Modul 2
Deret Taylor dan Deret Maclaurin

Tujuan Pembelajaran

- Menentukan deret Taylor dan deret Maclaurin dari suatu fungsi di sekitar titik yang ditentukan

Deret Tak Terhingga

Dalam mata kuliah kalkulus tentang deret tak terhingga

Dengan turunan pertama, didapatkan hampiran

$$\sin x \approx x \quad \text{untuk} \quad x \approx 0$$

Bila digunakan deret kedua dan ketiga, akan didapatkan hampiran yang lebih baik

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \quad \text{untuk} \quad x \approx 0$$

Deret Tak Terhingga

- Kelak akan dapat ditunjukkan bahwa

$$\sin x = x - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \mathrm{K} + \mathrm{K}\,,\ \text{untuk}\ \ x \in \Re$$

Konvergen

- Deret pangkat

$$S(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \mathrm{K}$$

Konvergen untuk seluruh bilangan real x, dan $S(x)$ memenuhi persamaan diferensial orde 2:

$$S''(x) = -S(x)$$

dengan $S(0) = 0$ dan $S'(0) = 1$ .Solusi persamaan differensial ini adalah $S(x) = \sin x$

Sejauh ini…

- Diberikan suatu deret pangkat, dapat ditentukan selang kekonvergenannya
- Untuk deret geometri, serta turunan dan integralnya, bisa didapatkan jumlahnya
- Demikian juga untuk beberapa deret pangkat yang jumlahnya sama dengan $e^x, \cos x,$ dan $\sin x$
- Lalu, dengan operasi pada deret pangkat, dapat diperoleh uraian deret pangkat dari fungsi seperti $f(x) = xe^x$ dan $g(x) = e^x/(1-x)$

Pertanyaan baru

- Diberikan suatu fungsi $f(x)$, dapatkah diuraikan sebagai deret pangkat

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \mathrm{K}$$

  untuk x disekitar a ?

- Dengan perkataan lain, apakah dapat dicari nilai dari $c_0, c_1, c_2, \mathrm{K}$ sehingga deret pangkat di atas konvergen ke $f(x)$ untuk x di sekitar $x = a$?

Pertanyaan baru

Misalkan f dapat diuraikan sebagai deret pangkat di sekitar $x = a$

Maka, c_0 pasti sama dengan nilai $f(a)$

Selanjutnya, jika diturunkan f terhadap x

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \mathrm{K}$$

Maka, c_1 pasti sama dengan nilai $f'(a)$

Turunkan lagi terhadap x

$$f''(x) = 2!c_2 + 3!2c_3(x-a) + 4.3c_4(x-a)^2 + \mathrm{K}$$

Maka, c_2 pasti sama dengan nilai $f''(a)$ dst…

Jadi…

- Jika f dapat diuraikan sebagai deret pangkat

$$(1) \qquad f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots$$

Maka, f mempunyai turunan setiap orde dan

$$(2) \qquad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

dengan $f^{(0)}(a) = f(a)$ dan $0! = 1$

Tetapi bagaimana sebaliknya? Jika $f^{(n)}(a)$ ada untuk tiap n, dan c_n dihitung dengan persamaan (2), apakah jumlah deret pangkat (1) sama dengan $f(x)$?

Deret Taylor dan Deret Maclaurin

Uraian deret pangkat dari f disekitar $x = a$ disebut **deret Taylor** untuk f di a , yakni:

$$\boxed{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \mathrm{K}}$$

Jika $a = 0$,maka deret pangkat tersebut disebut **deret Maclaurin** untuk f, yakni:

$$\boxed{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \mathrm{K}}$$

Polinom dan Suku Sisa Taylor

Misalkan f fungsi yang mempunyai turunan ke-$(n+1)$ pada selang terbuka I yang memuat a. Maka, untuk setiap $x \in I$, berlaku

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + R_n(x)}$$

$$\boxed{P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \mathrm{K} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

dan suku sisa

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad x < c < a}$$

Jadi

Jika $n = 0$ maka

$$f(x) = P_0(x) + R_0(x)$$

$$\underbrace{f(x) = f(a) + f'(c)(x - a)}_{\text{Teorema nilai rata-rata}}$$

Jadi, persamaan polynomial sebelumnya merupakan bentuk umum dari teorema nilai rata-rata

Teorema Taylor

Misalkan f fungsi yang mempunyai turunan tiap orde pada selang $l = (a - r, a + r)$. Maka, untuk setiap $x \in I$ berlaku

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots}$$

Jika dan hanya jika

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} R_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1} = 0,\ x < c < a}$$

Contoh 1

Tentukan deret Maclaurin untuk $\sin x$ dan periksa bahwa deret tersebut merepresentasikan $\sin x$ untuk setiap $x \in \Re$

Solusi

Jika ditentukan fungsi $f(x) = \sin x$, maka dapat disusun tabel penurunan fungsinya

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{n}(0)$	C_n
0	$\sin x$	0	0
1	$\cos x$	1	1
2	$-\sin x$	0	0
3	$-\cos x$	-1	$1/3!$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Solusi

- Jadi deret Maclaurin untuk $f\left(x\right)=\sin x$ adalah

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

Nilai diatas berlaku untuk semua nilai x. Untuk membuktikan hasil diatas maka perlu dihitung suku sisanya.

Solusi

Karena $\left|f^{(n+1)}(x)\right| = |\sin x|$, maka

$$\boxed{\left|R_n(x)\right| \le \frac{1}{(n+1)!}\left|x^{n+1}\right|}$$

Tapi $\lim_{n\to\infty} x^n / n! = 0$, untuk setiap x. Dengan demikian

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0}$$

Tugas

1. Dapatkan deret maclaurin dari

a. $\cos x$

b. $\ln(1+x)$

2. Dapatkan deret taylor dari $\cos x$ disekitar $x = \dfrac{3\pi}{2}$