mathbf{a_y} - 2\mathbf{a_z}\end{aligned}$$

Institut Teknologi Kalimantan

ELEKTRO ITK

# Komponen-Komponen Vektor dan Vektor Satuan

- Sembarang vektor **B** dapat dituliskan sebagai

  $\mathbf{B} = \mathbf{B_x a_x} + \mathbf{B_y a_y} + \mathbf{B_z a_z}.$

- Magnitudo vektor **B** ditulis sebagai **|B|** atau *B*

$$|B| = \sqrt{B_x{}^2 + B_y{}^2 + B_z{}^2}$$

- Vektor satuan ke arah **r**

$$\mathbf{a_B} = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\mathbf{B_x}^2 + \mathbf{B_y}^2 + \mathbf{B_z}^2}} = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$$

Institut Teknologi Kalimantan

ELEKTRO ITK

# Komponen-Komponen Vektor dan Vektor Satuan

**Contoh soal**

- Tuliskan sebuah vektor satuan yang mengarah dari titik pusat ke titik G(2, -2, -1)

# Komponen-Komponen Vektor dan Vektor Satuan

**Solusi**

- Pertama, kita menentukan vektor yang berawal dari titik pusat menuju titik G,

$$G = 2a_x - 2a_y - a_z$$

- Kemudian, kita melanjutkannya dengan menghitung magnitudo G,

$$|G| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3$$

- dan akhirnya, kita menuliskan vektor satuan yang diinginkan sebagai

$$a_G = \frac{G}{|G|} = \frac{2}{3}a_x - \frac{2}{3}a_y - \frac{1}{3}a_z = 0.667a_x - 0.667a_y - 0.333a_z$$

Institut Teknologi Kalimantan

ELEKTRO ITK

# Medan Vektor

- Medan vektor adalah suatu fungsi dari sebuah vektor posisi
- Jika vektor posisi direpresentasikan sebagai **r**, maka medan vektor **G** dapat dinyatakan dalam notasi fungsional **G(r)** sedangkan medan skalar *T* ditulis sebagai *T*(**r**)

# Medan Vektor

## Contoh

- Suatu medan vektor S yang ditunjukkan dalam koordinat persegi

$$\mathbf{S} = \left\{ \frac{125}{(\mathbf{x}-1)^2 + (\mathbf{y}-2)^2 + (\mathbf{z}+1)^2} \right\} \{(\mathbf{x}-1)\mathbf{a_x} + (\mathbf{y}-2)\mathbf{a_y} + (\mathbf{z}+1)\mathbf{a_z}\}$$

  – Tentukan **S** di *P*(2,4,3)
  – Tentukan vektor satuan yang menunjukkan arah dari **S** di P
  – Tentukan bidang *f(x,y,z)* yang mana **|S|** = 1

Institut Teknologi Kalimantan

ELEKTRO ITK

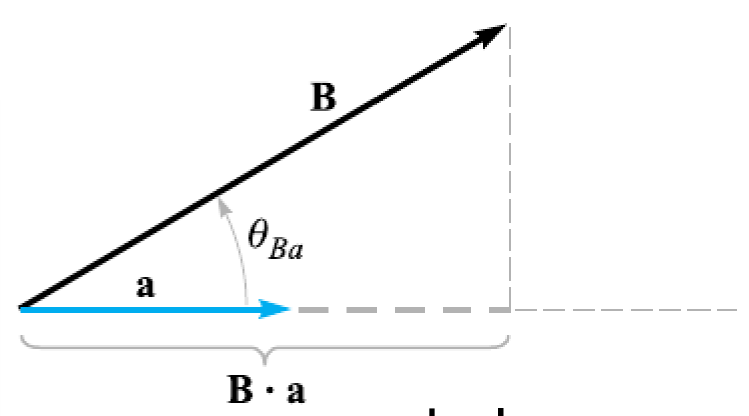
# The Dot Product

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \cos \theta_{AB}}$$ → skalar

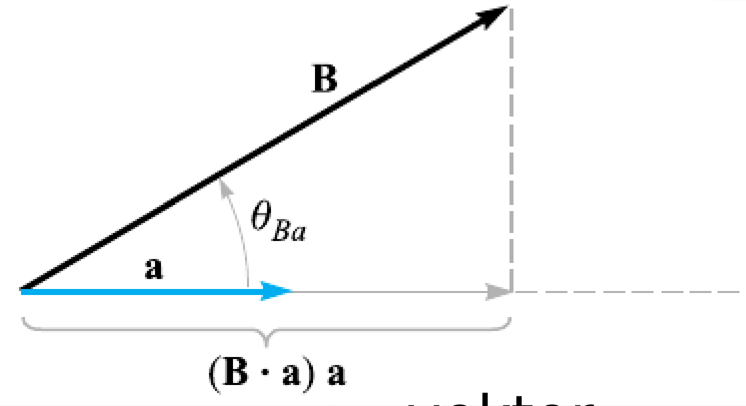
$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}}$$ Komutatif

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}$$

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 = |\mathbf{A}|^2}$$




skalar




vektor

# The Dot Product

Problem: In order to illustrate these definitions and operations, consider the vector field $\mathbf{G} = y\mathbf{a}_x - 2.5x\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$ and the point $Q(4, 5, 2)$. We wish to find: $\mathbf{G}$ at $Q$; the scalar component of $\mathbf{G}$ at $Q$ in the direction of $\mathbf{a}_N = \frac{1}{3}(2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z)$; the vector component of $\mathbf{G}$ at $Q$ in the direction of $\mathbf{a}_N$; and finally, the angle $\theta_{Ga}$ between $\mathbf{G}(\mathbf{r}_Q)$ and $\mathbf{a}_N$.

Solution: Substituting the coordinates of point $Q$ into the expression for $\mathbf{G}$, we have

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}_Q) = 5\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$$

Next we find the scalar component. Using the dot product, we have

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_N = (5\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z) \cdot \frac{1}{3}(2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z) = \frac{1}{3}(10 - 10 - 6) = -2$$

The vector component is obtained by multiplying the scalar component by the unit vector in the direction of $\mathbf{a}_N$,

$$(\mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_N)\mathbf{a}_N = -(2)\frac{1}{3}(2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z) = -1.333\mathbf{a}_x - 0.667\mathbf{a}_y + 1.333\mathbf{a}_z$$

The angle between $\mathbf{G}(\mathbf{r}_Q)$ and $\mathbf{a}_N$ is found from

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_N = |\mathbf{G}| \cos\theta_{Ga}$$

$$-2 = \sqrt{25 + 100 + 9}\cos\theta_{Ga}$$

$$\theta_{Ga} = \cos^{-1}\frac{-2}{\sqrt{134}} = 99.9^\circ$$

Institut Teknologi Kalimantan

ELEKTRO ITK

# The Dot Product

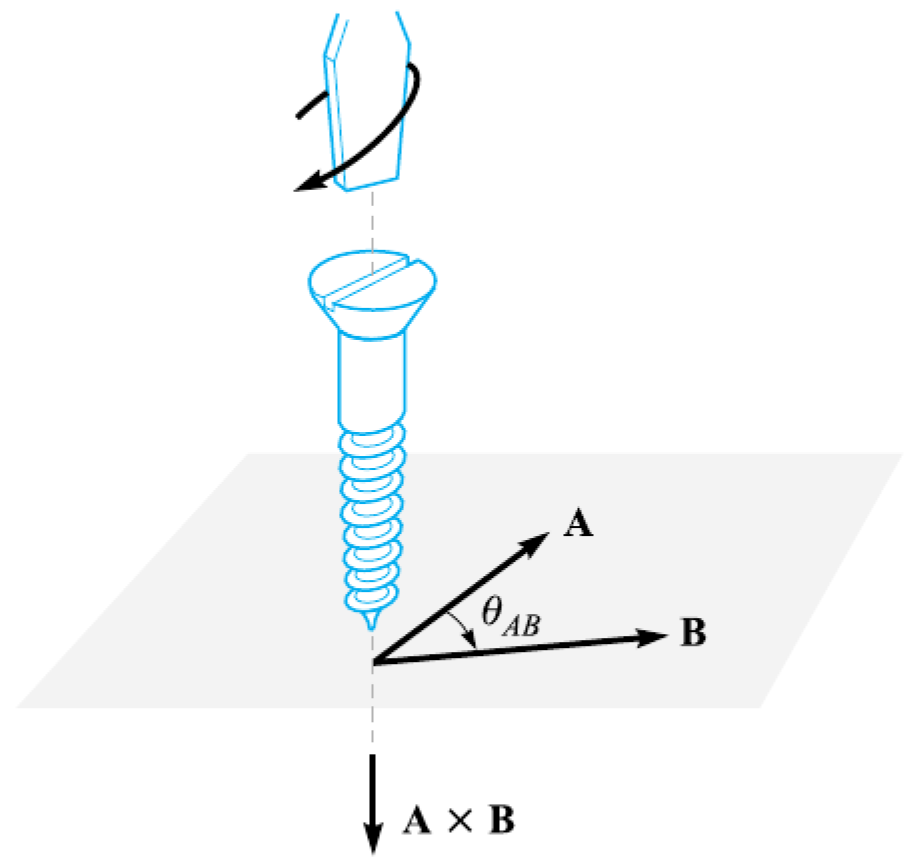
**D1.3.** The three vertices of a triangle are located at $A(6, -1, 2)$, $B(-2, 3, -4)$, and $C(-3, 1, 5)$. Find: (*a*) $\mathbf{R}_{AB}$; (*b*) $\mathbf{R}_{AC}$; (*c*) the angle $\theta_{BAC}$ at vertex $A$; (*d*) the (vector) projection of $\mathbf{R}_{AB}$ on $\mathbf{R}_{AC}$.

**Ans.** $-8\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - 6\mathbf{a}_z$; $-9\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$; $53.6^\circ$; $-5.94\mathbf{a}_x + 1.319\mathbf{a}_y + 1.979\mathbf{a}_z$

# The Cross Product

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{a}_N |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \sin\theta_{AB}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$




$$\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z \quad \mathbf{B} = -4\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= [(-3)(5) - (1(-2)]\mathbf{a}_x - [(2)(5) - (1)(-4)]\mathbf{a}_y + [(2)(-2) - (-3)(-4)]\mathbf{a}_z = -13\mathbf{a}_x - 14\mathbf{a}_y - 16\mathbf{a}_z$$

Institut Teknologi Kalimantan

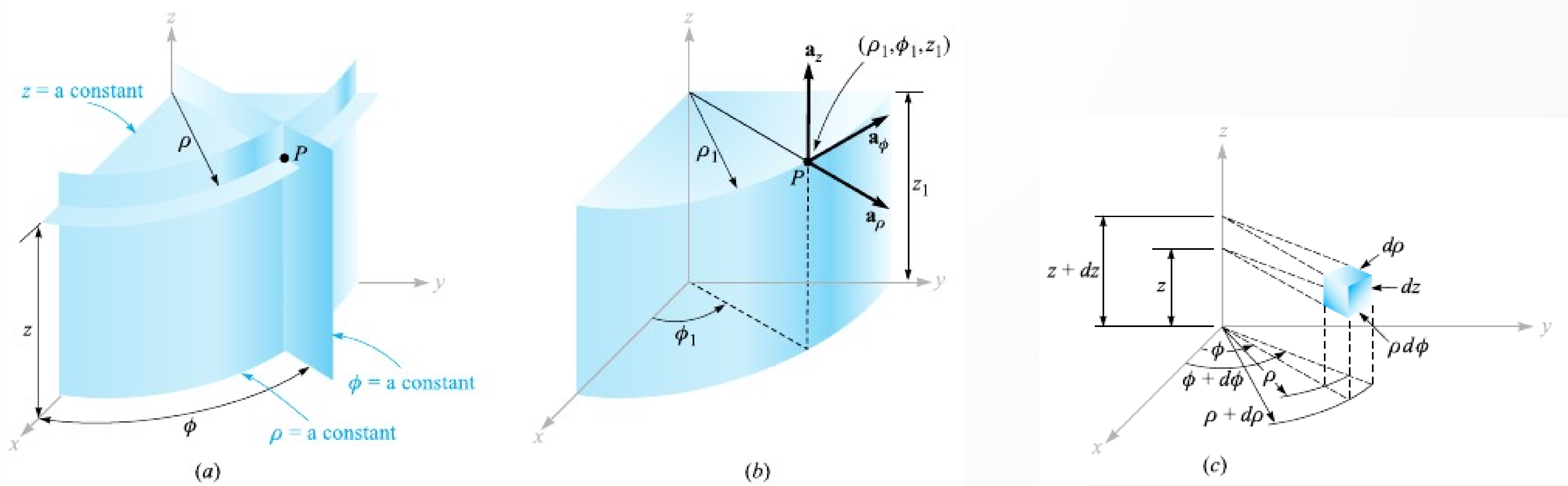
ELEKTRO ITK

# The Cross Product

**D1.4.** The three vertices of a triangle are located at $A(6, -1, 2)$, $B(-2, 3, -4)$, and $C(-3, 1, 5)$. Find: (*a*) $\mathbf{R}_{AB} \times \mathbf{R}_{AC}$; (*b*) the area of the triangle; (*c*) a unit vector perpendicular to the plane in which the triangle is located.

**Ans.** $24\mathbf{a}_x + 78\mathbf{a}_y + 20\mathbf{a}_z$; 42.0; $0.286\mathbf{a}_x + 0.928\mathbf{a}_y + 0.238\mathbf{a}_z$

# CIRCULAR CYLINDRICAL COORDINATES



# CIRCULAR CYLINDRICAL COORDINATES

Hubungan antara rectangular dan cylindrical

$$x = \rho \cos\phi \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\rho \geq 0)$$
$$y = \rho \sin\phi \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$
$$z = z \qquad z = z$$

Vector Rectangular

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z$$

Vector cylindrical

$$\mathbf{A} = A_\rho\mathbf{a}_\rho + A_\phi\mathbf{a}_\phi + A_z\mathbf{a}_z$$

$$A_\rho = (A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z)\cdot\mathbf{a}_\rho = A_x\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\rho + A_y\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_\rho$$
$$A_\phi = (A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z)\cdot\mathbf{a}_\phi = A_x\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\phi + A_y\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_\phi$$
$$A_z = (A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z)\cdot\mathbf{a}_z = A_z\mathbf{a}_z\cdot\mathbf{a}_z = A_z$$

**Table 1.1** Dot products of unit vectors in cylindrical and rectangular coordinate systems

| | $\mathbf{a}_\rho$ | $\mathbf{a}_\phi$ | $\mathbf{a}_z$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{a}_x\cdot$ | $\cos\phi$ | $-\sin\phi$ | 0 |
| $\mathbf{a}_y\cdot$ | $\sin\phi$ | $\cos\phi$ | 0 |
| $\mathbf{a}_z\cdot$ | 0 | 0 | 1 |

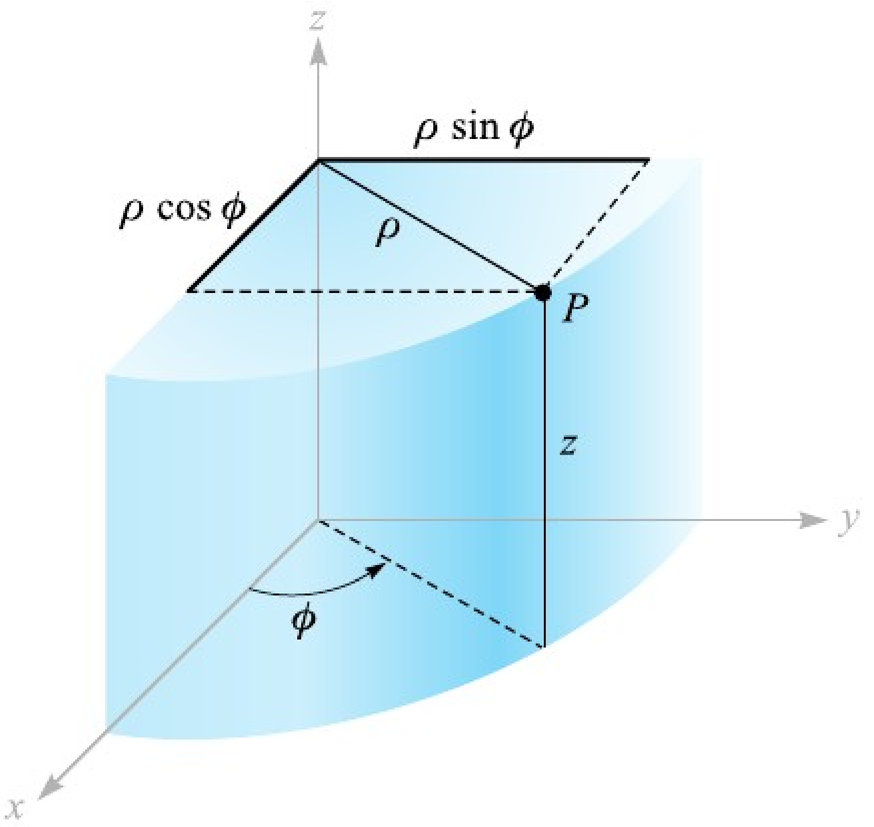



**Figure 1.7** The relationship between the rectangular variables $x, y, z$ and the cylindrical coordinate variables $\rho, \phi, z$. There is no change in the variable $z$ between the two systems.

# CIRCULAR CYLINDRICAL COORDINATES

Transform the vector $\mathbf{B} = y\mathbf{a}_x - x\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ into cylindrical coordinates.

***Solution.*** The new components are

$$\begin{aligned}
B_\rho &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_\rho = y(\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho) - x(\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho) \\
&= y \cos\phi - x \sin\phi = \rho \sin\phi \cos\phi - \rho \cos\phi \sin\phi = 0 \\
B_\phi &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_\phi = y(\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi) - x(\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi) \\
&= -y \sin\phi - x \cos\phi = -\rho \sin^2\phi - \rho \cos^2\phi = -\rho
\end{aligned}$$

Thus,

$$\mathbf{B} = -\rho\mathbf{a}_\phi + z\mathbf{a}_z$$

Institut Teknologi Kalimantan

ELEKTRO ITK

# CIRCULAR CYLINDRICAL COORDINATES

**D1.5.** (*a*) Give the rectangular coordinates of the point $C(\rho = 4.4, \phi = -115^\circ, z = 2)$. (*b*) Give the cylindrical coordinates of the point $D(x = -3.1, y = 2.6, z = -3)$. (*c*) Specify the distance from $C$ to $D$.

**Ans.** $C(x = -1.860, y = -3.99, z = 2)$; $D(\rho = 4.05, \phi = 140.0^\circ, z = -3)$; 8.36

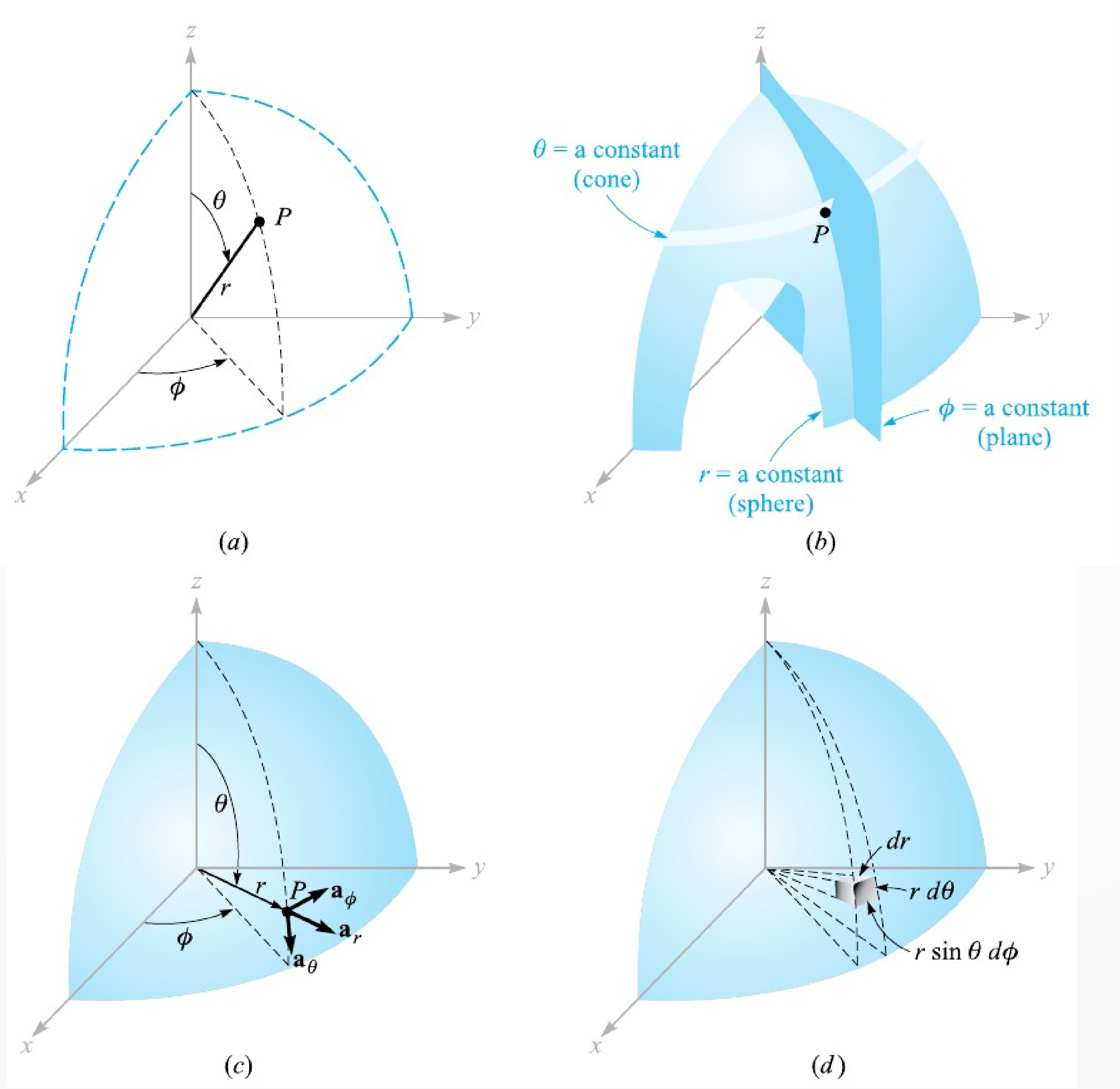
**D1.6.** Transform to cylindrical coordinates: (*a*) $\mathbf{F} = 10\mathbf{a}_x - 8\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z$ at point $P(10, -8, 6)$; (*b*) $\mathbf{G} = (2x + y)\mathbf{a}_x - (y - 4x)\mathbf{a}_y$ at point $Q(\rho, \phi, z)$. (*c*) Give the rectangular components of the vector $\mathbf{H} = 20\mathbf{a}_\rho - 10\mathbf{a}_\phi + 3\mathbf{a}_z$ at $P(x = 5, y = 2, z = -1)$.

**Ans.** $12.81\mathbf{a}_\rho + 6\mathbf{a}_z$; $(2\rho\cos^2\phi - \rho\sin^2\phi + 5\rho\sin\phi\cos\phi)\mathbf{a}_\rho + (4\rho\cos^2\phi - \rho\sin^2\phi - 3\rho\sin\phi\cos\phi)\mathbf{a}_\phi$; $H_x = 22.3$, $H_y = -1.857$, $H_z = 3$

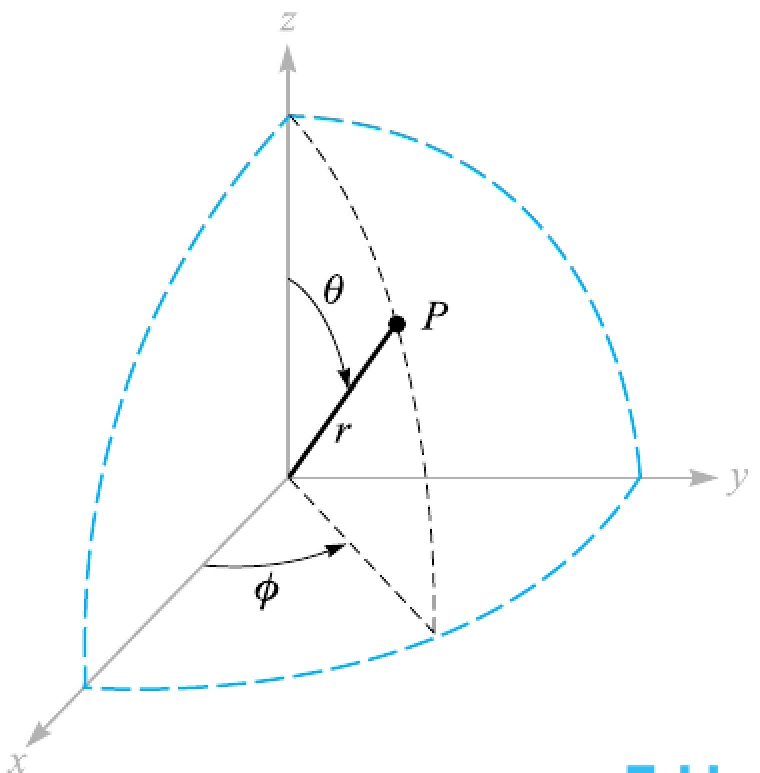
Institut Teknologi Kalimantan

ELEKTRO ITK

# SPHERICAL COORDINATE



# SPHERICAL COORDINATE




$$x = r \sin\theta \cos\phi$$
$$y = r \sin\theta \sin\phi$$
$$z = r \cos\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (r \geq 0)$$
$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$$
$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

**Table 1.2** Dot products of unit vectors in spherical and rectangular coordinate systems

| | $\mathbf{a}_r$ | $\mathbf{a}_\theta$ | $\mathbf{a}_\phi$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{a}_x \cdot$ | $\sin\theta \cos\phi$ | $\cos\theta \cos\phi$ | $-\sin\phi$ |
| $\mathbf{a}_y \cdot$ | $\sin\theta \sin\phi$ | $\cos\theta \sin\phi$ | $\cos\phi$ |
| $\mathbf{a}_z \cdot$ | $\cos\theta$ | $-\sin\theta$ | $0$ |

Institut Teknologi Kalimantan
ELEKTRO ITK

# SPHERICAL COORDINATE

We illustrate this procedure by transforming the vector field $\mathbf{G} = (xz/y)\mathbf{a}_x$ into spherical components and variables.

***Solution.*** We find the three spherical components by dotting $\mathbf{G}$ with the appropriate unit vectors, and we change variables during the procedure:

$$G_r = \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_r = \frac{xz}{y}\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_r = \frac{xz}{y} \sin\theta \cos\phi = r \sin\theta \cos\theta \frac{\cos^2\phi}{\sin\phi}$$

$$G_\theta = \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_\theta = \frac{xz}{y}\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\theta = \frac{xz}{y} \cos\theta \cos\phi = r \cos^2\theta \frac{\cos^2\phi}{\sin\phi}$$

$$G\phi = \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_\phi = \frac{xz}{y}\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi = \frac{xz}{y}(-\sin\phi) = -r \cos\theta \cos\phi$$

$$\boxed{\mathbf{G} = r \cos\theta \cos\phi\, (\sin\theta \cot\phi\, \mathbf{a}_r + \cos\theta \cot\phi\, \mathbf{a}_\theta - \mathbf{a}_\phi)}$$

Institut Teknologi Kalimantan

ELEKTRO ITK

# SPHERICAL COORDINATE

**D1.7.** Given the two points, $C(-3, 2, 1)$ and $D(r = 5, \theta = 20^\circ, \phi = -70^\circ)$, find: (*a*) the spherical coordinates of $C$; (*b*) the rectangular coordinates of $D$; (*c*) the distance from $C$ to $D$.

**Ans.** $C(r = 3.74, \theta = 74.5^\circ, \phi = 146.3^\circ)$; $D(x = 0.585, y = -1.607, z = 4.70)$; 6.29

**D1.8.** Transform the following vectors to spherical coordinates at the points given: (*a*) $10\mathbf{a}_x$ at $P(x = -3, y = 2, z = 4)$; (*b*) $10\mathbf{a}_y$ at $Q(\rho = 5, \phi = 30^\circ, z = 4)$; (*c*) $10\mathbf{a}_z$ at $M(r = 4, \theta = 110^\circ, \phi = 120^\circ)$.

**Ans.** $-5.57\mathbf{a}_r - 6.18\mathbf{a}_\theta - 5.55\mathbf{a}_\phi$; $3.90\mathbf{a}_r + 3.12\mathbf{a}_\theta + 8.66\mathbf{a}_\phi$; $-3.42\mathbf{a}_r - 9.40\mathbf{a}_\theta$

# TUGAS

- Kerjakan semua soal yang telah ditampilkan pada slide-slide sebelumnya.
- Minggu depan kuis :)

Institut Teknologi Kalimantan

ELEKTRO ITK