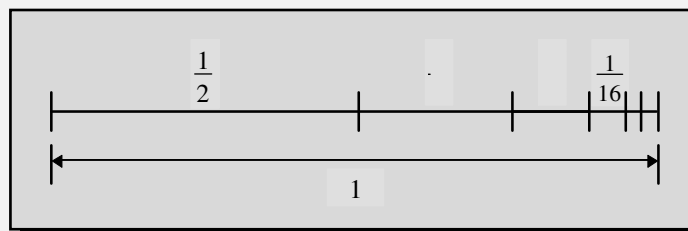


## II. DERET TAKBERHINGGA

### II.A. PENDAHULUAN

Perhatikan suatu ruas jarak yang panjangnya 1 km. Ruas jarak ini dapat dibagi menjadi  $\frac{1}{2}$  km,  $\frac{1}{4}$  km,  $\frac{1}{8}$  km,  $\frac{1}{16}$  km dan seterusnya (lihat Gambar II.1). Dalam bahasa matematika jarak 1 km tersebut dapat dinyatakan dalam jumlah berikut,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$



Gambar II.1

Suku-suku dalam penjumlahan di atas banyaknya takberhingga, karena itu kita perlu mendefinisikan dahulu jumlah takberhingga tersebut.

Perhatikanlah jumlah parsial berikut,

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

⋮

⋮

⋮

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

Jumlah parsial ke- $n$  ini ( $S_n$ ) dapat ditentukan rumus eksplisitnya dengan cara sebagai berikut, kalikan  $S_n$  dengan setengah ( $\frac{1}{2} S_n$ ), kemudian  $S_n$  dikurang dengan  $\frac{1}{2} S_n$  ini. Hasilnya adalah,

$$\text{Jumlah parsial ke- } n : S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \quad (i)$$

$$\text{Kalikan (i) dengan } \frac{1}{2} : \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \quad (ii)$$

Kurangkan (i) dengan (ii)  $S_n - \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$  (iii)

Persamaan (iii) dapat dituliskan kembali menjadi,

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

atau

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Jumlah-jumlah parsial ini jelas akan semakin mendekati 1. Tepatnya,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

Limit ini didefinisikan sebagai jumlah takberhingga tersebut.

Perhatikan hal yang lebih umum,

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

Penjumlahan ini dapat dituliskan dalam bentuk,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ atau } \sum a_k$$

Bentuk ini dinamakan deret takberhingga (atau deret saja). Jumlah parsial ke- $n$  dari deret ini yaitu  $S_n$  adalah,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Untuk lebih jelas, di bawah ini diberikan definisi formalnya.

**Definisi :** Deret takberhingga  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$  dikatakan **konvergen** dan mempunyai jumlah  $S$ , apabila barisan jumlah-jumlah parsial  $\{S_n\}$  konvergen menuju  $S$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ). Apabila  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  tidak ada, maka deret dikatakan **divergen** (deret yang divergen tidak memiliki jumlah).

### Contoh II.1

Periksa apakah deret  $\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$  konvergen atau divergen.

Jika konvergen tentukanlah jumlahnya

**Jawab :**

Jumlah parsial ke- $n$  :  $S_n = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Kalikan  $S_n$  dengan  $\frac{2}{3}$  :  $\frac{2}{3}S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

Kurangkan :  $S_n - \frac{2}{3}S_n = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

Dari persamaan terakhir diperoleh,

$$\frac{1}{3}S_n = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \frac{2}{3} \left[ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$$

atau 
$$S_n = 2 \left[ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left[ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] = 2 \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$$

Dari Contoh 1.5 diperlihatkan bahwa untuk  $-1 < r < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ . Dalam contoh di atas,

$r = \frac{2}{3}$ , oleh karena itu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ . Jadi  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2[1 + 0] = 2$

Oleh karena  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  ada, maka deret di atas konvergen dan jumlahnya adalah 2.

Akan dibicarakan nanti bahwa deret semacam ini dinamakan *deret geometrik*.

## II.B. DERET-DERET KHUSUS

### a. Deret Geometrik

Suatu deret takberhingga yang berbentuk,

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

dengan  $a \neq 0$  dinamakan *deret geometrik* atau kadangkala dinamakan juga *deret ukur*. Akan kita buktikan dalam Contoh II.2 di bawah ini bahwa deret geometrik konvergen dengan jumlah  $S = \frac{a}{(1-r)}$  jika  $|r| < 1$  dan divergen jika  $|r| \geq 1$ .

### Contoh II.2

Buktikan bahwa deret geometrik konvergen dengan jumlah  $S = \frac{a}{(1-r)}$  jika  $|r| < 1$  dan divergen jika  $|r| \geq 1$ .

#### Bukti

Misalkan 
$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} \quad (i)$$

Kalikan (i) dengan  $r$  
$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \quad (ii)$$

Kurangkan (i) dengan (ii) 
$$(1-r)S_n = a - ar^n$$

atau 
$$S_n = \frac{a - ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} r^n$$

Jika  $|r| < 1$  maka 
$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} r^n \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a}{1-r} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a}{1-r} r^n \right) = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \lim_{n \rightarrow \infty} r^n$$

Dari Contoh 1.5 diketahui bahwa jika  $|r| < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ , oleh karena itu diperoleh,

$$S = \frac{a}{1-r}$$

Akibatnya deret geometrik konvergen.

Jika  $|r| \geq 1$ , jumlah deret yaitu  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  tidak ada karena dari Contoh 1.5 diperoleh bahwa  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$ , jadi deret geometrik divergen.

### Contoh II.3

Tentukanlah jumlah deret geometrik berikut,

a)  $\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{81} \dots$       b)  $0,333333 \dots$

**Jawab :**

Dari Contoh II.1 diperoleh bahwa jumlah deret geometrik adalah  $S = \frac{a}{1-r}$

a)  $\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{81} \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3} \left( \frac{1}{3} \right)^{k-1}$

Untuk deret ini  $a = \frac{4}{3}$  dan  $ar = \frac{4}{9}$ . Dari harga  $ar$  ini selanjutnya dapat ditentukan  $r$  yaitu  $r = \left( \frac{4}{9} \right) / \left( \frac{4}{3} \right) = \left( \frac{4}{9} \right) \left( \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{3}$ . Karena  $-1 < r < 1$ , maka deret konvergen dan jumlahnya adalah,

$$S = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2$$

b)  $0,333333 \dots = \frac{33}{100} + \frac{33}{10.000} + \frac{33}{1.000.000} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{33}{100} \left( \frac{1}{100} \right)^{k-1}$

Untuk deret ini  $a = \frac{33}{100}$  dan  $ar = \frac{33}{10.000}$ . Dari harga  $ar$  selanjutnya dapat ditentukan  $r$  yaitu,  $r = \left( \frac{33}{10.000} \right) / \left( \frac{33}{100} \right) = \left( \frac{33}{10.000} \right) \left( \frac{100}{33} \right) = \frac{1}{100}$ . Karena  $-1 < r < 1$ , maka deret konvergen dan jumlahnya adalah,

$$S = \frac{\frac{33}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{33}{100}}{\frac{99}{100}} = \left( \frac{33}{100} \right) \left( \frac{100}{99} \right) = \frac{33}{99} = \frac{1}{3}$$

### Contoh II.4

Dua orang anak membagi sebuah apel seperti berikut. Pertama apel tersebut dibagi menjadi tiga bagian, dan tiap anak memperoleh sepertiga bagian. Sepetiga bagian yang tersisa

kemudian dibagi tiga lagi dan setiap anak mendapat sepertiga bagian dan seterusnya. Berapa bagian apelkah yang diperoleh setiap anak ?

**Jawab :**

Buah apel pertama dibagi tiga, jadi setiap orang mendapat satu pertiga bagian. Sepertiga bagian sisanya kemudian dibagi tiga lagi dan setiap orang mendapat tambahan  $\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$  bagian. Sepersembilan bagian sisanya kemudian dibagi tiga lagi dan setiap orang mendapat tambahan  $\frac{1}{9} = \frac{1}{27}$  bagian dan seterusnya. Jadi setiap orang akan menerima apel sebanyak,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots \text{ bagian}$$

Penjumlahan ini merupakan deret geometrik dengan  $a = \frac{1}{3}$  dan  $r = \frac{1}{3}$ . Jadi jumlah deret tersebut adalah,

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

Jadi setiap orang akan mendapat setengah bagian apel.

Kita tinjau kembali deret geometrik berikut,  $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$ . Suku ke- $n$  dari deret ini adalah  $a_n = ar^{n-1}$ . Dari Contoh II.1 dapat kita lihat bahwa suatu deret geometrik akan konvergen jika dan hanya jika  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Yang menjadi pertanyaan sekarang adalah, apakah sifat ini berlaku bagi semua deret ? Jawabannya tidak, walaupun sebagian sifat tersebut benar. Hal ini diperlihatkan dalam teorema berikut.

**Teorema II.1 (Uji Kedivergenan dengan Suku ke- $n$ )**

Jika  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergen, maka  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Setara dengan pernyataan ini adalah, jika  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  (atau  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  tidak ada), maka deret divergen.

**Bukti :**

Karena  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  maka jumlah parsial ke- $n$  adalah,

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad (i)$$

dan jumlah parsial ke- $(n-1)$  adalah,

$$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} \quad (ii)$$

Apabila kita kurang (i) dengan (ii) maka diperoleh,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

Jika deret-deret tersebut konvergen ke  $S$  ( $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ), maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

### Contoh II.5

Tentukanlah apakah deret-deret berikut konvergen atau divergen.

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - 3}{5k^3} \quad b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3k^3 + 2k^2}$$

**Jawab :**

a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - 3}{5k^3}$ . Suku ke- $n$  deret ini adalah  $a_n = \frac{n^2 - 3}{5n^3}$ . Jadi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3}{5n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{3}{n^3}}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

Karena  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  maka pengujian tidak memberikan kepastian. Jadi menurut Teorema II.1, deret tidak diketahui dengan pasti apakah konvergen atau divergen.

b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3k^3 + 2k^2}$ . Suku ke- $n$  deret ini adalah  $a_n = \frac{n^3}{3n^3 + 2n^2}$ . Jadi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{3n^3 + 2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{3 - 0} = \frac{1}{3}$$

Karena  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  maka menurut Teorema II.1, deret divergen.

### b. Deret Harmonik

Sebuah deret takberhingga yang berbentuk,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

dinamakan **deret harmonik**. Deret harmonik ini dapat membuktikan bahwa Teorema II.1 tidak dapat dibalik menjadi: Jika  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergen. Karena meskipun limit suku ke- $n$  deret ini yaitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  namun deret harmonik tidak konvergen, melainkan divergen, buktinya dapat dilihat dalam Contoh II.6.

### Contoh II.6

Buktikan bahwa deret harmonik  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$  divergen.

**Bukti:**

Akan kita buktikan bahwa  $S_n$  melampaui setiap batas apabila  $n$  membesar tanpa batas.

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots + \frac{1}{n} \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \dots + \frac{1}{n} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \dots + \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Dengan membuat  $n$  cukup besar, maka dalam persamaan terakhir, kita dapat mengambil  $\frac{1}{2}$  sebanyak yang kita kehendaki. Jadi  $\{S_n\}$  divergen, sehingga deret Harmonik adalah divergen.

### c. Deret Kolaps (Deret Teleskopis)

Sampai saat ini kita telah mengetahui bahwa deret geometrik adalah salah satu deret yang dapat ditentukan jumlah parsial ke- $n$ -nya ( $S_n$ ). Deret lainnya yang juga dapat ditentukan jumlah parsial ke- $n$ -nya adalah **deret kolaps** atau disebut juga **deret teleskopis**. Deret kolaps mempunyai bentuk sebagai berikut,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \dots$$

Jumlah parsial ke- $n$  dari deret ini adalah,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_n - a_{n+1}) \\
&= a_1 - a_{n+1}
\end{aligned}$$

### Contoh II.7.

Buktikan bahwa deret kolaps berikut konvergen, dan tentukan jumlahnya.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

**Jawab :**

Gunakan penguraian fraksial untuk menuliskan  $a_k$  seperti berikut,

$$a_k = \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{(k+3) - (k+2)}{(k+2)(k+3)} = \frac{(k+3)}{(k+2)(k+3)} - \frac{(k+2)}{(k+2)(k+3)} = \frac{1}{(k+2)} - \frac{1}{(k+3)}$$

Jadi,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{(k+2)} - \frac{1}{(k+3)} \right] \\
&= \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\
&= \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \right)
\end{aligned}$$

Jumlah deret adalah,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Jadi deret konvergen dengan jumlah  $\frac{1}{3}$

### Contoh II.8

Periksa apakah deret  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$  konvergen atau divergen. Jika konvergen tentukanlah jumlahnya.

**Jawab :**

$$a_k = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{(2k+1) - (2k-1)}{(2k-1)(2k+1)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{(2k+1)}{(2k-1)(2k+1)} - \frac{(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right)$$

Karena  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \right] = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2}$ , maka deret konvergen dan jumlahnya sama dengan  $\frac{1}{2}$ .

## II.C. SIFAT-SIFAT DERET KONVERGEN

Deret konvergen mempunyai perilaku yang sama dengan jumlah yang takberhingga seperti dinyatakan dalam teorema di bawah ini.

### Teorema II.2 (Kelinieran)

Jika deret  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  dan  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  keduanya konvergen dan  $c$  adalah sebuah konstanta, maka

$\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$  dan  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$  juga konvergen. Selain itu,

❶  $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

❷  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

**Bukti :**



Teorema ini memberikan gambaran yang agak berbeda. Lambang (simbol)  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  dalam teorema di atas digunakan baik untuk deret takberhingga  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ , maupun untuk jumlah deret itu sendiri yang berupa bilangan.

Karena  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  dan  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  keduanya konvergen maka  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$  dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k$  keduanya ada. Dengan menggunakan sifat penjumlahan dengan suku-suku berhingga dan sifat limit, diperoleh

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \sum_{k=1}^{\infty} ca_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n ca_k = \lim_{n \rightarrow \infty} c \sum_{k=1}^n a_k \\ &= c \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k \\ \textcircled{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \end{aligned}$$

### Contoh II.9

Hitunglah  $\sum_{k=1}^{\infty} \left[ 5 \left( \frac{1}{6} \right)^k - 2 \left( \frac{1}{4} \right)^k \right]$

**Jawab :**

Dari Teorema II.2 diperoleh ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ 5 \left( \frac{1}{6} \right)^k - 2 \left( \frac{1}{4} \right)^k \right] &= \sum_{k=1}^{\infty} 5 \left( \frac{1}{6} \right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \left( \frac{1}{4} \right)^k \\ &= 5 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{6} \right)^k - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{4} \right)^k \end{aligned} \quad (i)$$

Kita uraikan satu persatu deret dalam persamaan di atas.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{6} \right)^k = \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{216} + \dots$$

Deret ini adalah deret geometrik dengan  $a = \frac{1}{6}$  dan  $r = \frac{1}{6}$ , jadi jumlah deret ini adalah,

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = \left( \frac{1}{6} \right) \left( \frac{6}{5} \right) = \frac{1}{5} \quad (ii)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{4} \right)^k = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$

Deret ini adalah deret geometrik dengan  $a = \frac{1}{4}$  dan  $r = \frac{1}{4}$ , jadi jumlah deret ini adalah,

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \left( \frac{1}{4} \right) \left( \frac{4}{3} \right) = \frac{1}{3} \quad (iii)$$

Masukan hasil persamaan (ii) dan (iii) ke persamaan (i) diperoleh,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ 5 \left( \frac{1}{6} \right)^k - 2 \left( \frac{1}{4} \right)^k \right] = 5 \left( \frac{1}{5} \right) - 2 \left( \frac{1}{3} \right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

### Teorema II.3

Jika  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  divergen dan  $c \neq 0$ , maka  $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$  juga divergen

**Bukti :**

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  divergen, berarti  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$  tidak ada. Dari Teorema II.2, dan sifat-sifat limit, diperoleh,

$$\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n ca_k = \lim_{n \rightarrow \infty} c \sum_{k=1}^n a_k = c \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

Oleh karena  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$  tidak ada,  $c \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$  juga tidak ada, artinya  $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$  divergen.

### Contoh II.10

Buktikanlah bahwa  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5k}$  adalah divergen

**Bukti:**

Karena  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  adalah deret harmonik, dan kita ketahui bahwa deret harmonik adalah divergen, maka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

juga divergen.

Dalam suatu jumlah berhingga, kita dapat mengelompokkan suku-sukunya dengan menggunakan hukum asosiatif penjumlahan sesuai dengan yang kita inginkan, misalnya

$$2 + 7 + 3 + 4 + 5 = (2 + 7) + (3 + 4) + 5 = 2 + (7 + 3) + (4 + 5)$$

Hukum asosiatif ini tidak berlaku lagi pada jumlah yang suku-sukunya takberhingga banyaknya. Sebagai contoh perhatikan pengelompokan pada deret takberhingga berikut.

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$$

Pengelompokan pertama,

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

Pengelompokan kedua,

$$1 - (1 + 1) - (1 + 1) - (1 + 1) \dots = 1 - 0 - 0 - 0 \dots = 1$$

Deret semula adalah deret yang divergen karena  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ . Setelah dikelompokkan dengan cara pertama, deret menjadi konvergen dengan jumlah 0, dan setelah dikelompokkan dengan cara kedua, deret juga konvergen tetapi dengan jumlah 1.

Untuk deret yang semula konvergen, pertentangan hasil seperti di atas tidak akan terjadi, karena deret yang asalnya konvergen dikelompokkan bagaimanapun akan tetap konvergen seperti yang dinyatakan dalam teorema berikut.

**Teorema II.4 (Pengelompokan)**

Suku-suku sebuah deret yang konvergen, dapat dikelompokkan secara sebarang (asalkan urutan suku-suku tidak berubah), dan deret baru hasil pengelompokan itu akan tetap konvergen dan jumlahnya tetap sama dengan jumlah deret semula.

**Bukti :**

Andaikan  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  adalah deret yang konvergen, dan andaikan  $\{S_n\}$  adalah barisan jumlah parsial deret tersebut. Apabila  $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$  adalah deret yang diperoleh dari pengelompokan suku-suku deret  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  dan andaikan  $\{T_m\}$  barisan jumlah-jumlah parsialnya, maka setiap  $T_m$  adalah salah satu dari  $S_n$ . Sebagai contoh,

$$T_4 = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8)$$

dalam hal ini  $T_4 = S_8$ . Jadi  $\{T_m\}$  adalah bagian barisan  $\{S_n\}$ . Sehingga apabila  $S_n \rightarrow S$ , maka  $T_m \rightarrow S$  juga.

**II.D. SOAL LATIHAN**

Dalam soal 1 – 20, periksalah apakah deret-deret tersebut konvergen atau divergen. Jika konvergen, tentukan jumlahnya.

1.  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k$

2.  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

3.  $\sum_{k=1}^{\infty} \left[2\left(\frac{1}{3}\right)^k + 3\left(\frac{1}{6}\right)^k\right]$

4.  $\sum_{k=1}^{\infty} \left[3\left(\frac{1}{4}\right)^k - 2\left(\frac{1}{5}\right)^k\right]$

5.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-3}{k}$

6.  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k$

7.  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

8.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}$

9.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{10^k}$

10.  $\sum_{k=3}^{\infty} \left[\frac{2}{k-1} - \frac{2}{k}\right]$

11.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{5^{k-1}}$

12.  $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{4}{k-3}$

13.  $\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^{k-1}$

14.  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

$$15. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{k-1}}$$

$$17. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2 + k}}$$

$$19. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{6^k}$$

$$16. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1}$$

$$18. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

$$20. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

Dalam soal 21 – 26, tuliskan bilangan desimal menjadi bentuk deret takberhingga. Kemudian tentukanlah jumlah deret tersebut.

$$21. 0,22222 \dots$$

$$22. 0,125125125 \dots$$

$$23. 0,21212121 \dots$$

$$24. 0,013013013 \dots$$

25. Buktikan bahwa deret  $\frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 15} + \frac{1}{15 \cdot 19} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-1)(4k+3)}$  konvergen dan tentukanlah jumlahnya.

26. Carilah jumlah deret  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$

27. Buktikan bahwa deret  $\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k$  divergen.

28. Buktikan bahwa  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

29. Buktikan bahwa deret  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}$

30. Hitunglah  $\sum_{k=0}^{\infty} r(1-r)^k$ ,  $0 < r < 2$

31. Buktikan bahwa  $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{k}{k+1}$  divergen

32. Buktikan bahwa  $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -\ln 2$

33. Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian 100 meter. Setiap kali bola tersebut mengenai lantai, bola tersebut dipantulkan kembali setinggi  $\frac{2}{3}$  dari tinggi sebelumnya. Tentukan jarak seluruhnya yang ditempuh bola tersebut.

34. Tiga orang yaitu si A, si B dan si C membagi sebuah apel seperti berikut. Pertama apel tersebut dibagi menjadi empat bagian, dan tiap-tiap orang memperoleh seperempat bagian. Seperempat bagian yang tersisa kemudian dibagi empat lagi dan setiap orang

mendapat seperempat bagian dan seterusnya. Berapa bagian apelkah yang diperoleh setiap orang.