

Aturan Cramer, Eliminasi Gauss & Gauss Jordan

Andhika Giyantara, S.T., M.T

Review Exercise

Tentukan solusi dari Sistem Persamaan Linear (SPL) di bawah ini

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 12$$

Dengan aturan cramer, eliminasi Gauss, dan Gauss Jordan

Aturan Cramer

- Jika diketahui dari persamaan $A \cdot x = B$ dengan matriks persamaan sendiri adalah

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

maka nilai determinannya adalah

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - ge) \end{aligned}$$

Aturan Cramer

- Penyelesaian dengan aturan cramer

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$$

- Dimana

A_1 = Matriks kolom 1 diganti dengan matriks hasil

A_2 = Matriks kolom 2 diganti dengan matriks hasil

A_3 = Matriks kolom 3 diganti dengan matriks hasil

Contoh Soal

Tentukan solusi dari Sistem Persamaan Linear (SPL) di bawah ini

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 35$$

$$3x_1 + 11x_2 + 2x_3 = 85$$

$$2x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 79$$

Dengan aturan cramer

Solusi

Matriks A diperoleh

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 11 & 2 \\ 2 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

Determinan matriks A

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 11 & 2 \\ 2 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 125$$

Solusi

Determinan untuk matriks A_1 , A_2 , dan A_3

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 35 & 3 & 1 \\ 85 & 11 & 2 \\ 79 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 35 \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} - 85 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 79 \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 375$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 4 & 35 & 1 \\ 3 & 85 & 2 \\ 2 & 79 & 5 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 85 & 2 \\ 79 & 5 \end{vmatrix} - 35 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 85 \\ 2 & 79 \end{vmatrix} = 750$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 35 \\ 3 & 11 & 85 \\ 2 & 8 & 79 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 11 & 85 \\ 8 & 79 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 85 \\ 2 & 79 \end{vmatrix} + 35 \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 625$$

Solusi

Sehingga nilai x_1 , x_2 , dan x_3

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{375}{125} = 3 \qquad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{625}{125} = 5$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{750}{125} = 6$$

Eliminasi Gauss

- Dengan eliminasi Gauss, mengubah matriks $[AB]$ menjadi matriks baru berupa matriks upper

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & c_1 \\ 0 & 1 & u_{23} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = c_3$$

$$x_2 + u_{23} \cdot x_3 = c_2$$

$$x_1 + u_{12} \cdot x_2 + u_{13} \cdot x_3 = c_1$$

Contoh Soal

Tentukan solusi dari Sistem Persamaan Linear (SPL) di bawah ini

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 35$$

$$3x_1 + 11x_2 + 2x_3 = 85$$

$$2x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 79$$

Dengan eliminasi Gauss

Solusi

- Persamaan dituliskan ke dalam matriks

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 35 \\ 3 & 11 & 2 & 85 \\ 2 & 8 & 5 & 79 \end{bmatrix}$$

- Baris kedua dikurang nilai baris pertama dikali $3/4$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 35 \\ 0 & 8.75 & 1.25 & 58.75 \\ 2 & 8 & 5 & 79 \end{bmatrix}$$

Solusi

- Baris ketiga dikurang nilai baris pertama dikali $1/2$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 35 \\ 0 & 8.75 & 1.25 & 58.75 \\ 0 & 6.5 & 4.5 & 61.5 \end{bmatrix}$$

- Baris ketiga dikurang nilai baris kedua dikali $6.5/8.75$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 35 \\ 0 & 8.75 & 1.25 & 58.75 \\ 0 & 0 & 3.5714 & 17.8571 \end{bmatrix}$$

Solusi

- Nilai x_1 , x_2 , dan x_3 dapat diketahui

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 35 \\ 0 & 8.75 & 1.25 & 58.75 \\ 0 & 0 & 3.5714 & 17.8571 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = 17.8571 / 3.5714 = 5$$

$$x_1 = (35 - 3 * 6 - 5) / 4 = 3$$

$$x_2 = (58.75 - 1.25 * 5) / 8.75 = 6$$

Solusi dari SPL $x_1=3$, $x_2=6$, dan $x_3=5$

Gauss Jordan

- Dengan Gauss Jordan, mengubah matriks $[AB]$ menjadi matriks identitas

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = d_1$$

$$x_2 = d_2$$

$$x_3 = d_3$$

Contoh Soal

Tentukan solusi dari Sistem Persamaan Linear (SPL) di bawah ini

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 35$$

$$3x_1 + 11x_2 + 2x_3 = 85$$

$$2x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 79$$

Dengan Gauss Jordan

Solusi

- Dari hasil eliminasi gauss

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 35 \\ 0 & 8.75 & 1.25 & 58.75 \\ 0 & 0 & 3.5714 & 17.8571 \end{bmatrix}$$

- Baris pertama dibagi 4, kedua dibagi 8.75 dan ketiga dibagi 3.5714

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.75 & 0.25 & 8.75 \\ 0 & 1 & 0.1429 & 6.7143 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Solusi

- Baris kedua dikurang baris ketiga dikali 0.1429

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.75 & 0.25 & 8.75 \\ 0 & 1 & 0 & 5.998 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

- Baris pertama dikurang baris ketiga dikali 0.25

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.75 & 0 & 7.5 \\ 0 & 1 & 0 & 5.998 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Solusi

- Baris pertama dikurang baris kedua dikali 0.75

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3.0015 \\ 0 & 1 & 0 & 5.998 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Solusi dari SPL $x_1=3.0015$, $x_2=5.998$, dan $x_3=5$

Tugas

1. Tentukan solusi dari Sistem Persamaan Linear (SPL) di bawah ini

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 12$$

Dengan aturan cramer, eliminasi Gauss, dan Gauss Jordan

Tugas

2. Apabila diketahui suatu rangkaian listrik seperti Gambar, maka carilah besar arus untuk masing-masing hambatan (dengan aturan cramer, eliminasi Gauss dan Gauss Jordan)

