

# Modul 2

## Deret Taylor dan Deret Maclaurin

# Tujuan Pembelajaran

- Menentukan deret Taylor dan deret Maclaurin dari suatu fungsi di sekitar titik yang ditentukan



# Deret Tak Terhingga

Dalam mata kuliah kalkulus tentang deret tak terhingga

Dengan turunan pertama, didapatkan hampiran

$$\sin x \approx x \quad \text{untuk } x \approx 0$$

Bila digunakan deret kedua dan ketiga, akan didapatkan hampiran yang lebih baik

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \quad \text{untuk } x \approx 0$$



# Deret Tak Terhingga

- Kelak akan dapat ditunjukkan bahwa

$$\sin x = x - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \dots, \text{ untuk } x \in \mathfrak{R}$$



# Konvergen

- Deret pangkat

$$S(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Konvergen untuk seluruh bilangan real  $x$ , dan  $S(x)$  memenuhi persamaan diferensial orde 2:

$$S''(x) = -S(x)$$

dengan  $S(0) = 0$  dan  $S'(0) = 1$ . Solusi persamaan differensial ini adalah  $S(x) = \sin x$



# Sejauh ini...

- Diberikan suatu deret pangkat, dapat ditentukan selang kekonvergenannya
- Untuk deret geometri, serta turunan dan integralnya, bisa didapatkan jumlahnya
- Demikian juga untuk beberapa deret pangkat yang jumlahnya sama dengan  $e^x$ ,  $\cos x$ , dan  $\sin x$
- Lalu, dengan operasi pada deret pangkat, dapat diperoleh uraian deret pangkat dari fungsi seperti  $f(x) = xe^x$  dan  $g(x) = e^x/(1-x)$



# Pertanyaan baru

- Diberikan suatu fungsi  $f(x)$ , dapatkah diuraikan sebagai deret pangkat

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$$

untuk  $x$  disekitar  $a$  ?

- Dengan perkataan lain, apakah dapat dicari nilai dari  $c_0, c_1, c_2, \dots$  sehingga deret pangkat di atas konvergen ke  $f(x)$  untuk  $x$  di sekitar  $x = a$  ?



# Pertanyaan baru

Misalkan  $f$  dapat diuraikan sebagai deret pangkat di sekitar  $x = a$

Maka,  $c_0$  pasti sama dengan nilai  $f(a)$

Selanjutnya, jika diturunkan  $f$  terhadap  $x$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \dots$$

Maka,  $c_1$  pasti sama dengan nilai  $f'(a)$

Turunkan lagi terhadap  $x$

$$f''(x) = 2!c_2 + 3!2c_3(x-a) + 4!3c_4(x-a)^2 + \dots$$

Maka,  $c_2$  pasti sama dengan nilai  $f''(a)$  dst...





# Jadi...

- Jika  $f$  dapat diuraikan sebagai deret pangkat

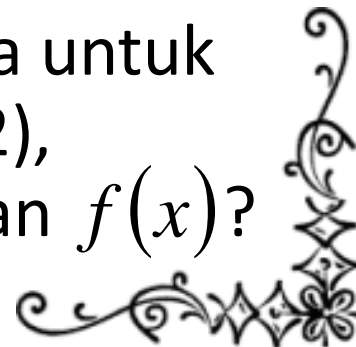
$$(1) \quad f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$$

Maka,  $f$  mempunyai turunan setiap orde dan

$$(2) \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

dengan  $f^{(0)}(a) = f(a)$  dan  $0! = 1$

Tetapi bagaimana sebaliknya? Jika  $f^{(n)}(a)$  ada untuk tiap  $n$ , dan  $c_n$  dihitung dengan persamaan (2), apakah jumlah deret pangkat (1) sama dengan  $f(x)$ ?



# Deret Taylor dan Deret Maclaurin

Uraian deret pangkat dari  $f$  disekitar  $x=a$  disebut **deret Taylor** untuk  $f$  di  $a$ , yakni:

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

Jika  $a=0$ , maka deret pangkat tersebut disebut **deret Maclaurin** untuk  $f$ , yakni:

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$



# Polinom dan Suku Sisa Taylor

Misalkan  $f$  fungsi yang mempunyai turunan ke- $(n+1)$  pada selang terbuka  $I$  yang memuat  $a$ . Maka, untuk setiap  $x \in I$ , berlaku

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

dan suku sisa

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad x < c < a$$



# Jadi

Jika  $n = 0$  maka

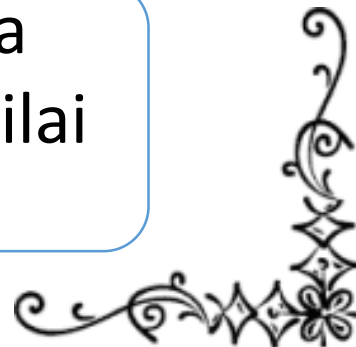
$$f(x) = P_0(x) + R_0(x)$$

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a)$$



Teorema nilai rata-rata

Jadi, persamaan polynomial sebelumnya merupakan bentuk umum dari teorema nilai rata-rata



# Teorema Taylor

Misalkan  $f$  fungsi yang mempunyai turunan tiap orde pada selang  $I = (a-r, a+r)$ . Maka, untuk setiap  $x \in I$  berlaku

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

Jika dan hanya jika

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} = 0, \quad x < c < a$$



# Contoh 1

Tentukan deret Maclaurin untuk  $\sin x$  dan periksa bahwa deret tersebut merepresentasikan  $\sin x$  untuk setiap  $x \in \mathbb{R}$



# Solusi

Jika ditentukan fungsi  $f(x) = \sin x$ , maka dapat disusun tabel penurunan fungsinya

$n$	$f^{(n)}(x)$	$f^n(0)$	$C_n$
0	$\sin x$	0	0
1	$\cos x$	1	1
2	$-\sin x$	0	0
3	$-\cos x$	-1	$1/3!$
...	...	...	...



# Solusi

- Jadi deret Maclaurin untuk  $f(x) = \sin x$  adalah

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Nilai diatas berlaku untuk semua nilai  $x$ . Untuk membuktikan hasil diatas maka perlu dihitung suku sisanya.





# Solusi

Karena  $|f^{(n+1)}(x)| = |\sin x|$ , maka

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} |x^{n+1}|$$

Tapi  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n / n! = 0$ , untuk setiap  $x$ . Dengan demikian

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} = 0$$



# Tugas

1. Dapatkan deret maclaurin dari

a.  $\cos x$

b.  $\ln(1+x)$

2. Dapatkan deret taylor dari  $\cos x$  disekitar  $x = \frac{3\pi}{2}$