

Modul 2

Penyelesaian Akar-Akar Persamaan Karakteristik

Pengantar

- Persamaan karakteristik yang biasa dijumpai

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- Penyelesaiannya

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Bagaimana dengan orde tinggi atau penyelesaian polynomial??

Pengantar

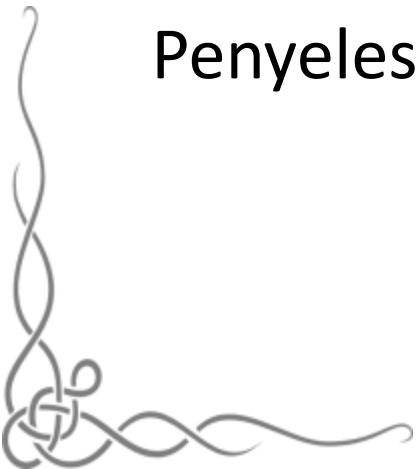
Persamaan orde tinggi & persamaan non linear

$$x^4 - 1,1x^3 + 2,3x^2 + 0,5x - 3,3 = 0$$

$$3x + \sin x - e^x = 0$$

$$x^2 \ln x - 1 + x^2 = 0$$

Penyelesaian dengan metode numerik



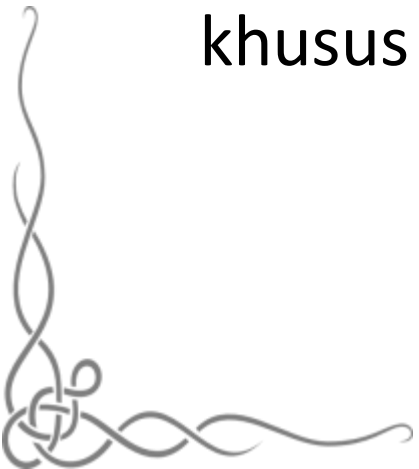
Penyelesaian Non Linear

1. Metode Tabulasi
2. Metode Biseksi
3. Metode Regula Falsi
4. Metode Iterasi Bentuk $x = g(x)$
5. Metode Newton-Raphson



Metode Tabulasi

- Metode penyelesaian persamaan non linear dengan cara membuat tabel-tabel persamaan atau fungsi nonlinear di sekitar titik penyelesaiannya
- Metode yang **paling sederhana** untuk menyelesaikan persamaan non linear
- **Paling sederhana** karena tidak ada persamaan khusus dalam penyelesaian persamaan non linear



Tahap Penyelesaian

- **Langkah pertama**

Menentukan dua titik awal fungsi $f(x)$

$$\boxed{f(x_1) \cdot f(x_2) < 0}$$

- **Langkah kedua**

Membuat tabel fungsi $f(x)$ antara $f(x_1)$ dan $f(x_2)$



Tahap Penyelesaian

- **Langkah ketiga**

Membuat tabel di sekitar dua titik x yang menyebabkan perubahan tanda pada fungsi $f(x)$

- **Langkah keempat** dan seterusnya sama dengan langkah ketiga



Contoh

- Carilah akar penyelesaian dari persamaan non linear dibawah ini dengan metode tabulasi

$$f(x) = 2 - 5x + \sin x = 0$$



Solusi

- **Langkah pertama**

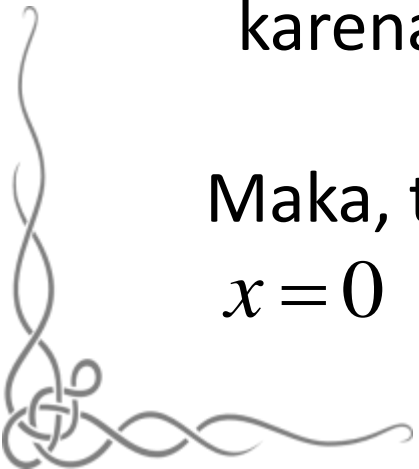
Misalnya diambil

$$f(x_1) = f(0) = 2 - 5(0) + \sin 0 = 2$$

$$f(x_2) = f(1) = 2 - 5(1) + \sin 1 = -2,15853$$

karena $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$

Maka, titik penyelesaiannya berada diantara
 $x = 0$ dan $x = 1$



Solusi

- **Langkah kedua**

Membuat tabel fungsi $f(x)$ disekitar $f(x_1)$ dan $f(x_2)$



Solusi

x	$f(x)$	$ f(x) $
0	2	2
0,1	1.59983	1.59983
0,2	1,19867	1,19867
0,3	0,79552	0,79552
0,4	0,38942	0,38942
0,5	-0,20574	0,20574
0,6	-0,43536	0,43536
0,7	-0,85578	0,85578
0,8	-1,28264	1,28264
0,9	-1,71667	1,71667
1	-2,15853	2,15853

Solusi

- **Langkah ketiga**

Membuat tabel disekitar dua titik yang menyebabkan perubahan tanda fungsi $f(x)$



Solusi

x	$f(x)$	$ f(x) $
0	2	2
0,1	1.59983	1.59983
0,2	1,19867	1,19867
0,3	0,79552	0,79552
0,4	0,38942	0,38942
0,5	-0,20574	0,20574
0,6	-0,43536	0,43536
0,7	-0,85578	0,85578
0,8	-1,28264	1,28264
0,9	-1,71667	1,71667
1	-2,15853	2,15853



Solusi

- Nilai error terkecil adalah 0,20574
- Perubahan tanda pada $f(x)$ disekitar $f(0,4)$ dan $f(0,5)$
- Akar penyelesaian berada di titik $x = 0,4$ dan $x = 0,5$
- **Langkah keempat**
Mengulangi langkah ketiga dst



HASILNYA ...

Solusi

x	$f(x)$	$ f(x) $
0,4	0,38942	0,38942
0,41	0,34861	0,34861
0,42	0,30776	0,30776
0,43	0,26687	0,26687
0,44	0,22594	0,22594
0,45	0,18497	0,18497
0,46	0,14395	0,14395
0,47	0,10289	0,10289
0,48	0,06178	0,06178
0,49	0,02163	0,02163
0,5	-0,20574	0,20574



Solusi

- Nilai error terkecil adalah 0,02163
- Akar penyelesaian berada di titik $x = 0,49$ dan $x = 0,5$

Penyelesaian persoalan jika dibatasi nilai errornya lebih kecil dari $x = 10^{-7}$ adalah

$$x = 0,49500768$$

Dimana $f(x) = 9,4 \times 10^{-9}$ (error)

Kelemahan Metode Tabulasi

- Jika fungsi $f(x)$ mempunyai beberapa akar penyelesaian, akar tersebut tidak dapat dicari secara langsung atau bersamaan, tetapi satu persatu
- Tidak dapat mencari akar kompleks (imajiner)
- Proses iterasinya relatif lambat

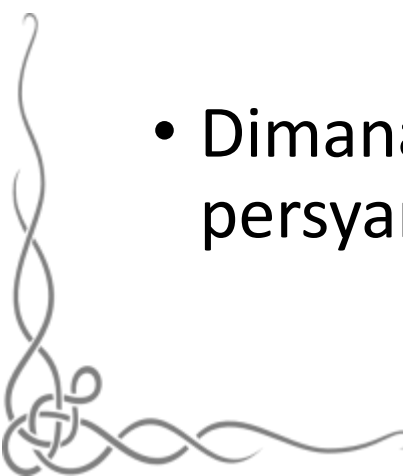


Metode Biseksi

- Disebut juga metode **Pembagian Interval** atau metode **Bolzano**
- Untuk mencari akar-akar persamaan non linear dengan proses iterasi , sesuai dengan rumus :

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

- Dimana nilai $f(x_1)$ dan $f(x_2)$ harus memenuhi persyaratan:

$$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$$


Tahap Penyelesaian

- **Langkah pertama**

Menentukan dua titik awal fungsi $f(x)$

$$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$$

- **Langkah kedua**

Mencari nilai x_3 dengan

Mencari nilai $f(x_3)$

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

- **Langkah ketiga**

Melakukan iterasi untuk memperoleh akar penyelesaian



Contoh Soal

- Carilah akar penyelesaian dari persamaan non linear dibawah ini dengan metode Biseksi

$$f(x) = x^3 - 7x + 1$$



Solusi

- **Langkah pertama**

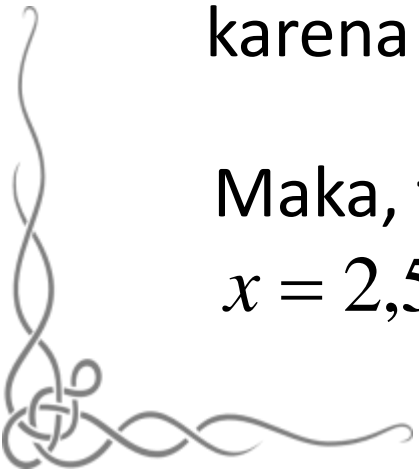
Misalnya diambil

$$f(x_1) = f(2,6) = (2,6)^3 - 7(2,6) + 1 = 0,376$$

$$f(x_2) = f(2,5) = (2,5)^3 - 7(2,5) + 1 = -0,875$$

karena $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$

Maka, titik penyelesaiannya berada diantara
 $x = 2,5$ dan $x = 2,6$



Solusi

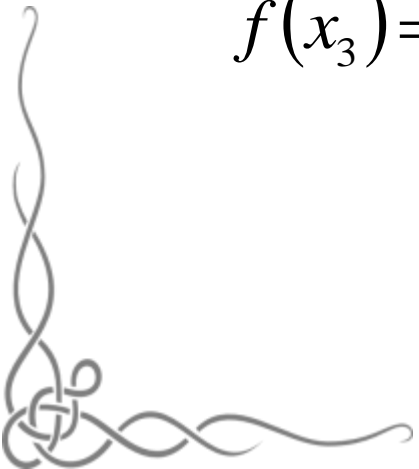
- **Langkah kedua**

Mencari nilai x_3

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2,6 + 2,5}{2} = 2,55$$

dan

$$f(x_3) = f(2,55) = (2,55)^3 - 7(2,55) + 1 = -0,268625$$



Solusi

- **Langkah ketiga**

- Hasil dari langkah kedua, nilai $f(x_3)$ negatif
- Persyaratan metode Biseksi $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$
- Untuk memperoleh nilai x_4 digunakan nilai dari x_1 dan x_3 karena

$$f(x_1) \cdot f(x_3) < 0$$



Solusi

Mencari nilai x_4

$$x_4 = \frac{x_1 + x_3}{2} = \frac{2,6 + 2,55}{2} = 2,575$$

dan

$$f(x_4) = f(2,575) = (2,575)^3 - 7(2,575) + 1 = 0,04886$$



Solusi

Iterasi selanjutnya

$$x_5 = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{2,55 + 2,575}{2} = 2,5625$$

dan

$$f(x_5) = f(2,5625) = (2,5625)^3 - 7(2,5625) + 1 = -0,111084$$



Solusi

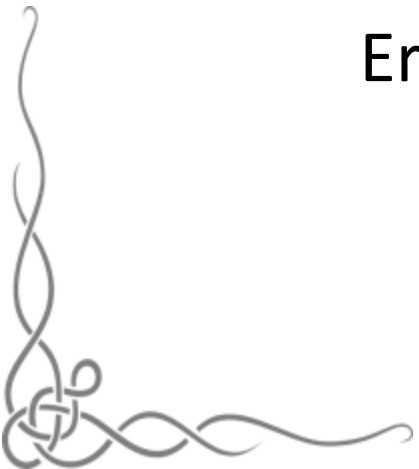
- Penyelesaian persoalan jika dibatasi nilai errornya lebih kecil dari $x = 10^{-7}$ adalah

$$x = 2,5712014198$$

dimana

$$f(x) = -3,472 \times 10^{-8}$$

$$\text{Error} = 3,472 \times 10^{-8}$$



Kelemahan Metode Biseksi

- Jika fungsi $f(x)$ mempunyai beberapa akar penyelesaian, akar tersebut tidak dapat dicari secara langsung atau bersamaan, tetapi satu persatu
- Tidak dapat mencari akar kompleks (imajiner)
- Proses iterasinya relatif lambat



Metode Regula Falsi

- Disebut juga metode **Interpolasi Linear**
- Memperoleh akar persamaan non linear dengan

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)}(x_2 - x_1)$$

- Dimana nilai $f(x_1)$ dan $f(x_2)$ harus memenuhi persyaratan:

$$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$$



Tahap Penyelesaian

- **Langkah pertama**

Menentukan dua titik awal fungsi $f(x)$

$$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$$

- **Langkah kedua**

Mencari nilai x_3

Mencari nilai $f(x_3)$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)} (x_2 - x_1)$$

- **Langkah ketiga**

Melakukan iterasi untuk memperoleh akar penyelesaian

Contoh Soal

- Carilah akar penyelesaian dari persamaan non linear dibawah ini dengan metode Regula Falsi

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$$



Solusi

- **Langkah pertama**

Misalnya diambil

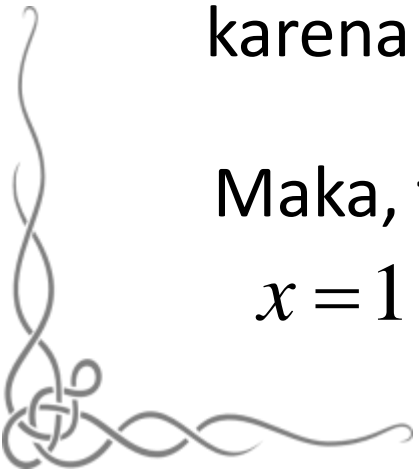
$$f(x_1) = f(1) = (1)^3 + (1)^2 - 3(1) - 3 = -4$$

$$f(x_2) = f(2) = (2)^3 + (2)^2 - 3(2) - 3 = 3$$

karena $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$

Maka, titik penyelesaiannya berada diantara

$$x = 1 \quad \text{dan} \quad x = 2$$



Solusi

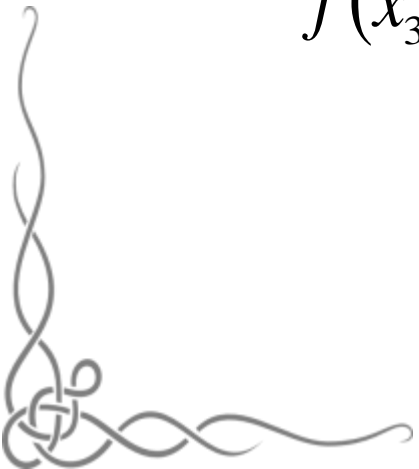
- **Langkah kedua**

Mencari nilai x_3

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)}(x_2 - x_1) = 1,57142$$

dan

$$f(x_3) = -1,3645$$



Solusi

- **Langkah ketiga**

- Hasil dari langkah kedua, nilai $f(x_3)$ negatif

- Persyaratan metode Regula Falsi

$$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$$

- Untuk memperoleh nilai x_4 digunakan nilai dari x_2 dan x_3 karena

$$f(x_2) \cdot f(x_3) < 0$$



Solusi

Mencari nilai x_4

$$x_4 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_3)}(x_2 - x_3) = 1,7054$$

dan

$$f(x_4) = -0,24784$$



Solusi

Iterasi selanjutnya

$$x_5 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_4)}(x_2 - x_4) = 1,72788$$

dan

$$f(x_5) = -0,03936$$



Solusi

- Penyelesaian persoalan jika dibatasi nilai errornya lebih kecil dari $x = 10^{-7}$ adalah

$$x = 1,732050806$$

dimana

$$f(x) = -1,4848 \times 10^{-8}$$

$$\text{Error} = 1,4848 \times 10^{-8}$$



Kelemahan Metode Regula Falsi

- Jika fungsi $f(x)$ mempunyai beberapa akar penyelesaian, akar tersebut tidak dapat dicari secara langsung atau bersamaan, tetapi satu persatu
- Tidak dapat mencari akar kompleks (imajiner)



Metode Iterasi Bentuk $x=g(x)$

Menyelesaikan persamaan non linear dengan merubah bentuk persamaan $f(x)$ menjadi $x = g(x)$

Syarat :

$$|g'(x_1)| < 1$$

Dimana x_1 merupakan titik yang ditentukan saat iterasi



Tahap Penyelesaian

- **Langkah pertama**

Merubah bentuk persamaan $f(x)$ menjadi bentuk $x = g(x)$

- **Langkah kedua**

- Mencari turunan $g(x)$
- Menentukan titik uji x_1
- Menguji titik uji, jika tidak sesuai syarat maka titik uji diganti



Tahap Penyelesaian

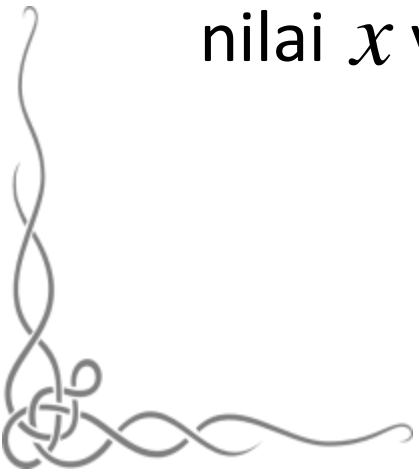
- **Langkah ketiga**

Melakukan iterasi dengan persamaan

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

dimana : $n = 1, 2, 3, \dots$

Proses iterasi dihentikan jika sudah didapatkan nilai x yang sama atau hampir sama tiap iterasi



Contoh Soal

- Carilah akar penyelesaian dari persamaan non linear dibawah ini dengan metode iterasi $x = g(x)$

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 18x - 6 = 0$$



Solusi

- **Langkah pertama**

Merubah bentuk persamaan $f(x)$ menjadi bentuk $x = g(x)$

$$x = -\frac{x^3}{18} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}$$

jadi

$$g(x) = -\frac{x^3}{18} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}$$



Solusi

- **Langkah kedua**

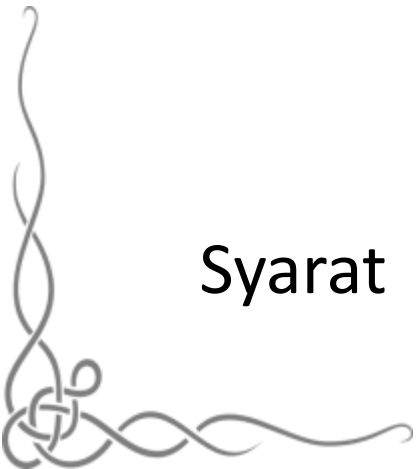
Mencari turunan $g(x)$

$$g'(x) = -\frac{x^2}{6} + x$$

Menentukan titik uji $x_1 = 0,5$

$$g'(x) = 0,458333$$

Syarat $|g'(x_1)| < 1$ (terpenuhi)




Solusi

- **Langkah ketiga**

Iterasi pertama, $n = 1$, didapatkan

$$x_2 = g(x_1) = -\frac{(x_1)^3}{18} + \frac{(x_1)^2}{2} + \frac{1}{3} = 0,451389$$

Iterasi kedua, $n = 2$, didapatkan

$$x_3 = g(x_2) = -\frac{(x_2)^3}{18} + \frac{(x_2)^2}{2} + \frac{1}{3} = 0,4301$$



Solusi

- Proses iterasi dilanjutkan sampai didapatkan nilai x yang tidak berubah atau hampir berubah
- Jika diselesaikan hingga 11 angka dibelakang koma adalah

$$x = 0.41577455835$$

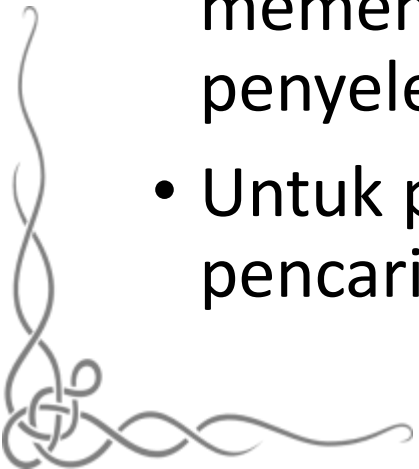
dimana :

$$f(x) = 1,7286 \times 10^{-8}$$

$$\text{Error} = 1,7286 \times 10^{-8}$$


Kelemahan Metode Iterasi Bentuk $x=g(x)$

- Jika fungsi $f(x)$ mempunyai beberapa akar penyelesaian, akar tersebut tidak dapat dicari secara langsung atau bersamaan, tetapi satu persatu
- Tidak dapat mencari akar kompleks (imajiner)
- Tidak bisa mencari akar persamaan yang tidak memenuhi persyaratan, meskipun ada akar penyelesaiannya
- Untuk persamaan non linear yang cukup kompleks, pencarian turunan $g(x)$ akan menjadi sulit



Metode Newton-Raphson

- Penyelesaian persamaan non linear dengan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Syarat :

$$\left| \frac{f(x_1) \cdot f''(x_1)}{f'(x_1) \cdot f'(x_1)} \right| < 1$$

Dimana x_1 merupakan titik yang ditentukan saat iterasi

Tahap Penyelesaian

- **Langkah pertama**

Mencari turunan pertama dan kedua dari $f(x)$

- **Langkah kedua**

- Menentukan titik uji x_1
- Menguji titik uji, jika tidak sesuai syarat maka titik uji diganti

- **Langkah ketiga**

Melakukan iterasi dengan persamaan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Contoh Soal

- Carilah akar penyelesaian dari persamaan non linear dibawah ini dengan metode Newton-Raphson

$$f(x) = e^x - 3x^2 = 0$$



Solusi

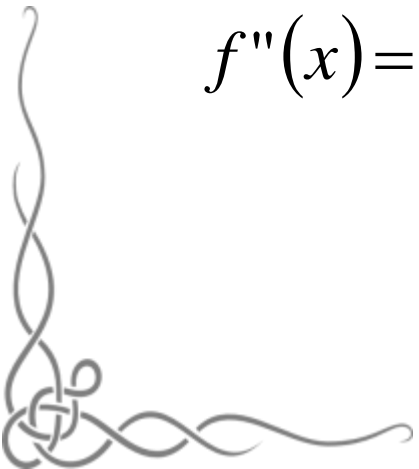
- **Langkah pertama**

Mencari turunan pertama dan kedua dari $f(x)$

$$f(x) = e^x - 3x^2 = 0$$

$$f'(x) = e^x - 6x$$

$$f''(x) = e^x - 6$$



Solusi

- **Langkah kedua**

Menentukan titik uji $x_1 = 1$

$$f(1) = e^1 - 3(1)^2 = -0,281718$$

$$f'(1) = e^1 - 6(1) = -3,281718$$

$$f''(1) = e^1 - 6 = -3,281718$$

$$\left| \frac{f(x_1) \cdot f''(x_1)}{f'(x_1) \cdot f'(x_1)} \right| = 0,085845 < 1 \quad (\text{Syarat terpenuhi})$$

Solusi

- **Langkah ketiga**

Iterasi pertama, $n = 1$, didapatkan

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,914155282$$

Iterasi kedua, $n = 2$, didapatkan

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0,910017666$$




Solusi

Iterasi ketiga, $n = 3$, didapatkan

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 0,910007573$$

Iterasi keempat, $n = 4$, didapatkan

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = 0,910007572$$



Solusi

- Proses iterasi dilanjutkan sampai didapatkan nilai x yang tidak berubah atau hampir berubah
- Jika diselesaikan diperoleh

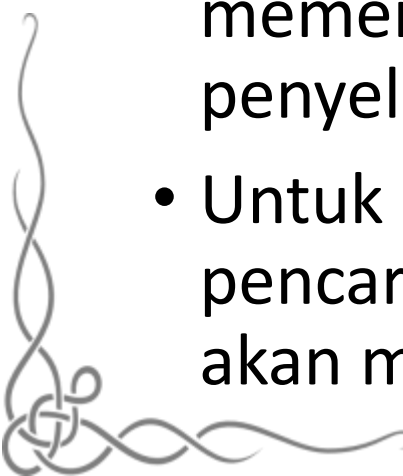
$$x = 0.910007573$$

dimana :

$$f(x) = -1,79075 \times 10^{-10}$$

$$\text{Error} = 1,79075 \times 10^{-10}$$


Kelemahan Metode Newton-Raphson

- Jika fungsi $f(x)$ mempunyai beberapa akar penyelesaian, akar tersebut tidak dapat dicari secara langsung atau bersamaan, tetapi satu persatu
 - Tidak dapat mencari akar kompleks (imajiner)
 - Tidak bisa mencari akar persamaan yang tidak memenuhi persyaratan, meskipun ada akar penyelesaiannya
 - Untuk persamaan non linear yang cukup kompleks, pencarian turunan pertama dan kedua dari $f(x)$ akan menjadi sulit
- 

Exercise

- Selesaikan persamaan non linear berikut

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$$



Tugas 02 (1 of 2)

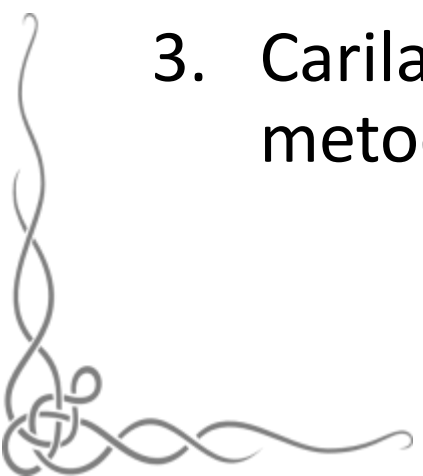
1. Carilah akar dari persamaan non linear dengan metode tabulasi (1 kali iterasi)

$$f(x) = 2 - 3x + \sin x = 0$$

2. Carilah akar dari persamaan non linear dengan metode biseksi (3 kali iterasi)

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$$

3. Carilah akar dari persamaan non linear dengan metode regula falsi (3 kali iterasi)

$$f(x) = 3x - \cos x = 0$$


Tugas 02 (2 of 2)

4. Carilah akar dari persamaan non linear dengan metode iterasi bentuk $x = g(x)$ (3 kali iterasi)

$$f(x) = e^x - 2x + 21 = 0$$

5. Carilah akar dari persamaan non linear dengan metode Newton Raphson (3 kali iterasi)

$$f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 3 = 0$$

