

Diferensiasi Numerik

Andhika Giyantara

Pendahuluan

- Penyelesaian lebih mudah untuk mencari nilai diferensial suatu fungsi yang cukup kompleks
- Misal mencari diferensial pada $x=1.6$ dari fungsi berikut

$$f(x) = \frac{x^2 \ln(x) + e^{-x}}{5x \sin x}$$

$$f(x) = \frac{x^2 \cos x}{e^{-x}} \quad \text{dst}$$

Metode Diferensiasi Numerik

1. Metode Newton-Gregory Forward
2. Metode Newton Gregory Backward
3. Metode Stirling
4. Metode Lagrange

Metode Newton-Gregory Forward

- Penurunan persamaan Newton-Gregory Forward pada interpolasi

$$f'(x) = \frac{1}{h} \left[\Delta f_0 + \frac{2s-1}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{3s^2-6s+2}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots \right]$$

Tahap Penyelesaian

1. Mencari nilai beda dan membuat tabel beda hingga
2. Mencari nilai s dan mencari nilai diferensial pada titik yang diketahui

Contoh soal

n	x	f(x)
0	1.0	1.449
1	1.3	2.060
2	1.6	2.645
3	1.9	3.216
4	2.2	3.779
5	2.5	4.338
6	2.8	4.898

- Carilah nilai $f'(x)$ pada $x=1.03$ dengan metode NGF

Solusi

Step 1

s	x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$	$\Delta^6 f(x)$
0	1.0	1.449	0.611	-0.026	0.012	-0.006	0.004	-0.01
1	1.3	2.060	0.585	-0.014	0.006	-0.002	0.003	
2	1.6	2.645	0.571	-0.008	0.004	0.001		
3	1.9	3.216	0.563	-0.004	0.005			
4	2.2	3.779	0.559	0.001				
5	2.5	4.338	0.560					
6	2.8	4.898						

Solusi

Step 2

Nilai s diperoleh

$$s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1.03 - 1}{1.3 - 1} = 0.1$$

Nilai diferensial dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan yang ada dan nilai dari Δf

Solusi

Step 2

Nilai diferensial saat $x=1.03$

$$f'(x) = \frac{1}{h} \left[\Delta f_0 + \frac{2s-1}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{3s^2-6s+2}{3!} \Delta^3 f_0 + \frac{4s^3-18s^2+22s-6}{4!} \Delta^4 f_0 + \frac{5s^4-40s^3+105s^2-100s+24}{5!} \Delta^5 f_0 + \frac{6s^5-75s^4+340s^3-675s^2+548s-120}{6!} \Delta^6 f_0 \right] = 2.088647$$

Metode Newton-Gregory Backward

- Penurunan persamaan Newton-Gregory Backward pada interpolasi

$$f'(x) = \frac{1}{h} \left[\Delta f_{-1} + \frac{2s+1}{2!} \Delta^2 f_{-2} + \frac{3s^2+6s+2}{3!} \Delta^3 f_{-3} + \dots \right]$$

Tahap Penyelesaian

1. Mencari nilai beda dan membuat tabel beda hingga
2. Mencari nilai s dan mencari nilai diferensial pada titik yang diketahui

Contoh soal

n	x	f(x)
-6	1.0	1.449
-5	1.3	2.060
-4	1.6	2.645
-3	1.9	3.216
-2	2.2	3.779
-1	2.5	4.338
0	2.8	4.898

- Carilah nilai $f'(x)$ pada $x=2.67$ dengan metode NGB

Solusi

s	x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$	$\Delta^6 f(x)$
-6	1.0	1.449	0.611					
-5	1.3	2.060	0.585	-0.026	0.012			
-4	1.6	2.645	0.571	-0.014	0.006	-0.006	0.004	
-3	1.9	3.216	0.563	-0.008	0.004	-0.002	0.003	-0.01
-2	2.2	3.779	0.559	-0.004	0.005	0.001		
-1	2.5	4.338	0.560	0.001				
0	2.8	4.898						

Solusi

Nilai s diperoleh

$$s = \frac{x_s - x_0}{h} = \frac{2.67 - 2.8}{1.3 - 1} = -0.4333$$

Nilai yang digunakan pada tabel beda digunakan pada persamaan NGB

Solusi

Step 2

Nilai diferensial saat $x=2.67$

$$f'(x) = \frac{1}{h} \left[\Delta f_{-1} + \frac{2s+1}{2!} \Delta^2 f_{-2} + \frac{3s^2+6s+2}{3!} \Delta^3 f_{-3} + \right. \\ \left. \frac{4s^3+18s^2+22s+6}{4!} \Delta^4 f_{-4} + \frac{5s^4+40s^3+105s^2+100s+24}{5!} \Delta^5 f_{-5} + \right. \\ \left. \frac{6s^5+75s^4+340s^3+675s^2+548s+120}{6!} \Delta^6 f_{-6} \right] = 1.8711214$$

Metode Stirling

- Penurunan persamaan stirling pada interpolasi

$$f'(x) = \frac{1}{h} \left[\frac{\Delta f_{-1} + \Delta f_0}{2} + s \Delta^2 f_{-1} + \frac{3s^2 + 1}{3!} \frac{(\Delta^3 f_{-1} + \Delta^3 f_{-2})}{2} + \dots \right]$$

Contoh soal

n	x	f(x)
-3	1.0	1.449
-2	1.3	2.060
-1	1.6	2.645
0	1.9	3.216
1	2.2	3.779
2	2.5	4.338
3	2.8	4.898

- Carilah nilai $f(x)$ pada $x=1.87$ dengan metode stirling

Solusi

s	x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$	$\Delta^6 f(x)$
-3	1.0	1.449	0.611					
-2	1.3	2.060	0.585	-0.026				
-1	1.6	2.645	0.571	-0.014	0.012			
0	1.9	3.216	0.563	-0.008	0.006	-0.006	0.004	
1	2.2	3.779	0.559	-0.004	0.004	-0.002	0.003	-0.01
2	2.5	4.338	0.560	0.001	0.005	0.001		
3	2.8	4.898						

Solusi

Nilai s diperoleh

$$s = \frac{x_s - x_0}{h} = \frac{1.87 - 1.9}{1.3 - 1} = -0.1$$

Nilai yang digunakan pada tabel beda digunakan pada persamaan stirling

Solusi

Step 2

Nilai diferensial saat $x=1.87$

$$f'(x) = \frac{1}{h} \left[\frac{\Delta f_{-1} + \Delta f_0}{2} + s \Delta^2 f_{-1} + \frac{3s^2 + 1}{3!} \frac{(\Delta^3 f_{-1} + \Delta^3 f_{-2})}{2} + \right. \\ \left. \frac{4s^3 - 2s}{4!} + \Delta^4 f_{-2} + \frac{5s^4 - 15s^2 + 4}{5!} \frac{(\Delta^5 f_{-2} + \Delta^5 f_{-3})}{2} + \right. \\ \left. \frac{6s^5 - 20s^3 + 8s}{6!} \Delta^6 f_{-3} \right] = 1.890292$$

Metode Lagrange

$$f'(x) = \sum_{m=1}^{n+1} \frac{f_m - 1}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{n+1} (x_{m-1} - x_{k-1})} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{n+1} \frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+4} (x - x_{i-1})}{(x - x_{j-1})} \right)$$

Contoh soal

n	x	f(x)
0	1.0	0.00000
1	1.2	0.26254
2	1.5	0.91230
3	1.9	2.31709
4	2.1	3.27194
5	2.5	5.72682
6	3.0	9.88751

- Carilah nilai $f(x)$ pada $x=2.25$ dengan metode lagrange

Solusi

$$f'(x) = \sum_{m=1}^{n+1} \frac{f_m - 1}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{n+1} (x_{m-1} - x_{k-1})} \left(\frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^{n+4} (x - x_{i-1})}{(x - x_{j-1})} \right)$$

Solusi

- Untuk $x=2.25$

$$\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_1)(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_4) + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} f_0 +$$

$$\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_2)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} f_1 +$$

$$\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_3)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_4) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} f_2 +$$

dst