Modul 2
Penyelesaian Akar-Akar Persamaan Karakteristik

Pengantar

- Persamaan karakteristik yang biasa dijumpai

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

- Penyelesaiannya

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Bagaimana dengan orde tinggi atau penyelesaian polynomial??

Pengantar

Persamaan orde tinggi & persamaan non linear

$$x^4 - 1{,}1x^3 + 2{,}3x^2 + 0{,}5x - 3{,}3 = 0$$

$$3x + \sin x - e^x = 0$$

$$x^2 \ln x - 1 + x^2 = 0$$

Penyelesaian dengan metode numerik

Penyelesaian Non Linear

1. Metode Tabulasi
2. Metode Biseksi
3. Metode Regula Falsi
4. Metode Iterasi Bentuk $x = g(x)$
5. Metode Newton-Raphson

Metode Tabulasi

- Metode penyelesaian persamaan non linear dengan cara membuat tabel-tabel persamaan atau fungsi nonlinear di sekitar titik penyelesaiannya
- Metode yang **paling sederhana** untuk menyelesaikan persamaan non linear
- **Paling sederhana** karena tidak ada persamaan khusus dalam penyelesaian persamaan non linear

Tahap Penyelesaian

- **Langkah pertama**

  Menentukan dua titik awal fungsi $f(x)$

$$\boxed{f(x_1)\cdot f(x_2)<0}$$

- **Langkah kedua**

  Membuat tabel fungsi $f(x)$ antara $f(x_1)$ dan $f(x_2)$

Tahap Penyelesaian

- **Langkah ketiga**

  Membuat tabel di sekitar dua titik x yang menyebabkan perubahan tanda pada fungsi $f(x)$

- **Langkah keempat** dan seterusnya sama dengan langkah ketiga

Contoh

- Carilah akar penyelesaian dari persamaan non linear dibawah ini dengan metode tabulasi

$$f(x) = 2 - 5x + \sin x = 0$$

Solusi

- **Langkah pertama**

Misalnya diambil

$$f(x_1) = f(0) = 2 - 5(0) + \sin 0 = 2$$

$$f(x_2) = f(1) = 2 - 5(1) + \sin 1 = -2{,}15853$$

karena $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$

Maka, titik penyelesaiannya berada diantara $x = 0$ dan $x = 1$

Solusi

- **Langkah kedua**

  Membuat tabel fungsi $f(x)$ disekitar $f(x_1)$ dan $f(x_2)$

HASILNYA ...

Solusi

x	$f(x)$	$\lvert f(x) \rvert$
0	2	2
0,1	1.59983	1.59983
0,2	1,19867	1,19867
0,3	0,79552	0,79552
0,4	0,38942	0,38942
0,5	-0,20574	0,20574
0,6	-0,43536	0,43536
0,7	-0,85578	0,85578
0,8	-1,28264	1,28264
0,9	-1,71667	1,71667
1	-2,15853	2,15853

Solusi

- **Langkah ketiga**

  Membuat tabel disekitar dua titik yang menyebabkan perubahan tanda fungsi $f(x)$

HASILNYA …

Solusi

x	$f(x)$	$\lvert f(x) \rvert$
0	2	2
0,1	1.59983	1.59983
0,2	1,19867	1,19867
0,3	0,79552	0,79552
0,4	0,38942	0,38942
0,5	-0,20574	0,20574
0,6	-0,43536	0,43536
0,7	-0,85578	0,85578
0,8	-1,28264	1,28264
0,9	-1,71667	1,71667
1	-2,15853	2,15853

Solusi

- Nilai error terkecil adalah 0,20574
- Perubahan tanda pada $f(x)$ disekitar $f(0{,}4)$ dan $f(0{,}5)$
- Akar penyelesaian berada di titik $x = 0{,}4$ dan $x = 0{,}5$
- **Langkah keempat**

  Mengulangi langkah ketiga dst

HASILNYA ...

Solusi

x	$f(x)$	$\lvert f(x) \rvert$
0,4	0,38942	0,38942
0,41	0,34861	0,34861
0,42	0,30776	0,30776
0,43	0,26687	0,26687
0,44	0,22594	0,22594
0,45	0,18497	0,18497
0,46	0,14395	0,14395
0,47	0,10289	0,10289
0,48	0,06178	0,06178
0,49	0,02163	0,02163
0,5	-0,20574	0,20574

Solusi

- Nilai error terkecil adalah 0,02163
- Akar penyelesaian berada di titik $x = 0{,}49$ dan $x = 0{,}5$

Penyelesaian persoalan jika dibatasi nilai errornya lebih kecil dari $x = 10^{-7}$ adalah

$$x = 0{,}49500768$$

Dimana $f(x) = 9{,}4 \times 10^{-9}$ (error)

Kelemahan Metode Tabulasi

- Jika fungsi $f(x)$ mempunyai beberapa akar penyelesaian, akar tersebut tidak dapat dicari secara langsung atau bersamaan, tetapi satu persatu
- Tidak dapat mencari akar kompleks (imajiner)
- Proses iterasinya relatif lambat

Metode Biseksi

- Disebut juga metode **Pembagian Interval** atau metode **Bolzano**
- Untuk mencari akar-akar persamaan non linear dengan proses iterasi , sesuai dengan rumus :

$$\boxed{x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

- Dimana nilai $f(x_1)$ dan $f(x_2)$ harus memenuhi persyaratan:

$$\boxed{f(x_1) \cdot f(x_2) < 0}$$

Tahap Penyelesaian

- **Langkah pertama**

  Menentukan dua titik awal fungsi $f(x)$

  $$\boxed{f(x_1)\cdot f(x_2) < 0}$$

- **Langkah kedua**

  Mencari nilai x_3 dengan $$\boxed{x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

  Mencari nilai $f(x_3)$

- **Langkah ketiga**

  Melakukan iterasi untuk memperoleh akar penyelesaian

Contoh Soal

- Carilah akar penyelesaian dari persamaan non linear dibawah ini dengan metode Biseksi

$$f(x) = x^3 - 7x + 1$$

Solusi

- **Langkah pertama**

Misalnya diambil

$$f(x_1) = f(2{,}6) = (2{,}6)^3 - 7(2{,}6) + 1 = 0{,}376$$

$$f(x_2) = f(2{,}5) = (2{,}5)^3 - 7(2{,}5) + 1 = -0{,}875$$

karena $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$

Maka, titik penyelesaiannya berada diantara $x = 2{,}5$ dan $x = 2{,}6$

Solusi

- **Langkah kedua**

  Mencari nilai x_3

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2,6 + 2,5}{2} = 2,55$$

dan

$$f(x_3) = f(2,55) = (2,55)^3 - 7(2,55) + 1 = -0,268625$$

Solusi

- **Langkah ketiga**
  - Hasil dari langkah kedua, nilai $f(x_3)$ negatif
  - Persyaratan metode Biseksi $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$
  - Untuk memperoleh nilai x_4 digunakan nilai dari x_1 dan x_3 karena

$$f(x_1)\cdot f(x_3)<0$$

Solusi

Mencari nilai x_4

$$x_4 = \frac{x_1 + x_3}{2} = \frac{2{,}6 + 2{,}55}{2} = 2{,}575$$

dan

$$f(x_4) = f(2{,}575) = (2{,}575)^3 - 7(2{,}575) + 1 = 0{,}04886$$

Solusi

Iterasi selanjutnya

$$x_5 = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{2{,}55 + 2{,}575}{2} = 2{,}5625$$

dan

$$f(x_5) = f(2{,}5625) = (2{,}5625)^3 - 7(2{,}5625) + 1 = -0{,}111084$$

Solusi

- Penyelesaian persoalan jika dibatasi nilai errornya lebih kecil dari $x = 10^{-7}$ adalah

$$x = 2{,}5712014198$$

dimana

$$f(x) = -3{,}472 \times 10^{-8}$$

Error = $3{,}472 \times 10^{-8}$

Kelemahan Metode Biseksi

- Jika fungsi $f(x)$ mempunyai beberapa akar penyelesaian, akar tersebut tidak dapat dicari secara langsung atau bersamaan, tetapi satu persatu
- Tidak dapat mencari akar kompleks (imajiner)
- Proses iterasinya relatif lambat

Metode Regula Falsi

- Disebut juga metode **Interpolasi Linear**
- Memperoleh akar persamaan non linear dengan

$$\boxed{x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)}(x_2 - x_1)}$$

- Dimana nilai $f(x_1)$ dan $f(x_2)$ harus memenuhi persyaratan:

$$\boxed{f(x_1) \cdot f(x_2) < 0}$$

Tahap Penyelesaian

- **Langkah pertama**

  Menentukan dua titik awal fungsi $f(x)$

$$\boxed{f(x_1)\cdot f(x_2)<0}$$

- **Langkah kedua**

  Mencari nilai x_3

$$\boxed{x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2)-f(x_1)}(x_2 - x_1)}$$

  Mencari nilai $f(x_3)$

- **Langkah ketiga**

  Melakukan iterasi untuk memperoleh akar penyelesaian

Contoh Soal

- Carilah akar penyelesaian dari persamaan non linear dibawah ini dengan metode Regula Falsi

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$$

Solusi

- **Langkah pertama**

Misalnya diambil

$$f(x_1) = f(1) = (1)^3 + (1)^2 - 3(1) - 3 = -4$$
$$f(x_2) = f(2) = (2)^3 + (2)^2 - 3(2) - 3 = 3$$

karena $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$

Maka, titik penyelesaiannya berada diantara

$x = 1$ dan $x = 2$

Solusi

- **Langkah kedua**

  Mencari nilai x_3

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)}(x_2 - x_1) = 1{,}57142$$

dan

$$f(x_3) = -1{,}3645$$

Solusi

- **Langkah ketiga**
  - Hasil dari langkah kedua, nilai $f(x_3)$ negatif
  - Persyaratan metode Regula Falsi

$$f(x_1)\cdot f(x_2) < 0$$

  - Untuk memperoleh nilai x_4 digunakan nilai dari x_2 dan x_3 karena

$$f(x_2)\cdot f(x_3) < 0$$

Solusi

Mencari nilai x_4

$$x_4 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_3)}(x_2 - x_3) = 1{,}7054$$

dan

$$f(x_4) = -0{,}24784$$

Solusi

Iterasi selanjutnya

$$x_5 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_4)}(x_2 - x_4) = 1{,}72788$$

dan

$$f(x_5) = -0{,}03936$$

Solusi

- Penyelesaian persoalan jika dibatasi nilai errornya lebih kecil dari $x = 10^{-7}$ adalah

$$x = 1{,}732050806$$

dimana

$$f(x) = -1{,}4848 \times 10^{-8}$$

Error = $1{,}4848 \times 10^{-8}$

Kelemahan Metode Regula Falsi

- Jika fungsi $f(x)$ mempunyai beberapa akar penyelesaian, akar tersebut tidak dapat dicari secara langsung atau bersamaan, tetapi satu persatu
- Tidak dapat mencari akar kompleks (imajiner)

Metode Iterasi Bentuk x=g(x)

Menyelesaikan persamaan non linear dengan merubah bentuk persamaan $f(x)$ menjadi $x = g(x)$

Syarat :

$$|g'(x_1)| < 1$$

Dimana x_1 merupakan titik yang ditentukan saat iterasi

Tahap Penyelesaian

- **Langkah pertama**

  Merubah bentuk persamaan $f(x)$ menjadi bentuk $x = g(x)$

- **Langkah kedua**
  - Mencari turunan $g(x)$
  - Menentukan titik uji x_1
  - Menguji titik uji, jika tidak sesuai syarat maka titik uji diganti

Tahap Penyelesaian

- **Langkah ketiga**

  Melakukan iterasi dengan persamaan

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

  dimana : $n = 1, 2, 3, \ldots$

  Proses iterasi dihentikan jika sudah didapatkan nilai x yang sama atau hampir sama tiap iterasi

Contoh Soal

- Carilah akar penyelesaian dari persamaan non linear dibawah ini dengan metode iterasi $x = g(x)$

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 18x - 6 = 0$$

Solusi

- **Langkah pertama**

  Merubah bentuk persamaan $f(x)$ menjadi bentuk $x = g(x)$

$$x = -\frac{x^3}{18} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}$$

jadi

$$g(x) = -\frac{x^3}{18} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}$$

Solusi

- **Langkah kedua**

  Mencari turunan $g(x)$

$$g'(x) = -\frac{x^2}{6} + x$$

  Menentukan titik uji $x_1 = 0{,}5$

$$g'(x) = 0{,}458333$$

  Syarat $|g'(x_1)| < 1$ (terpenuhi)

Solusi

- **Langkah ketiga**

  Iterasi pertama, $n=1$, didapatkan

$$x_2 = g(x_1) = -\frac{(x_1)^3}{18} + \frac{(x_1)^2}{2} + \frac{1}{3} = 0{,}451389$$

  Iterasi kedua, $n=2$, didapatkan

$$x_3 = g(x_2) = -\frac{(x_2)^3}{18} + \frac{(x_2)^2}{2} + \frac{1}{3} = 0{,}4301$$

Solusi

- Proses iterasi dilanjutkan sampai didapatkan nilai x yang tidak berubah atau hampir berubah

- Jika diselesaikan hingga 11 angka dibelakang koma adalah

$$x = 0.41577455835$$

dimana :

$$f(x) = 1{,}7286 \times 10^{-8}$$

Error = $1{,}7286 \times 10^{-8}$

Kelemahan Metode Iterasi Bentuk x=g(x)

- Jika fungsi $f(x)$ mempunyai beberapa akar penyelesaian, akar tersebut tidak dapat dicari secara langsung atau bersamaan, tetapi satu persatu
- Tidak dapat mencari akar kompleks (imajiner)
- Tidak bisa mencari akar persamaan yang tidak memenuhi persyaratan, meskipun ada akar penyelesaiannya
- Untuk persamaan non linear yang cukup kompleks, pencarian turunan $g(x)$ akan menjadi sulit

Metode Newton-Raphson

- Penyelesaian persamaan non linear dengan

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Syarat :

$$\boxed{\left|\frac{f(x_1)\cdot f''(x_1)}{f'(x_1)\cdot f'(x_1)}\right| < 1}$$

Dimana x_1 merupakan titik yang ditentukan saat iterasi

Tahap Penyelesaian

- **Langkah pertama**

  Mencari turunan pertama dan kedua dari $f(x)$

- **Langkah kedua**
  - Menentukan titik uji x_1
  - Menguji titik uji, jika tidak sesuai syarat maka titik uji diganti

- **Langkah ketiga**

  Melakukan iterasi dengan persamaan

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Contoh Soal

- Carilah akar penyelesaian dari persamaan non linear dibawah ini dengan metode Newton-Raphson

$$f(x) = e^{x} - 3x^{2} = 0$$

Solusi

- **Langkah pertama**

  Mencari turunan pertama dan kedua dari $f(x)$

$$f(x) = e^x - 3x^2 = 0$$

$$f'(x) = e^x - 6x$$

$$f''(x) = e^x - 6$$

Solusi

- **Langkah kedua**

  Menentukan titik uji $x_1 = 1$

$$f(1) = e^1 - 3(1)^2 = -0,281718$$

$$f'(1) = e^1 - 6(1) = -3,281718$$

$$f''(1) = e^1 - 6 = -3,281718$$

$$\left| \frac{f(x_1) \cdot f''(x_1)}{f'(x_1) \cdot f'(x_1)} \right| = 0,085845 < 1$$ (Syarat terpenuhi)

Solusi

- **Langkah ketiga**

  Iterasi pertama, $n=1$, didapatkan

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0{,}914155282$$

  Iterasi kedua, $n=2$, didapatkan

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0{,}910017666$$

Solusi

Iterasi ketiga, $n = 3$, didapatkan

$$x_4 = x_3 - \frac{f\left(x_3\right)}{f'\left(x_3\right)} = 0{,}910007573$$

Iterasi keempat, $n = 4$, didapatkan

$$x_5 = x_4 - \frac{f\left(x_4\right)}{f'\left(x_4\right)} = 0{,}910007572$$

Solusi

- Proses iterasi dilanjutkan sampai didapatkan nilai x yang tidak berubah atau hampir berubah

- Jika diselesaikan diperoleh

$$x = 0.910007573$$

dimana :

$$f(x) = -1,79075 \times 10^{-10}$$

Error = $1,79075 \times 10^{-10}$

Kelemahan Metode Newton-Raphson

- Jika fungsi $f(x)$ mempunyai beberapa akar penyelesaian, akar tersebut tidak dapat dicari secara langsung atau bersamaan, tetapi satu persatu
- Tidak dapat mencari akar kompleks (imajiner)
- Tidak bisa mencari akar persamaan yang tidak memenuhi persyaratan, meskipun ada akar penyelesaiannya
- Untuk persamaan non linear yang cukup kompleks, pencarian turunan pertama dan kedua dari $f(x)$ akan menjadi sulit

Exercise

- Selesaikan persamaan non linear berikut

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$$

Tugas 02 (1 of 2)

1. Carilah akar dari persamaan non linear dengan metode tabulasi (1 kali iterasi)

$$f(x) = 2 - 3x + \sin x = 0$$

2. Carilah akar dari persamaan non linear dengan metode biseksi (3 kali iterasi)

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$$

3. Carilah akar dari persamaan non linear dengan metode regula falsi (3 kali iterasi)

$$f(x) = 3x - \cos x = 0$$

Tugas 02 (2 of 2)

4. Carilah akar dari persamaan non linear dengan metode iterasi bentuk $x = g(x)$ (3 kali iterasi)

$$f(x) = e^x - 2x + 21 = 0$$

5. Carilah akar dari persamaan non linear dengan metode Newton Raphson (3 kali iterasi)

$$f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 3 = 0$$