Deret TAYLOR

BDA & RYN, 2013

Mengapa Deret Taylor?

- Karena sebagian besar persamaan matematika terapan berbasis pada deret Taylor.
- Contoh:

  Persamaan : $y = 2x^4 - 2x + 4$

  Berapakah nilai x pada y = 5

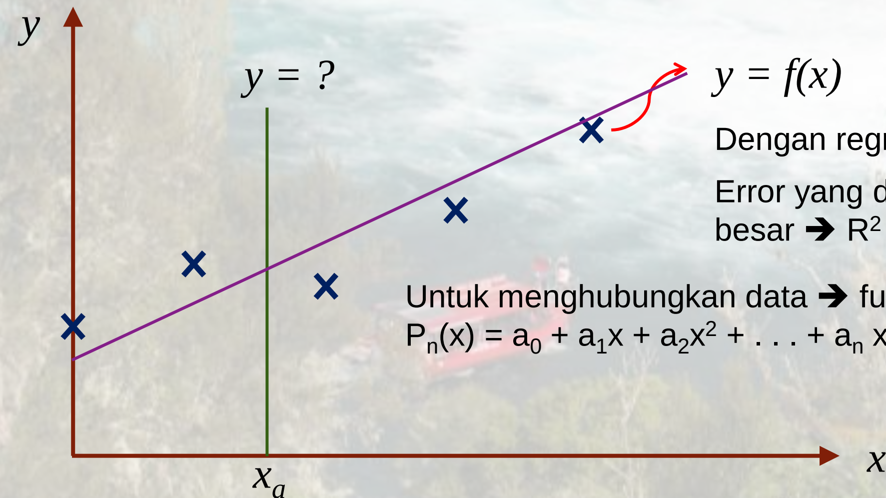
  Maka dengan memasukkan nilai y = 5

  kita dapatkan persamaan $2x^4 - 2x - 1 = 0$

  Jika kita mencari dengan akar persamaan akan sulit.

Pengantar Deret Taylor

Kita memiliki data hasil penelitian seperti pada gambar di bawah



Dengan regresi?

Error yang dihasilkan bisa besar ➔ $R^2 << 1$

Untuk menghubungkan data ➔ fungsi polinom
$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_n x^n$

Manfaat Taylor: Bisa memprediksi nilai y di sekitar x yang nilainya sudah di ketahui

Persamaan Deret Taylor 1 Variabel

$$f(x) = \underbrace{f(x_o)}_{\text{Orde 0}} + \underbrace{f'(x_o)(x - x_o)}_{\text{Orde 1}} + \frac{f''(x_o)}{2!}(x - x_o)^2$$

$$+ \frac{f'''(x_o)}{3!}(x - x_o)^3 + \cdots + \underbrace{\frac{f^n(x_o)}{n!}(x - x_o)^n}_{\text{Orde n}}$$

Kita mencari nilai y berbasis pada nilai x_0, dimana acuan x_0 di cari yang terdekat

Pembuktian Deret Taylor

y = f(x) = $2x^4 - 2x + 4$

Cari y pada x = 0.5

Maka dengan cara biasa y = f(0.5) = $2(0.5)^4 - 2(0.5) + 4 = 3.125$

Perhitungan y(0.5) dengan deret Taylor.

Basis perhitungan pada x = 0

- $y = f(x) = 2x^4 - 2x + 4$
- $f(0) = 0 - 0 + 4 = 4$
- $f'(0) = 8x^3 - 2 = -2$
- $f^{ii}(0) = 24x^2 = 0$
- $f^{iii}(0) = 48x = 0$
- $f^{iv}(0) = 48$

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x - x_o)^2 \;...$$

$$= 4 + (-2)0.5 + 0 + 0 + \frac{(0.5)^4}{24}(48) = 3.125$$

Kesimpulan: dengan Deret Taylor kita bisa menentukan nilai x

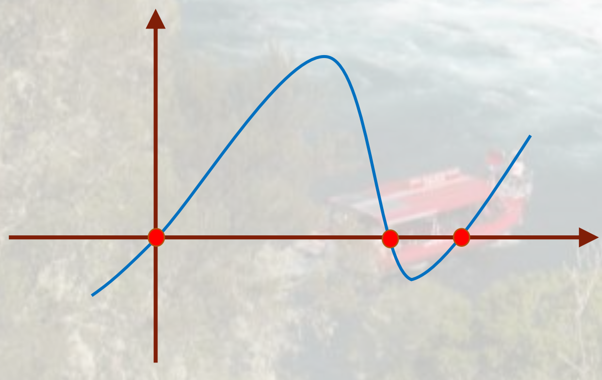
APLIKASI DERET TAYLOR

- Deret Taylor digunakan untuk Tujuan Khusus
- Contoh : Newton Raphson
  - Newton Raphson menggunakan Deret Taylor untuk menemukan akar persamaan kompleks.
  - Newton Raphson mengambil Persamaan Deret Taylor hanya sampai orde 1 saja.

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$$

Akar persamaan : nilai-nilai variabel bebas yang memenuhi nilai pada nilai variabel-variabel terikat tertentu.

Akar persamaan bisa lebih dari 1



Memiliki 3 akar persamaan pada y = 0

Misal x_o adalah akar persamaan f(x), maka dapat ditulis

$$0 = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$$

Jika $h = (x - x_o)$ maka

$$h = x - x_o = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\boxed{x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

Formula Rahpson

APLIKASI Formula Rahpson:

Iterasi 1 ➔ $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Iterasi 2 ➔ $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

Iterasi n ➔ $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$

Syarat $f'(x_0) \neq 0$ atau ∞

CONTOH:

Cari nilai x yang memenuhi y = 5 pada persamaan

$y(x) = 2x^4 - 2x + 4 = 5$

$2x^4 - 2x - 1 = 0$

$f'(x_0) = 8x^3 - 2 = 8.0 - 2$

$= -2$

$f'(x_0) \neq 0$ atau ∞

Iterasi 1:

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{2(0)^2 - 2(0) - 1}{-2} = -\frac{1}{2}$

Iterasi 2:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1}{8\left(-{}^{1}/_{2}\right)^3 - 2}$$

$$= -0.456552637$$

Untuk 2 Variabel

Formula deret Taylor 2 variabel yang ditulis sampai orde 1

$$g_1(x, y) = g_1(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}\right) h + \left(\frac{\partial g_1}{\partial y}\right) k$$

$$g_2(x, y) = g_2(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial g_2}{\partial x}\right) h + \left(\frac{\partial g_2}{\partial y}\right) k$$

$$x_1 = x_0 + h$$

$$y_1 = y_0 + k$$

Misal x_0 dan y_0 akar persamaan maka dapat dituliskan sebagai berikut:

$$g_1(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}\right) h + \left(\frac{\partial g_1}{\partial y}\right) k = 0$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial g_1}{\partial x}\right)_{x_0, y_0} h + \left(\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)_{x_0, y_0} k = -g_1(x_0, y_0)}$$

$$g_2(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial g_2}{\partial x}\right) h + \left(\frac{\partial g_2}{\partial y}\right) k = 0$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial g_2}{\partial x}\right)_{x_0, y_0} h + \left(\frac{\partial g_2}{\partial y}\right)_{x_0, y_0} k = -g_2(x_0, y_0)}$$

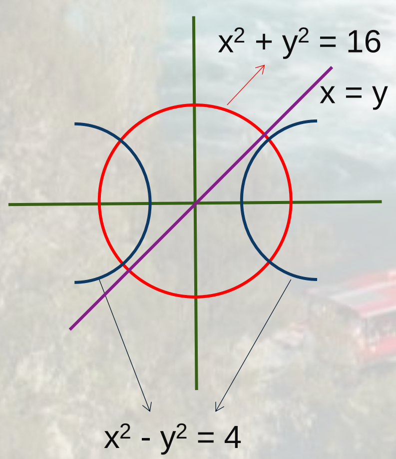
Formula tsb digunakan untuk untuk mencari h dan k, kemudian digunakan untuk menghitung x_1 dan y_1, x_0 dan y_0 harus ditentukan memenuhi syarat yang ada

CONTOH:

Tentukan titik potong 2 fungsi berikut:

$x^2 + y^2 = 16$

$x^2 - y^2 = 4$



$x_{0,}y_0 \rightarrow x^2 + y^2 = 16$

Untuk x = y

$x^2 + x^2 = 16$

$x_{12} = \pm\, 2\sqrt{2};\ y_{12} = \pm\ 2\sqrt{2}$

Persamaan 1: $x^2 + y^2 = 16$

$$\left.\frac{\partial g_1}{\partial x}\right|_{x_0,y_0} = 2x_0 + 0 - 0 = 2(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$$

$$\left.\frac{\partial g_1}{\partial y}\right|_{x_0,y_0} = 0 + 2y_0 - 0 = 2(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$$

Persamaan 2: $x^2 – y^2 = 4$

$$\left.\frac{\partial g_1}{\partial x}\right|_{x_0,y_0} = 2x_0 - 0 - 0 = 2(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$$

$$\left.\frac{\partial g_1}{\partial y}\right|_{x_0,y_0} = 0 - 2y_0 - 0 = 2(2\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$$

$$g_1(x_0, y_0) = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 16 = 0$$

$$g_1(x_0, y_0) = (2\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2})^2 - 4 = -4$$

Dari persamaan $\left(\frac{\partial g_1}{\partial x}\right)_{x_0,y_0} h + \left(\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)_{x_0,y_0} k = -g_1(x_0, y_0)$

$$(4\sqrt{2})h + (4\sqrt{2})k = 0$$

$$(4\sqrt{2})h - (4\sqrt{2})k = 4$$

$\mathrm{h} = \frac{4}{8\sqrt{2}}$, cari k, lanjutkan untuk x_1 dan y_1