VI. DERET TAYLOR DAN MACLAURIN

Jika kita mempunyai sebuah fungsi dengan satu variabel, katakanlah sin x atau ln($\cos^2 x$), dapatkan fungsi ini digambarkan sebagai suatu deret pangkat dari x atau lebih umum dari (x - a) ?. Atau dengan kata lain, adakah bilangan c_0, c_1, c_2, c_3, . . . sehingga,

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 \; . \; . \; .$$

pada sebuah selang di sekitar $x = a$?

Apabila penggambaran fungsi semacam itu ada, maka menurut teorema tentang pendiferensialan deret (Teorema V.2) akan diperoleh pendiferensialan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} f'(x) &= c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + 4c_4(x - a)^3 \; . \; . \; . \\ f''(x) &= 2c_2 + 6c_3(x - a) + 12c_4(x - a)^2 + 20c_5(x - a)^3 \; . \; . \; . \\ f'''(x) &= 6c_3 + 24c_4(x - a) + 60c_5(x - a)^2 + 120c_6(x - a)^3 \; . \; . \; . \\ &\vdots \end{aligned}$$

Apabila kita subtitusikan $x = a$, maka diperoleh,

$$\begin{aligned} f(a) &= c_0 \\ f'(a) &= c_1 \\ f''(a) &= 2c_2 = 2!c_2 \\ f'''(a) &= 6c_3 = 3!c_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dari hasil subtitusi ini selanjutnya kita dapat menghitung c_n, yaitu

$$\begin{aligned} c_0 &= f(a) \\ c_1 &= f'(a) \\ c_2 &= \frac{f''(a)}{2!} \\ c_3 &= \frac{f'''(a)}{3!} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dari penentuan c_n ini, kita dapat menuliskan rumus yang lebih umum, yaitu

$$c_n = \frac{f^n(a)}{n!}$$

Catatan : Supaya rumus untuk c_n ini berlaku untuk $n = 0$, maka kita artikan $f^0(a)$ sebagai $f(a)$ dan $0! = 1$.

Dari hasil di atas dapat kita lihat bahwa koefisien-koefisien c_n ditentukan oleh f. Hal ini berarti bahwa suatu fungsi f tidak dapat digambarkan oleh dua deret pangkat dari $x - a$ yang berbeda seperti yang dituangkan dalam teorema berikut.

Teorema VI.1 (*Teorema Ketunggalan*)
Andaikan f memenuhi uraian berikut,

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 \ . \ . \ .$$

untuk semua x dalam selang di sekitar a, maka

$$c_n = \frac{f^n(a)}{n!}$$

Jadi suatu fungsi tidak dapat digambarkan oleh dua deret pangkat dari $(x - a)$.

Bentuk koefisien c_n mirip dengan koefisien yang terdapat dalam Rumus Taylor, oleh karena itu deret pangkat dari $(x - a)$ yang menggambarkan sebuah fungsi ini dinamakan ***deret Taylor***. Apabila $a = 0$, maka deret dinamakan ***deret Maclaurin***. Dengan deret Taylor ini kita bisa menjawab pertanyaan di awal bagian ini yaitu apakah sebuah fungsi f dapat digambarkan sebagai deret pangkat dalam x atau $(x - a)$ seperti yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema VI.2 (*Teorema Taylor*)
Misalkan f adalah sebuah fungsi yang memiliki turunan dari semua tingkat dalam selang $(a - r, a - r)$. Syarat perlu dan cukup supaya deret Taylor

$$f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \ . \ . \ .$$

menggambarkan fungsi f dalam selang tersebut adalah,

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

dengan $R_n(x)$ adalah suku sisa dalam Rumus taylor, yaitu

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$$

dengan c suatu bilangan dalam selang $(a - r, a - r)$.

Bukti :
Untuk membuktikan teorema ini kita hanya perlu mengingat Rumus Taylor, yaitu

$$f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \ . \ . \ . + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - a)^n + R_n(x)$$

dengan mengambil $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, maka diperoleh,

$$f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \ . \ . \ .$$

Perhatikanlah, apabila $a = 0$, maka diperoleh deret Maclaurin, yaitu

$$f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ . \ . \ .$$

Contoh VI.1

Tentukan deret Maclaurin untuk sin x dan buktikan bahwa deret tersebut menggambarkan sin x untuk semua x.

Jawab :

$$\begin{array}{lll} f(x) = \sin x & \qquad & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & & f'''(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) = \sin x & & f^{(4)}(0) = 0 \\ f^{(5)}(x) = \cos x & & f^{(5)}(0) = 1 \\ f^{(6)}(x) = -\sin x & & f^{(6)}(0) = 0 \\ f^{(7)}(x) = -\cos x & & f^{(7)}(0) = -1 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Dengan memasukan harga-harga turunan ini ke deret Maclaurin diperoleh,

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ . \ . \ .}$$

Uraian deret ini akan berlaku untuk semua x, asal dapat dibuktikan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = 0$$

Oleh karena $\left|f^{(n+1)}(x)\right| = |\cos x| \le 1$ atau $\left|f^{(n+1)}(x)\right| = |\sin x| \le 1$, maka

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Selain itu, menurut Uji Suku ke-n diperoleh bahwa $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Jadi $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Contoh VI.2

Tentukan deret Maclaurin untuk cos x dan buktikan bahwa deret tersebut menggambarkan cos x untuk semua x.

Jawab :

$$\begin{array}{lll} f(x) = \cos x & \qquad & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin x & & f'(0) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} f''(x) = -\cos x & & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \sin x & & f'''(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) = \cos x & & f^{(4)}(0) = 1 \\ f^{(5)}(x) = -\sin x & & f^{(5)}(0) = 0 \\ f^{(6)}(x) = -\cos x & & f^{(6)}(0) = -1 \\ f^{(7)}(x) = \sin x & & f^{(7)}(0) = 0 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Dengan memasukan harga-harga ini ke deret Maclaurin diperoleh,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ . \ . \ .$$

Uraian deret ini akan berlaku untuk semua x, asal dapat dibuktikan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$$

Oleh karena $\left|f^{(n+1)}(x)\right| = |\cos x| \leq 1$ atau $\left|f^{(n+1)}(x)\right| = |\sin x| \leq 1$, maka

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Selain itu, menurut Uji Suku ke-n diperoleh bahwa $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Jadi $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Contoh VI.3

Tentukan deret Maclaurin untuk $f(x) = \cosh x$ dengan dua cara, dan buktikan bahwa uraian tersebut menggambarkan $\cosh x$ untuk semua x.

Jawab :

Cara pertama,

$$\begin{array}{llll} f(x) = \cosh x & & f(0) = 1 \\ f'(x) = \sinh x & & f'(0) = 0 \\ f''(x) = \cosh x & & f''(0) = 1 \\ f'''(x) = \sinh x & & f'''(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) = \cosh x & & f^{(4)}(0) = 1 \\ f^{(5)}(x) = \sinh x & & f^{(5)}(0) = 0 \\ f^{(6)}(x) = \cosh x & & f^{(6)}(0) = 1 \end{array}$$

Jadi dengan memasukan harga-harga ini ke deret Maclaurin diperoleh,

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ . \ . \ .$$

Untuk membuktikan bahwa uraian ini menggambarkan $\cosh x$ untuk semua x, cukup dibuktikan bahwa $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Misalkan B sebuah bilangan sebarang, dan andaikan $|x| \leq B$, maka

$$|\cosh x| = \left|\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right| \leq \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} \leq \frac{e^B}{2} + \frac{e^B}{2} = e^B$$

dengan jalan yang sama kita peroleh juga $|\sinh x| \leq e^B$. Oleh karena $f^{(n+1)}(x)$ adalah cosh x atau sinh x maka dapat kita simpulkan bahwa

$$|R_n(x)| \left|\frac{f^{(n-1)}(c)x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \frac{e^x|x|^{n+1}}{(n+1)}$$

Bentuk pada ruas terakhir menuju nol apabila $n \to \infty$ atau $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Akibatnya $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

Cara kedua :

Telah kita ketahui bahwa cosh $x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (i)

Dari Contoh VI.9 telah kita peroleh bahwa,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ . \ . \ . \qquad \text{(ii)}$$

dari persamaan (ii) ini dapat ditentukan e^{-x} , yaitu

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ . \ . \ . \qquad \text{(ii)}$$

dengan mesubtitusikan persamaan (ii) dan (iii) ke persamaan (i) diperoleh,

$$\cosh x = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ . \ . \ . \ + \ 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ . \ . \ .}{2}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ . \ . \ .$$

Contoh VI.4

Tentukan deret Maclaurin untuk $f(x)$ = sinh x dengan dua cara, dan buktikan bahwa uraian tersebut menggambarkan cosh x untuk semua x.

Jawab :

Cara pertama,

$f(x)$	= sinh x	$f(0)$	= 0
$f'(x)$	= cosh x	$f'(0)$	= 1
$f''(x)$	= sinh x	$f''(0)$	= 0
$f'''(x)$	= cosh x	$f'''(0)$	= 1
$f^{(4)}(x)$	= sinh x	$f^{(4)}(0)$	= 0
$f^{(5)}(x)$	= cosh x	$f^{(5)}(0)$	= 1
$f^{(6)}(x)$	= sinh x	$f^{(6)}(0)$	= 1

Jadi dari deret Maclaurin diperoleh,

$$\boxed{\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ . \ . \ .}$$

VI.A. DERET BINOMIAL

Dari Rumus Binomial diketahui bahwa untuk p bilangan bulat positif berlaku,

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \ .\ .\ .\ + \binom{p}{p}x^p$$

dengan

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)(p-2)\ .\ .\ .\ (p-k+1)}{k!}$$

Perhatikan bahwa simbol $\binom{p}{k}$ mempunyai arti untuk setiap bilangan riil p, asal saja k bulat positif. Dengan rumus binomial ini kita dapat menyusun teorema berikut.

Teorema VI.3 (*Deret Binomial*)
Untuk setiap bilangan riil p dan $|x| < 1$ berlaku ,

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \ .\ .\ .\ + \binom{p}{p}x^p$$

dengan $\binom{p}{k}$ seperti yang dibicarakan di atas.

Bukti :
Andaikan $f(x) = (1+x)^p$. Jika kita diferensialkan fungsi ini maka diperoleh,

$$\begin{array}{llcll}
f(x) & = (1+x)^p & \qquad & f(0) & = 1 \\
f'(x) & = p(1+x)^{p-1} & & f'(0) & = p \\
f''(x) & = p(p-1)(1+x)^{p-2} & & f''(0) & = p(p-1) \\
f'''(x) & = p(p-1)(p-2)(1+x)^{p-2} & & f'''(0) & = p(p-1)(p-2) \\
 & \ \ \vdots & & & \ \ \vdots
\end{array}$$

Dengan memasukan harga-harga diferensial ini ke deret Maclaurin yaitu,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ .\ .\ .$$

maka diperoleh,

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \ .\ .\ . \qquad \text{(i)}$$

Karena,

$$p = \frac{p}{1!} = \binom{p}{1}$$

$$\frac{p(p-1)}{2!} = \binom{p}{2}$$

$$\frac{p(p-1)(p-2)}{3!} = \binom{p}{3}$$

maka persamaan (i) menjadi

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \ . \ . \ .$$

Contoh VI.5
Tuliskanlah $(1 - x)^{-2}$ sebagai suatu deret Maclaurin pada selang $-1 < x < 1$.

Jawab :
Dengan menggunakan Teorema VI.3 (Deret Binomial) diperoleh,

$$(1+x)^{-2} = 1 + \binom{-2}{1}x + \binom{-2}{2}x^2 + \binom{-2}{3}x^3 + \ . \ . \ .$$

$$= 1 + \frac{-2}{1!}x + \frac{(-2)(-2-1)}{2!}x^2 + \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{3!}x^3 + \ . \ . \ .$$

$$= 1 - 2x + \frac{(-2)(-3)}{2}x^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{6}x^3 + . \ . \ .$$

$$= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ . \ . \ .$$

Selanjutnya ganti x dengan $-x$, maka diperoleh,

$$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ . \ . \ .$$

Contoh VI.6
Tulislah $\sqrt{1+x}$ sebagai suatu deret Maclaurin dan gunakan hasilnya untuk menghampiri $\sqrt{1{,}1}$ sampai 5 angka desimal

Jawab : $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

Dengan menggunakan deret Binomial diperoleh,

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3}x^3 + \binom{\frac{1}{2}}{4}x^4 + \ . \ . \ .$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{4!}x^4 + \ . \ . \ .$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2}x^2 + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{6}x^3 + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{24}x^4 + \ . \ . \ .$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \ . \ . \ .$$

Hasil ini akan kita gunakan untuk menghampiri $\sqrt{1{,}1}$ sampai 5 angka desimal, yaitu

$$\sqrt{1{,}1} = \sqrt{1+0{,}1} = (1+0{,}1)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(0{,}1) - \frac{1}{8}(0{,}1)^2 + \frac{1}{16}(0{,}1)^3 - \frac{5}{128}(0{,}1)^4 + \ . \ . \ .$$

$$= 1 + \frac{0{,}1}{2} - \frac{0{,}01}{8} + \frac{0{,}001}{16} - \frac{5(0{,}0001)}{128} + \ . \ . \ . \approx 1{,}04881$$

Contoh VI.7

Hitunglah $\int_0^{0,4} \sqrt{1 + x^4}\,dx$ sampai 5 angka desimal.

Jawab : $\sqrt{1 \square x^4} = (1 \square x^4)^{\frac{1}{2}}$

Dari Contoh VI.6 kita peroleh.

$$(1 \square x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \ldots$$

Ganti x dengan x^4, diperoleh

$$(1 \square x^4)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{16}x^{12} - \frac{5}{128}x^{16} + \ldots$$

Jadi,

$$\int_0^{0,4} \sqrt{1 + x^4}\,dx = \int_0^{0,4} (1 + x^4)^{\frac{1}{2}}\,dx = \int_0^{0,4} \left[1 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{16}x^{12} - \frac{5}{128}x^{16} + \ldots\right] dx$$

$$= \left[x + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{72}x^9 + \frac{1}{208}x^{13} - \frac{5}{2176}x^{17} + \ldots\right]_0^{0,4}$$

$$= 0,4 \square \frac{(0,4)^5}{10} \square \frac{(0,4)^9}{72} \square \frac{(0,4)^{13}}{208} \square \frac{5(0,4)^{17}}{2176} \square \ldots$$

$$\approx 0,40102$$

VI.B. SOAL LATIHAN

Tentukanlah deret maclaurin untuk $f(x)$ dalam Soal 1 - 6 sampai tiga suku pertama.

1. $f(x) = \dfrac{1}{1 \square x^2}$
2. $f(x) = \sqrt{1 \square x^2}$
3. $f(x) = e^{\square x} \square 1 \square x$
4. $f(x) = x \sec x$
5. $f(x) = e^{\square 1} \sin x$
6. $f(x) = \dfrac{1}{1 \square \sin x}$

Tentukanlah deret Maclaurin untuk $f(x)$ dalam Soal 7 - 16 hingga suku x^5.

7. $f(x) = \tan x$
8. $f(x) = e^x \sin x$
9. $f(x) = e^{-x} \cos x$
10. $f(x) = \cos x \ln(1 + x)$
11. $f(x) = e^x + x + \sin x$
12. $f(x) = \sin^3 x$
13. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2}$
14. $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}\cosh x$
15. $f(x) = x \sec(x^2)$
16. $f(x) = (1 + x)^{3/2}$

Tentukanlah deret Taylor dalam $(x - a)$ hingga suku $(x - a)^3$ pada soal 17-19

17. e^x , $a = 1$
18. $\cos x$, $a = \dfrac{\pi}{3}$
19. $1 + x^2 - x^3$, $a = 1$

20. Tentukanlah empat suku pertama tak nol dalam deret Maclaurin untuk $\sin^{-1} x$. Ingat bahwa,

$$\sin^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

21. Hitunglah dengan teliti sampai empat angka desimal integral berikut.

$$\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$$

22. Tentukanlah deret Taylor untuk $\frac{1}{x}$ dalam $x - 1$. *Petunjuk* : Tulislah $\frac{1}{x}$ = $\frac{1}{[1 - (1 - x)]}$, kemudian gunakanlah uraian $\frac{1}{1 - x}$.

23. Carilah deret Maclaurin untuk $f(x)$ dalam soal di bawah ini dengan menggunakan deret yang telah kita kenal. Selanjutnya gunakanlah hasilnya untuk menentukan $f^{(4)}(0)$.
    (a) $f(x) = e^{x+x^2}$
    (b) $f(x) = e^{\sin x}$
    (c) $f(x) = \int_0^x \frac{e^{t^2} - 1}{t^2}\,dt$
    (d) $f(x) = e^{\cos x}$

24. Tentukanlah deret Maclaurin untuk $(1 - x)^{-1/2}$ sampai suku yang keenam.

25. Hitunglah integral berikut sampai 3 angka desimal.
    (a) $\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx$
    (b) $\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x}\,dx$

26. Butikan bahwa,

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - (1+\tfrac{1}{2})x^2 + (1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})x^3 - \ldots \qquad \text{untuk } -1 < x < 1$$

27. Buktikan bahwa

$$\{\ln(1+x)\}^2 = x^2 - (1+\tfrac{1}{2})\frac{2x^3}{3} + (1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})\frac{2x^4}{4} - \ldots \qquad \text{untuk } -1 < x < 1$$

28. Tentukanlah deret Maclaurin untuk $f(x) = \sin x + \cos x$.