Interpolasi

Definisi interpolasi

- Adalah mencari nilai suatu fungsi yang tidak diketahui diantara beberapa nilai fungsi yang diketahui pada tabel fungsi tersebut

Definisi interpolasi

x	f(x)
0.0	0.000
0.2	0.406
0.4	0.846
0.6	1.368
0.8	2.060
1.0	3.114
1.2	5.114

- Contoh mencari nilai fungsi f(0.1), f(0.35) dan f(1.11)
- **Interpolasi balik** = mencari nilai x dari variable f(x)
- Contoh mencari nilai x untuk f(x)=3.015 atau f(x)=1.555

Equispaced vs Non-Equispaced

- **Tabel equispaced** = tabel yang mempunyai nilai beda variabel yang sama (Δx=konstan)

- **Tabel non-equispaced** = tabel yang **tidak** mempunyai nilai beda variabel yang sama (Δx tidak konstan)

Tabel beda hingga

x	f(x)	Δf(x)	Δ^2f(x)	Δ^3f(x)	Δ^4f(x)	Δ^5f(x)	Δ^6f(x)
0.0	0.000						
		0.406					
0.2	0.406		0.034				
		0.440		0.048			
0.4	0.846		0.082		0.040		
		0.552		0.088		0.064	
0.6	1.368		0.170		0.104		0.254
		0.692		0.192		0.318	
0.8	2.060		0.361		0.422		
		1.054		0.614			
1.0	3.114		0.976				
		2.030					
1.2	5.114						

Penyelesaian Persoalan Interpolasi

- Newton Gregory Forward
- Newton Gregory Backward
- Stirling
- Lagrange
- Hermitte

Newton Gregory Forward

- Menyelesaikan masalah interpolasi dengan persamaan

$$f(x_s) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \ldots + \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

dimana

$$s = \frac{x_s - x_0}{x_1 - x_0}$$

Kelemahan NGF

- Hanya dapat digunakan menyelesaikan persoalan interpolasi equispaced
- Menyelesaikan permasalahan untuk nilai x_s terletak diantara x_0 dan x_1
- Tidak dapat menyelesaikan persoalan interpolasi balik

Keuntungan NGF

- Metode yang efektif untuk mencari nilai f(x) di sekitar titik awal

Tabel beda NGF

s	x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
0	x_0	$\boxed{f_0}$	$\boxed{\Delta f_0}$	$\boxed{\Delta^2 f_0}$	$\boxed{\Delta^3 f_0}$	$\boxed{\Delta^4 f_0}$	$\boxed{\Delta^5 f_0}$
1	x_1	f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	$\Delta^4 f_1$	
2	x_2	f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_2$		
3	x_3	f_3	Δf_3	$\Delta^2 f_3$			
4	x_4	f_4	Δf_4				
5	x_5	f_5					

Contoh soal

n	**x**	**f(x)**
0	1.0	1.449
1	1.3	2.060
2	1.6	2.645
3	1.9	3.216
4	2.2	3.779
5	2.5	4.338
6	2.8	4.898

- Carilah nilai f(xs) pada x_s=1.03 dengan metode NGF

Solusi

s	x	f(x)	Δf(x)	Δ^2f(x)	Δ^3f(x)	Δ^4f(x)	Δ^5f(x)	Δ^6f(x)
0	1.0	$\boxed{1.449}$						
			$\boxed{0.611}$					
1	1.3	2.060		$\boxed{-0.026}$				
			0.585		$\boxed{0.012}$			
2	1.6	2.645		-0.014		$\boxed{-0.006}$		
			0.571		0.006		$\boxed{0.004}$	
3	1.9	3.216		-0.008		-0.002		$\boxed{-0.01}$
			0.563		0.004		0.003	
4	2.2	3.779		-0.004		0.001		
			0.559		0.005			
5	2.5	4.338		0.001				
			0.560					
6	2.8	4.898						

Solusi

Nilai s diperoleh

$$s = \frac{x_s - x_0}{h} = \frac{1.03 - 1}{1.3 - 1} = 0.1$$

Nilai yang digunakan pada tabel beda digunakan pada persamaan NGF

Solusi

- Dari hasil tersebut diperoleh

$$f(x_s) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0 +$$

$$\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{4!}\Delta^4 f_0 +$$

$$\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)}{5!}\Delta^5 f_0 +$$

$$\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)(s-5)}{6!}\Delta^6 f_0$$

$$= 1.5118136$$

Newton Gregory Backward

- Menyelesaikan masalah interpolasi dengan persamaan

$$f(x_s) = f_0 + s\Delta f_{-1} + \frac{s(s+1)}{2!}\Delta^2 f_{-2} + \ldots + \frac{s(s+1)(s+2)\ldots(s+n-1)}{n!}\Delta^n f_{-n}$$

dimana

$$s = \frac{x_s - x_0}{h}$$

Kelemahan NGB

- Hanya dapat digunakan menyelesaikan persoalan interpolasi equispaced
- Menyelesaikan permasalahan untuk nilai x_s terletak diantara x_0 dan x_1
- Tidak dapat menyelesaikan persoalan interpolasi balik

Keuntungan NGB

- Metode yang efektif untuk mencari nilai f(x) di sekitar titik akhir

Tabel beda NGB

s	x	f(x)	Δf(x)	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
-5	x_{-5}	f_{-5}					
			Δf_{-5}				
-4	x_{-4}	f_{-4}		$\Delta^2 f_{-5}$			
			Δf_{-4}		$\Delta^3 f_{-5}$		
-3	x_{-3}	f_{-3}		$\Delta^2 f_{-4}$		$\Delta^4 f_{-5}$	
			Δf_{-3}		$\Delta^3 f_{-4}$		$\boxed{\Delta^5 f_{-5}}$
-2	x_{-2}	f_{-2}		$\Delta^2 f_{-3}$		$\boxed{\Delta^4 f_{-4}}$	
			Δf_{-2}		$\boxed{\Delta^3 f_{-3}}$		
-1	x_{-1}	f_{-1}		$\boxed{\Delta^2 f_{-2}}$			
			$\boxed{\Delta f_{-1}}$				
0	x_0	$\boxed{f_0}$					

Contoh soal

n	**x**	**f(x)**
-6	1.0	1.449
-5	1.3	2.060
-4	1.6	2.645
-3	1.9	3.216
-2	2.2	3.779
-1	2.5	4.338
0	2.8	4.898

- Carilah nilai $f(x_s)$ pada x_s =2.67 dengan metode NGB

Solusi

s	x	f(x)	Δf(x)	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$	$\Delta^6 f(x)$
-6	1.0	1.449						
			0.611					
-5	1.3	2.060		-0.026				
			0.585		0.012			
-4	1.6	2.645		-0.014		-0.006		
			0.571		0.006		0.004	
-3	1.9	3.216		-0.008		-0.002		$\boxed{-0.01}$
			0.563		0.004		$\boxed{0.003}$	
-2	2.2	3.779		-0.004		$\boxed{0.001}$		
			0.559		$\boxed{0.005}$			
-1	2.5	4.338		$\boxed{0.001}$				
			$\boxed{0.560}$					
0	2.8	$\boxed{4.898}$						

Solusi

Nilai s diperoleh

$$s = \frac{x_s - x_0}{h} = \frac{2.67 - 2.8}{1.3 - 1} = -0.4333$$

Nilai yang digunakan pada tabel beda digunakan pada persamaan NGB

Solusi

- Dari hasil tersebut diperoleh

$$f(x_s) = f_0 + s\Delta f_{-1} + \frac{s(s+1)}{2!}\Delta^2 f_{-2} + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\Delta^3 f_{-3} +$$

$$\frac{s(s+1)(s+2)(s+3)}{4!}\Delta^4 f_{-4} +$$

$$\frac{s(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}{5!}\Delta^5 f_{-5} +$$

$$\frac{s(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)(s+5)}{6!}\Delta^6 f_{-6}$$

$$= 4.654783$$

Stirling Method

- Menyelesaikan masalah interpolasi dengan persamaan

$$f(x_s) = f_0 + \left|\begin{matrix} s \\ 1 \end{matrix}\right| \frac{\Delta f_{-1} + \Delta f_0}{2} + \frac{\left|\begin{matrix} s+1 \\ 2 \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} s \\ 2 \end{matrix}\right|}{2} \Delta^2 f_{-1} +$$

$$\left|\begin{matrix} s+1 \\ 3 \end{matrix}\right| \frac{\Delta^3 f_{-2} + \Delta^3 f_{-1}}{2} + \frac{\left|\begin{matrix} s+2 \\ 4 \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} s+1 \\ 4 \end{matrix}\right|}{2} \Delta^4 f_{-2} +$$

$$\left|\begin{matrix} s+2 \\ 5 \end{matrix}\right| \frac{\Delta^5 f_{-3} + \Delta^5 f_{-2}}{2} + \frac{\left|\begin{matrix} s+3 \\ 6 \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} s+2 \\ 6 \end{matrix}\right|}{2} \Delta^6 f_{-3} + \dots$$

Stirling Method

dimana

$$s = \frac{x_s - x_0}{h}$$

sedangkan

$$\left|\begin{matrix} s + j \\ k \end{matrix}\right| = \frac{(s + j)(s + j - 1)(s + j - 2)\ldots(s + j - k + 1)}{k!}$$

Kelemahan Stirling

- Hanya dapat digunakan menyelesaikan persoalan interpolasi equispaced
- Menyelesaikan permasalahan untuk nilai x_s terletak diantara x_0 dan x_1
- Tidak dapat menyelesaikan persoalan interpolasi balik

Keuntungan Stirling

- Metode yang efektif untuk mencari nilai f(x) di sekitar titik tengah

Solusi

s	x	f(x)	Δf(x)	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$	$\Delta^6 f(x)$
-3	x_{-3}	f_{-3}						
			Δf_{-3}					
-2	x_{-2}	f_{-2}		$\Delta^2 f_{-3}$				
			Δf_{-2}		$\Delta^3 f_{-3}$			
-1	x_{-1}	f_{-1}		$\Delta^2 f_{-2}$		$\Delta^4 f_{-3}$		
			$\boxed{\Delta f_{-1}}$		$\boxed{\Delta^3 f_{-2}}$		$\boxed{\Delta^5 f_{-3}}$	
0	x_0	$\boxed{f_0}$		$\boxed{\Delta^2 f_{-1}}$		$\boxed{\Delta^4 f_{-2}}$		$\boxed{\Delta^6 f_{-3}}$
			$\boxed{\Delta f_0}$		$\boxed{\Delta^3 f_{-1}}$		$\boxed{\Delta^5 f_{-2}}$	
1	x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$		$\Delta^4 f_{-1}$		
			Δf_1		$\Delta^3 f_0$			
2	x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$				
			Δf_2					
3	x_3	f_3						

Contoh soal

n	**x**	**f(x)**
-3	1.0	1.449
-2	1.3	2.060
-1	1.6	2.645
0	1.9	3.216
1	2.2	3.779
2	2.5	4.338
3	2.8	4.898

- Carilah nilai $f(x_s)$ pada x_s =1.87 dengan metode stirling

Solusi

s	x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$	$\Delta^6 f(x)$
-3	1.0	1.449						
			0.611					
-2	1.3	2.060		-0.026				
			0.585		0.012			
-1	1.6	2.645		-0.014		-0.006		
			0.571		0.006		0.004	
0	1.9	3.216		-0.008		-0.002		-0.01
			0.563		0.004		0.003	
1	2.2	3.779		-0.004		0.001		
			0.559		0.005			
2	2.5	4.338		0.001				
			0.560					
3	2.8	4.898						

Solusi

Nilai s diperoleh

$$s = \frac{x_s - x_0}{h} = \frac{1.87 - 1.9}{1.3 - 1} = -0.1$$

Nilai yang digunakan pada tabel beda digunakan pada persamaan stirling

Solusi

$$
\begin{aligned}
f(x_s) = {} & f_0 + \binom{s}{1}\frac{\Delta f_{-1} + \Delta f_0}{2} + \frac{\binom{s+1}{2} + \binom{s}{2}}{2}\Delta^2 f_{-1} + \\
& \binom{s+1}{3}\frac{\Delta^3 f_{-2} + \Delta^3 f_{-1}}{2} + \frac{\binom{s+2}{4} + \binom{s+1}{4}}{2}\Delta^4 f_{-2} + \\
& \binom{s+2}{5}\frac{\Delta^5 f_{-3} + \Delta^5 f_{-2}}{2} + \frac{\binom{s+3}{6} + \binom{s+2}{6}}{2}\Delta^6 f_{-3}
\end{aligned}
$$

$$= 3.159402$$

Lagrange Method

- Menyelesaikan masalah interpolasi dengan persamaan

$$f(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)} f_0 +$$

$$\frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)} f_1 +$$

$$\ldots + \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})} f_n$$

- Bagian denumerator $\neq x_n - x_n$

Keuntungan Lagrange

- Dapat digunakan menyelesaikan persoalan interpolasi equispaced dan non equispaced
- Dapat menyelesaikan persoalan interpolasi dan interpolasi balik
- Dapat digunakan untuk mencari nilai f(x) di sekitar titik awal, tengah, dan akhir
- Tidak membutuhkan tabel beda dalam penyelesaian masalah

Kelemahan Lagrange

- Jika nilai variabel dan nilai fungsi terlalu banyak, maka perhitungan menjadi kompleks

Contoh soal

n	**x**	**f(x)**
0	1.0	0.00000
1	1.2	0.26254
2	1.5	0.91230
3	1.9	2.31709
4	2.1	3.27194
5	2.5	5.72682
6	3.0	9.88751

- Carilah nilai f(x) pada x=1.03 dengan metode lagrange

Solusi

- Untuk x=1.03

$$f(1.03)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)(x_0-x_5)(x_0-x_6)}f_0+$$

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)(x_1-x_6)}f_1+$$

$$\ldots+\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)}{(x_6-x_0)(x_6-x_1)(x_6-x_2)(x_6-x_3)(x_6-x_4)(x_6-x_5)}f_6$$

$$f(1.03)=0.031352$$

Hermitte Method

- Menyelesaikan masalah interpolasi dengan persamaan

$$f(x) = \frac{\sin(x - x_1)\sin(x - x_2)\ldots\sin(x - x_n)}{\sin(x_0 - x_1)\sin(x_0 - x_2)\ldots\sin(x_0 - x_n)} f_0 +$$

$$\frac{\sin(x - x_1)\sin(x - x_2)\ldots\sin(x - x_n)}{\sin(x_1 - x_0)\sin(x_1 - x_2)\ldots\sin(x_1 - x_n)} f_1 +$$

$$\ldots + \frac{\sin(x - x_1)\sin(x - x_2)\ldots\sin(x - x_n)}{\sin(x_n - x_1)\sin(x_n - x_2)\ldots\sin(x_n - x_{n-1})} f_n$$

- Bagian denumerator $\neq x_n - x_n$

Keuntungan Hermitte

- Dapat digunakan menyelesaikan persoalan interpolasi equispaced dan non equispaced
- Dapat menyelesaikan persoalan interpolasi dan interpolasi balik
- Dapat digunakan untuk mencari nilai f(x) di sekitar titik awal, tengah, dan akhir
- Tidak membutuhkan tabel beda dalam penyelesaian masalah
- Hanya efektif untuk persoalan dengan metode periodik

Kelemahan Lagrange

- Jika nilai variabel dan nilai fungsi terlalu banyak, maka perhitungan menjadi kompleks

Contoh soal

n	**x**	**f(x)**
0	2.823	0.31323
1	3.016	0.12526
2	3.458	-0.31115
3	4.398	-0.95099
4	5.655	-0.58768

- Carilah nilai f(x) pada x=3.535 dengan metode hermitte

Solusi

- Untuk x=3.535

$$f(3.535) = \frac{\sin(x - x_1)\sin(x - x_2)\sin(x - x_3)\sin(x - x_4)}{\sin(x_0 - x_1)\sin(x_0 - x_2)\sin(x_0 - x_3)\sin(x_0 - x_4)} f_0 +$$

$$\frac{\sin(x - x_1)\sin(x - x_2)\sin(x - x_3)\sin(x - x_4)}{\sin(x_1 - x_0)\sin(x_1 - x_2)\sin(x_1 - x_3)\sin(x_1 - x_4)} f_1 +$$

$$\ldots + \frac{\sin(x - x_1)\sin(x - x_2)\sin(x - x_3)\sin(x - x_4)}{\sin(x_4 - x_0)\sin(x_4 - x_1)\sin(x_4 - x_2)\sin(x_4 - x_3)} f_4$$

$$f(3.535) = -0.20365$$