Modul 4
Penyelesaian Persamaan Linear Serentak

Persamaan Linear Serentak

- Persamaan linear serentak dengan n variabel bebas $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= h_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= h_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n &= h_3 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n &= h_n
\end{aligned}
$$

Metode Invers dan Determinan Matriks

- Metode penyelesaian persamaan serentak dengan menggunakan matriks invers dan determinan matriks.
- Kelebihan metode ini adalah hasil penyelesaiannya merupakan hasil eksak (tepat)

Step Penyelesaian

- Jika diketahui persamaan linier

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3$$

Step Penyelesaian

- **Langkah pertama** = menyusun persamaan serentak dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot x = H$$

Step Penyelesaian

- **Langkah kedua** : menentukan determinan matriks, adjoint matriks, invers matriks dan variable matriks

  Determinan matriks A

$$\det A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}\left((a_{22})(a_{33}) - (a_{32})(a_{23})\right) + a_{12}\left((a_{23})(a_{31}) - (a_{21})(a_{32})\right) + a_{13}\left((a_{21})(a_{32}) - (a_{31})(a_{22})\right)$$

Step Penyelesaian

Adjoint matriks A

$$adj\,A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Step Penyelesaian

Invers matriks A

$$A^{-1} = \frac{adj\,A}{\det A}$$

Variable matriks A

$$X = A^{-1}H$$

Contoh Soal

- Carilah penyelesaian dari persamaan linear serentak dibawah ini dengan metode invers dan determinan matriks

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 12$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11$$
$$2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2$$

Solusi

- **Langkah pertama** menyusun menjadi matriks koefisien

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A \qquad X = H$$

Solusi

- **Langkah kedua** mencari matriks determinan, adjoint matriks, invers matriks dan variable matriks

Determinan dari matriks A

$$\det A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= 3((2)(-1)-(-2)(3)) + (-1)((3)(2)-(1)(-1)) + 2((1)(-2)-(2)(2))$$

$$= -7$$

Solusi

- Adjoint matriks

$$adj\,A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Solusi

- Invers matriks

$$A^{-1} = \frac{adj\,A}{\det A} = \begin{bmatrix} -4/7 & 5/7 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 6/7 & -4/7 & -1 \end{bmatrix}$$

- Varibel pada matriks

$$x = A^{-1}H = \begin{bmatrix} -4/7 & 5/7 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 6/7 & -4/7 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian => $x_1 = 3, x_2 = 1$ dan $x_3 = 2$

Metode Dekomposisi L-U

- Metode penyelesaian dengan membentuk matriks segitiga atas (matriks U) dan matriks segitiga bawah (matriks L) dari matriks koefisien, serta membentuk vektor matriks (matriks H’) dari matriks hasil (matriks H)

Step Penyelesaian

- **Langkah pertama** membentuk matriks koefisien A, matriks variable x dan matriks hasil H
- **Langkah kedua** mencari matriks segitiga bawah (matriks L) dan matriks segitiga atas (matriks U)

$$l_{i1} = a_{i1} \qquad\qquad l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{1k} \cdot u_{kj}$$

$$u_{ij} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \qquad\qquad u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}}{l_{ii}}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Step Penyelesaian

Mencari vektor matriks (matriks H') dari matriks hasil

$$h'_1 = \frac{h_1}{l_{11}} \qquad h'_j = \frac{h_i - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot h'_k}{l_{ii}}$$

- Membentuk augmented matriks (U|H') dan mencari penyelesaian dengan

$$x_n = h'_n \qquad x_j = h'_j - \sum_{k=j+1}^{n} u_{jk} \cdot x_k$$

Contoh Soal

- Carilah penyelesaian dari persamaan linear serentak dibawah ini dengan metode dekomposisi L-U

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14$$

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 36$$

Solusi

- **Langkah pertama**

Membentuk matriks koefisien, matriks variable dan matriks hasil

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14$$
$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 36$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 36 \end{bmatrix}$$

Solusi

- **Langkah kedua**

Mencari matriks L dan U dari matriks koefisien

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonal utama matriks U bernilai 1

Solusi

Pada j=1, didapatkan

$$l_{11} = a_{11} = 1$$
$$l_{21} = a_{21} = 1$$
$$l_{31} = a_{31} = 1$$

Pada i=1, didapatkan

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = 1$$

$$u_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}} = 1$$

Solusi

$$l_{22} = a_{22} - \sum_{k=1}^{1} l_{ik} \cdot u_{kj} = a_{22} - \left(l_{21} \cdot u_{12}\right) = 1$$

$$l_{32} = a_{32} - \sum_{k=1}^{1} l_{ik} \cdot u_{kj} = a_{32} - \left(l_{31} \cdot u_{12}\right) = 3$$

$$u_{23} = \frac{a_{23} - \sum_{k=1}^{1} l_{ik} \cdot u_{kj}}{l_{22}} = \frac{a_{23} - \left(l_{21} \cdot u_{13}\right)}{l_{22}} = 2$$

$$l_{33} = a_{33} - \sum_{k=1}^{2} l_{ik} \cdot u_{kj} = a_{33} - \left(l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23}\right) = 2$$

Solusi

Jadi matriks L dan U

$$l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solusi

- Matriks H’ diperoleh

$$h'_1 = \frac{h_1}{l_{11}} = \frac{6}{1} = 6 \qquad h'_2 = \frac{h_2 - l_{21}h'_1}{l_{22}} = 8$$

$$h'_3 = \frac{h_3 - \left(l_{31}h'_1 + l_{31}h'_2\right)}{l_{33}} = 3$$

Jadi matriks H’ $H' = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$

Solusi

- **Langkah ketiga**

Augmented matriks (U|H’) diperoleh

$$U\left|H'\right. = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaiannya

$$x_3 = h'_3 = 3$$

$$x_2 = h'_2 - u_{23} \cdot x_3 = 2$$

$$x_1 = h'_1 - \left(u_{12} \cdot x_2 + u_{13} \cdot x_3\right) = 1$$

Metode Iterasi Jakobi

- Penyelesaian dengan menggunakan persamaan

$$x_i^{(n+1)} = \frac{h_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{\,n},\ i \neq j$$

Syarat penyelesaian

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|,\ i = 1,2,\ldots,N$$

$$i \neq j$$

Step Penyelesaian

- **Langkah pertama** memeriksa susunan dari persamaan apakah sesuai dengan syarat penyelesaian. Jika tidak, ubah susunan persamaan
- **Langkah kedua** menyusun matriks koefisien, matriks variable dan matriks hasil
- **Langkah ketiga** menentukan nilai variable awal, dan melakukan iterasi sesuai dengan persamaan iterasi

Contoh Soal

- Carilah penyelesaian dari persamaan linear serentak dibawah ini dengan metode iterasi Jakobi

$$8x_1 + x_2 - x_3 = 8$$
$$x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 12$$
$$x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -4$$

Solusi

- **Langkah pertama**
- Persamaan tidak sesuai dengan syarat sehingga dari

$$8x_1 + x_2 - x_3 = 8$$
$$x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 12$$
$$x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -4$$

menjadi

$$8x_1 + x_2 - x_3 = 8$$
$$x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -4$$
$$x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 12$$

Solusi

- **Langkah kedua**

Matriks koefisien A

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Matriks variabel

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Matriks hasil

$$H = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Solusi

- **Langkah ketiga** menentukan titik variable x awal, misalnya

$$x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = x_3^{(1)} = 0$$

Iterasi pertama, n=1

$$x_1^{(2)} = \frac{h_1}{a_{11}} - \sum_{j=1}^{3} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)} = \frac{8}{8} - \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} x_1^{(1)} + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(1)} \right), \ j \neq 1$$

$$= 1 - (0 + 0) = 1$$

Solusi

$$x_2^{(2)} = \frac{h_2}{a_{22}} - \sum_{j=1}^{3} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)} = \frac{-4}{-7} - \left(\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(1)} + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(1)} \right), \ j \neq 2$$

$$= 0.571 - (0 + 0) = 0.571$$

$$x_3^{(2)} = \frac{h_3}{a_{33}} - \sum_{j=1}^{3} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)} = \frac{12}{9} - \left(\frac{a_{31}}{a_{33}} x_1^{(1)} + \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2^{(1)} \right), \ j \neq 3$$

$$= 1.333 - (0 + 0) = 1.333$$

Solusi

Iterasi	x_1	x_2	x_3
	0	0	0
1	1	0.571	1.333
2	1.095	1.095	1.048
3	0.995	1.026	0.969
4	0.993	0.990	1.000
5	1.002	0.998	1.004
6	1.001	1.001	1.001
7	1.000	1.000	1.000
8	1.000	1.000	1.000

Latihan

- Carilah penyelesaian dari persamaan linear serentak dibawah ini dengan metode iterasi Jakobi

$$6x_1 - 3x_2 + x_3 = 11$$
$$2x_1 + x_2 - 8x_3 = -15$$
$$x_1 - 7x_2 + x_3 = 10$$

Metode Iterasi Gauss-Siedel

- Penyelesaian dengan metode iterasi menggunakan persamaan

$$x_i^{(n+1)} = \frac{h_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n+1)} - \sum_{j=i+1}^{N} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)}$$

$$i = 1, 2, \ldots, N$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Step Penyelesaian

- **Langkah pertama** dan **langkah kedua** penyelesaian sama dengan metode iterasi Jakobi
- **Langkah ketiga** menentukan titik variable x awal kemudian melakukan iterasi sampai didapatkan variable x yang sama atau hampir sama

Contoh Soal

- Carilah penyelesaian dari persamaan linear serentak dibawah ini dengan metode iterasi Gauss-Siedel

$$8x_1 + x_2 - x_3 = 8$$
$$x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 12$$
$$x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -4$$

Solusi

- **Langkah pertama** dan **langkah kedua** penyelesaian sama dengan metode iterasi Jakobi
- **Langkah ketiga** menentukan titik variable x awal, misalnya $x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = x_3^{(1)} = 0$

Iterasi pertama, n=1

$$x_1^{(2)} = \frac{h_1}{a_{11}} - \sum_{j=1}^{0} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^{(n+1)} - \sum_{j=2}^{3} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^{(n)}$$

$$x_1^{(2)} = \frac{h_1}{a_{11}} - 0 - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(1)} + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(1)}$$

$$= 1 - 0 - (0 + 0) = 1$$

Solusi

$$x_2^{(2)} = \frac{h_2}{a_{22}} - \sum_{j=1}^{1} \frac{a_{2j}}{a_{22}} x_j^{(n+1)} - \sum_{j=3}^{3} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^{(n)}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{h_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(2)} + \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(1)}$$

$$= 0.571 - \left(-1/7 + 0\right) = 0.7147$$

$$x_3^{(2)} = \frac{h_3}{a_{33}} - \sum_{j=1}^{2} \frac{a_{3j}}{a_{33}} x_j^{(n+1)} - \sum_{j=4}^{3} \frac{a_{3j}}{a_{33}} x_j^{(n)}$$

$$x_3^{(2)} = \frac{h_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}} x_1^{(2)} + \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2^{(1)} - 0$$

$$= 1.333 - \left(2/9 + 0.714/9\right) = 1.032$$

Solusi

Iterasi	x_1	x_2	x_3
	0	0	0
1	1	0.741	1.032
2	1.041	1.041	0.996
3	0.997	0.996	1.002
4	1.001	1.000	1.000
5	1.000	1.000	1.000
6	1.000	1.000	1.000

Latihan

- Carilah penyelesaian dari persamaan linear serentak dibawah ini dengan metode iterasi Gauss Siedel

$$6x_1 - 3x_2 + x_3 = 11$$
$$2x_1 + x_2 - 8x_3 = -15$$
$$x_1 - 7x_2 + x_3 = 10$$

Tugas

- Diketahui persamaan linear serentak

a) Selesaikan dengan metode determinan dan invers matriks

$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 17$$
$$2x_1 + 8x_2 + 16x_3 = 42$$
$$5x_1 + 21x_2 + 45x_3 = 91$$

Tugas

b) Selesaikan dengan menggunakan metode determinan & invers matriks, metode dekomposisi L-U, metode iterasi jakobi dan metode Gauss Siedel

$$
\begin{aligned}
5x_1 - x_2 &= 9 \\
-x_1 + 5x_2 - x_3 &= 4 \\
-x_2 + 5x_3 &= -6
\end{aligned}
$$