Institut Teknologi Kalimantan

ELEKTRO ITK

Metode Numerik dan Teknik Komputasi

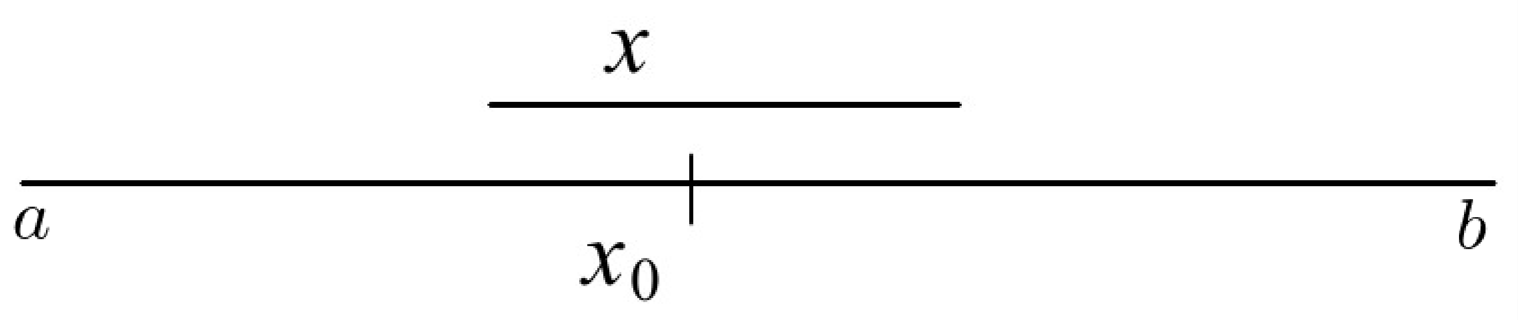
Deret Taylor dan Deret Maclaurin

Deret Taylor

- Kebanyakan dari **metode-metode numerik** yang diturunkan didasarkan pada **penghampiran fungsi** ke dalam **bentuk polinom**.
- Fungsi yang bentuknya **kompleks** menjadi **lebih sederhana** bila **dihampiri dengan polinom**, karena polinom merupakan bentuk fungsi yang paling **mudah dipahami kelakuannya**.
- Salah satu cara membuat hampiran polinom adalah **deret Taylor**

Deret Taylor

- Andaikan f dan semua turunannya, $f', f'', f''', \ldots$, dan seterusnya, di dalam selang $[a, b]$.
- Misalkan $x_0 \in [a, b]$, maka untuk nilai-nilai x di sekitar x_0 dan $x \in [a, b]$



Deret Taylor

- $f(x)$ dapat diperluas ke dalam deret Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{h^m}{m!}f''(x_0) + \ldots$$

dimana $h = x - x_0$

ELEKTRO ITK

Deret Taylor

Contoh

- Hampiri fungsi $f(x) = sin(x)$ ke dalam deret Taylor di sekitar $x_0 = 1$

Deret Taylor

Penyelesaian

- Kita harus menentukan turunan $sin(x)$ terlebih dahulu sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
f(x) &= sin(x) \\
f'(x) &= cos(x) \\
f''(x) &= -sin(x) \\
f'''(x) &= -cos(x) \\
f^{(4)}(x) &= sin(x) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Deret Taylor

Penyelesaian

- Maka, $\sin(x)$ dihampiri dengat deret Taylor sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\sin(x) &= \sin(1) + h\cos(1) - \frac{h^2}{2!}\sin(1) - \frac{h^3}{3!}\cos(1) + \frac{h^4}{4!}\sin(1) + \ldots \\
&= \sin(1) + h\cos(1) - \frac{h^2}{2 \times 1}\sin(1) - \frac{h^3}{3 \times 2 \times 1}\cos(1) \\
&\quad + \frac{h^4}{4 \times 3 \times 2 \times 1}\sin(1) + \ldots \\
&= 0.8415 + 0.5403h - 0.4208h^2 - 0.0901h^3 + 0.0351h^4 + \ldots
\end{aligned}
$$

Institut Teknologi Kalimantan

ELEKTRO ITK

Deret Maclaurin

- kasus khusus adalah bila fungsi diperluas di sekitar $x_0 = 0$, maka deretnya dinamakan **Deret Maclaurin**
- Deret Maclaurin disebut juga Deret Taylor Baku
- Kasus $x_0 = 0$ paling sering muncul dalam praktek

Institut Teknologi Kalimantan ELEKTRO ITK

Deret Maclaurin

Contoh

- Uraikan $\sin(x)$ ke dalam deret Maclaurin

Institut Teknologi Kalimantan

ELEKTRO ITK

Deret Maclaurin

Penyelesaian

- Turunan dari $\sin(x)$ sudah didapatkan dari contoh sebelumnya.
- Sehingga deret Maclaurin-nya adalah

$$\begin{aligned}\sin(x) = & \sin(0) + \frac{(x-0)}{1!}\cos(0) + \frac{(x-0)^2}{2!}(-\sin(0)) \\ & + \frac{(x-0)^3}{3!}(-\cos(0)) + \frac{(x-0)^4}{4!}\sin(0) + \frac{(x-0)^5}{5!}\cos(0) + \ldots \\ = & \, x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\end{aligned}$$

Deret Taylor Terpotong

- Karena suku-suku deret Taylor tidak berhingga banyaknya, maka deret Taylor dipotong sampai suku orde tertentu.
- Deret Taylor yang dipotong sampai suku orde ke-*n* dinamakan **Deret Taylor Terpotong** dan dinyatakan oleh:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R_n(x)$$

dimana $R_n(x)$ disebut **galat** atau **sisa** (residu)

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c), \;\; x_0 < c < x$$

Deret Taylor Terpotong

- Sehingga, Deret Taylor Terpotong sampai suku orde ke-*n* dapat ditulis sebagai

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

dimana

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c), \quad x_0 < c < x$$

$$|R_n(x)| < \max_{x_0<c<x} \left| f^{(n+1)}(c) \right| \times \frac{(x - x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

Institut Teknologi Kalimantan

ELEKTRO ITK

Deret Taylor Terpotong

Contoh

- Gunakan Deret Taylor orde 4 di sekitar $x_0 = 1$ untuk menghampiri $\ln(0.9)$ dan berikan taksiran untuk galat pemotongan maksimum yang dibuat.

Institut Teknologi Kalimantan

ELEKTRO ITK

Deret Taylor Terpotong

Penyelesaian

- Tentukan turunan fungsi $f(x) = \ln(x)$ terlebih dahulu

$$f(x) = \ln(x) \rightarrow f(1) = 0 \qquad f'''(x) = \frac{2}{x^3} \rightarrow f'''(1) = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(1) = 1 \qquad f^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4} \rightarrow f^{(4)}(1) = -6$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} \rightarrow f''(1) = -1 \qquad f^{(5)}(x) = \frac{24}{x^5} \rightarrow f^{(5)}(c) = \frac{24}{c^5}$$

Institut Teknologi Kalimantan

ELEKTRO ITK

Deret Taylor Terpotong

Penyelesaian

- Deret Taylornya adalah

$$
\begin{aligned}
\ln(x) =& \ln(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) \\
&+ \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{(x-x_0)4}{3!} f^{(4)}(x_0) + R_4(x) \\
\ln(x) =& (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + R_4(x)
\end{aligned}
$$

Deret Taylor Terpotong

Penyelesaian

- Dan galatnya

$$|R_n(0.9)| < \max_{0.9<c<1} \left| \frac{24}{c^5} \right| \times \frac{(-0.1)^5}{5!}$$

- nilai maksimum dicapai dalam rentang yang diketahui saat c = 0.9, sehingga

$$|R_n(0.9)| < \max_{0.9<c<1} \left| \frac{24}{0.9^5} \right| \times \frac{(-0.1)^5}{5!} \approx 0.0000034$$

Deret Taylor Terpotong

- Jadi, ln(0.9) = -0.1054 dengan galat pemotongan lebih kecil dari 0.0000034

Deret Maclaurin Terpotong

- Deret Taylor terpotong di sekitar $x_0 = 0$ disebut **Deret Maclaurin Terpotong**
- Berdasarkan contoh Deret Maclaurin sebelumnya, maka

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!};\ \ R_5(x) = \frac{x^6}{6!}\cos(c),\ \ 0 < c < x$$

ELEKTRO ITK