

# Modul 4

## Penyelesaian Persamaan Linear Serentak

# Persamaan Linear Serentak

- Persamaan linear serentak dengan  $n$  variabel bebas  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = h_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = h_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = h_3$$

$\vdots$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = h_n$$



# Metode Invers dan Determinan Matriks

- Metode penyelesaian persamaan serentak dengan menggunakan matriks invers dan determinan matriks.
- Kelebihan metode ini adalah hasil penyelesaiannya merupakan hasil eksak (tepat)



# Step Penyelesaian

- Jika diketahui persamaan linier

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3$$



# Step Penyelesaian

- **Langkah pertama** = menyusun persamaan serentak dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot x = H$$

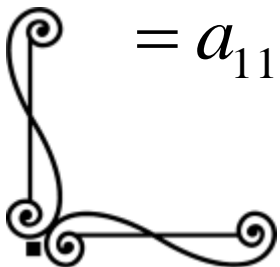


# Step Penyelesaian

- **Langkah kedua** : menentukan determinan matriks, adjoint matriks, invers matriks dan variable matriks

Determinan matriks A

$$\det A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$


$$= a_{11}((a_{22})(a_{33}) - (a_{32})(a_{23})) + a_{12}((a_{23})(a_{31}) - (a_{21})(a_{32})) + a_{13}((a_{21})(a_{32}) - (a_{31})(a_{22}))$$

# Step Penyelesaian

Adjoint matriks A

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$



# Step Penyelesaian

Invers matriks  $A$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det A}$$

Variable matriks  $A$

$$X = A^{-1}H$$





# Contoh Soal

- Carilah penyelesaian dari persamaan linear serentak dibawah ini dengan metode invers dan determinan matriks

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 12$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11$$

$$2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2$$



# Solusi

- **Langkah pertama** menyusun menjadi matriks koefisien

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A \quad X = H$$



# Solusi

- **Langkah kedua** mencari matriks determinan, adjoint matriks, invers matriks dan variable matriks

Determinan dari matriks A

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3((2)(-1) - (-2)(3)) + (-1)((3)(2) - (1)(-1)) + \\ &\quad 2((1)(-2) - (2)(2)) \\ &= -7\end{aligned}$$



# Solusi

- Adjoint matriks

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$



# Solusi

- Invers matriks

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det A} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{7} & \frac{5}{7} & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{6}{7} & -\frac{4}{7} & -1 \end{bmatrix}$$

- Varibel pada matriks

$$x = A^{-1}H = \begin{bmatrix} -\frac{4}{7} & \frac{5}{7} & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{6}{7} & -\frac{4}{7} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian  $\Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1$  dan  $x_3 = 2$



# Metode Dekomposisi L-U

- Metode penyelesaian dengan membentuk matriks segitiga atas (matriks U) dan matriks segitiga bawah (matriks L) dari matriks koefisien, serta membentuk vektor matriks (matriks H') dari matriks hasil (matriks H)



# Step Penyelesaian

- **Langkah pertama** membentuk matriks koefisien A, matriks variable x dan matriks hasil H
- **Langkah kedua** mencari matriks segitiga bawah (matriks L) dan matriks segitiga atas (matriks U)

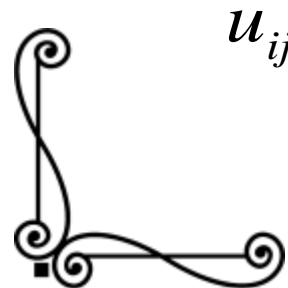
$$l_{i1} = a_{i1}$$

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{1k} \cdot u_{kj}$$

$$u_{ij} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}}{l_{ii}}$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n$$



# Step Penyelesaian

Mencari vektor matriks (matriks  $H'$ ) dari matriks hasil

$$h'_1 = \frac{h_1}{l_{11}} \qquad h'_j = \frac{h_i - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot h'_k}{l_{ii}}$$

• Membentuk augmented matriks ( $U | H'$ ) dan mencari penyelesaian dengan

$$x_n = h'_n \qquad x_j = h'_j - \sum_{k=j+1}^n u_{jk} \cdot x_k$$





# Contoh Soal

- Carilah penyelesaian dari persamaan linear serentak dibawah ini dengan metode dekomposisi L-U

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14$$

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 36$$



# Solusi

- **Langkah pertama**

Membentuk matriks koefisien, matriks variable dan matriks hasil

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14$$

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 36$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 36 \end{bmatrix}$$



# Solusi

- **Langkah kedua**

Mencari matriks L dan U dari matriks koefisien

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonal utama matriks U bernilai 1



# Solusi

Pada  $j=1$ , didapatkan

$$l_{11} = a_{11} = 1$$

$$l_{21} = a_{21} = 1$$

$$l_{31} = a_{31} = 1$$

Pada  $i=1$ , didapatkan

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = 1$$

$$u_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}} = 1$$



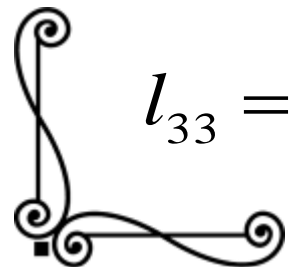
# Solusi

$$l_{22} = a_{22} - \sum_{k=1}^1 l_{ik} \cdot u_{kj} = a_{22} - (l_{21} \cdot u_{12}) = 1$$

$$l_{32} = a_{32} - \sum_{k=1}^1 l_{ik} \cdot u_{kj} = a_{32} - (l_{31} \cdot u_{12}) = 3$$

$$u_{23} = \frac{a_{23} - \sum_{k=1}^1 l_{ik} \cdot u_{kj}}{l_{22}} = \frac{a_{23} - (l_{21} \cdot u_{13})}{l_{22}} = 2$$

$$l_{33} = a_{33} - \sum_{k=1}^2 l_{ik} \cdot u_{kj} = a_{33} - (l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23}) = 2$$



# Solusi

Jadi matriks L dan U

$$l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Solusi

- Matriks  $H'$  diperoleh

$$h'_1 = \frac{h_1}{l_{11}} = \frac{6}{1} = 6 \qquad h'_2 = \frac{h_2 - l_{21}h'_1}{l_{22}} = 8$$

$$h'_3 = \frac{h_3 - (l_{31}h'_1 + l_{32}h'_2)}{l_{33}} = 3$$

Jadi matriks  $H'$      $H' = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$



# Solusi

- **Langkah ketiga**

Augmented matriks  $(U | H')$  diperoleh

$$U|H' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaiannya

$$x_3 = h'_3 = 3$$

$$x_2 = h'_2 - u_{23} \cdot x_3 = 2$$

$$x_1 = h'_1 - (u_{12} \cdot x_2 + u_{13} \cdot x_3) = 1$$





# Metode Iterasi Jakobi

- Penyelesaian dengan menggunakan persamaan

$$x_i^{(n+1)} = \frac{h_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^n, i \neq j$$

Syarat penyelesaian

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, N$$
$$i \neq j$$



# Step Penyelesaian

- **Langkah pertama** memeriksa susunan dari persamaan apakah sesuai dengan syarat penyelesaian. Jika tidak, ubah susunan persamaan
- **Langkah kedua** menyusun matriks koefisien, matriks variable dan matriks hasil
- **Langkah ketiga** menentukan nilai variable awal, dan melakukan iterasi sesuai dengan persamaan iterasi



# Contoh Soal

- Carilah penyelesaian dari persamaan linear serentak dibawah ini dengan metode iterasi Jakobi

$$8x_1 + x_2 - x_3 = 8$$

$$x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 12$$

$$x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -4$$



# Solusi

- **Langkah pertama**
- Persamaan tidak sesuai dengan syarat sehingga dari

$$8x_1 + x_2 - x_3 = 8$$

$$x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 12$$

$$x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -4$$

menjadi

$$8x_1 + x_2 - x_3 = 8$$

$$x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -4$$

$$x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 12$$



# Solusi

- **Langkah kedua**

Matriks koefisien A

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Matriks variabel

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Matriks hasil

$$H = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \end{bmatrix}$$



# Solusi

- **Langkah ketiga** menentukan titik variable x awal, misalnya

$$x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = x_3^{(1)} = 0$$

Iterasi pertama, n=1

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{h_1}{a_{11}} - \sum_{j=1}^3 \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^{(n)} = \frac{8}{8} - \left( \frac{a_{12}}{a_{11}} x_1^{(1)} + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(1)} \right), j \neq 1 \\ &= 1 - (0 + 0) = 1 \end{aligned}$$



# Solusi

$$x_2^{(2)} = \frac{h_2}{a_{22}} - \sum_{j=1}^3 \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)} = \frac{-4}{-7} - \left( \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(1)} + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(1)} \right), j \neq 2$$
$$= 0.571 - (0 + 0) = 0.571$$

$$x_3^{(2)} = \frac{h_3}{a_{33}} - \sum_{j=1}^3 \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)} = \frac{12}{9} - \left( \frac{a_{31}}{a_{33}} x_1^{(1)} + \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2^{(1)} \right), j \neq 3$$
$$= 1.333 - (0 + 0) = 1.333$$



# Solusi

Iterasi	$x_1$	$x_2$	$x_3$
	0	0	0
1	1	0.571	1.333
2	1.095	1.095	1.048
3	0.995	1.026	0.969
4	0.993	0.990	1.000
5	1.002	0.998	1.004
6	1.001	1.001	1.001
7	1.000	1.000	1.000
8	1.000	1.000	1.000





# Latihan

- Carilah penyelesaian dari persamaan linear serentak dibawah ini dengan metode iterasi Jakobi

$$6x_1 - 3x_2 + x_3 = 11$$

$$2x_1 + x_2 - 8x_3 = -15$$

$$x_1 - 7x_2 + x_3 = 10$$



# Metode Iterasi Gauss-Siedel

- Penyelesaian dengan metode iterasi menggunakan persamaan

$$x_i^{(n+1)} = \frac{h_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n+1)} - \sum_{j=i+1}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)}$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

$$n = 1, 2, \dots$$



# Step Penyelesaian

- **Langkah pertama** dan **langkah kedua** penyelesaian sama dengan metode iterasi Jakobi
- **Langkah ketiga** menentukan titik variable  $x$  awal kemudian melakukan iterasi sampai didapatkan variable  $x$  yang sama atau hampir sama



# Contoh Soal

- Carilah penyelesaian dari persamaan linear serentak dibawah ini dengan metode iterasi Gauss-Siedel

$$8x_1 + x_2 - x_3 = 8$$

$$x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 12$$

$$x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -4$$



# Solusi

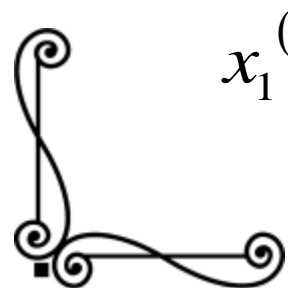
- **Langkah pertama** dan **langkah kedua** penyelesaian sama dengan metode iterasi Jakobi
- **Langkah ketiga** menentukan titik variable x awal, misalnya  $x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = x_3^{(1)} = 0$

Iterasi pertama,  $n=1$

$$x_1^{(2)} = \frac{h_1}{a_{11}} - \sum_{j=1}^0 \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^{(n+1)} - \sum_{j=2}^3 \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^{(n)}$$

$$x_1^{(2)} = \frac{h_1}{a_{11}} - 0 - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(1)} + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(1)}$$

$$= 1 - 0 - (0 + 0) = 1$$



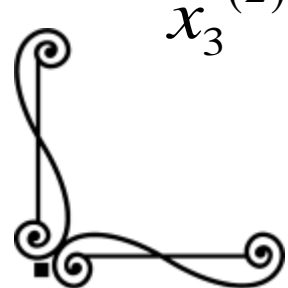
# Solusi

$$x_2^{(2)} = \frac{h_2}{a_{22}} - \sum_{j=1}^1 \frac{a_{2j}}{a_{22}} x_j^{(n+1)} - \sum_{j=3}^3 \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^{(n)}$$

$$\begin{aligned} x_2^{(2)} &= \frac{h_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(2)} + \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(1)} \\ &= 0.571 - (-1/7 + 0) = 0.7147 \end{aligned}$$

$$x_3^{(2)} = \frac{h_3}{a_{33}} - \sum_{j=1}^2 \frac{a_{3j}}{a_{33}} x_j^{(n+1)} - \sum_{j=4}^3 \frac{a_{3j}}{a_{33}} x_j^{(n)}$$

$$\begin{aligned} x_3^{(2)} &= \frac{h_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}} x_1^{(2)} + \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2^{(1)} - 0 \\ &= 1.333 - (2/9 + 0.714/9) = 1.032 \end{aligned}$$



# Solusi

Iterasi	$x_1$	$x_2$	$x_3$
	0	0	0
1	1	0.741	1.032
2	1.041	1.041	0.996
3	0.997	0.996	1.002
4	1.001	1.000	1.000
5	1.000	1.000	1.000
6	1.000	1.000	1.000



# Latihan

- Carilah penyelesaian dari persamaan linear serentak dibawah ini dengan metode iterasi Gauss Siedel

$$6x_1 - 3x_2 + x_3 = 11$$

$$2x_1 + x_2 - 8x_3 = -15$$

$$x_1 - 7x_2 + x_3 = 10$$





# Tugas

- Diketahui persamaan linear serentak

a) Selesaikan dengan metode determinan dan invers matriks

$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 17$$

$$2x_1 + 8x_2 + 16x_3 = 42$$

$$5x_1 + 21x_2 + 45x_3 = 91$$



# Tugas

b) Selesaikan dengan menggunakan metode determinan & invers matriks, metode dekomposisi L-U, metode iterasi jakobi dan metode Gauss Siedel

$$\begin{aligned}5x_1 - x_2 &= 9 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 &= 4 \\ -x_2 + 5x_3 &= -6\end{aligned}$$

