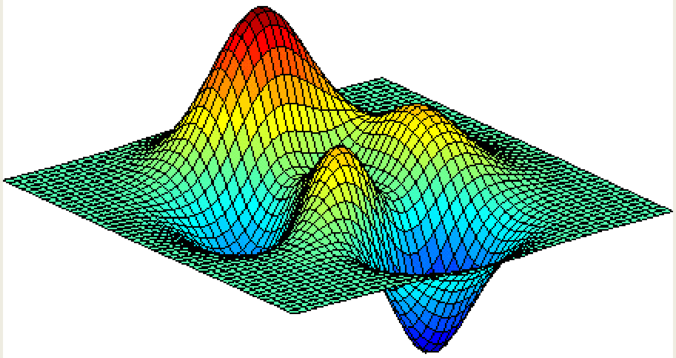
Belajar

Latihan

Asesmen

Visualisasi Pengetahuan dan Virtualisasi Eksperimen



Probabilitas dan Proses Stokastik

Trihastuti Agustinah, dkk

Kata Pengantar

Prakata

Jakarta, [Publish Date]

Daftar isi

Daftar Gambar

Daftar Tabel

1 Probabilitas

Mahasiswa mampu menjelaskan spesifikasi eksperimen acakmeliputi prosedur, observasi dan model; mengidentifikasi ruang sampel dan event dari eksperimen

1.1 Konsep Probabilitas

Mahasiswa mampu menjelaskan spesifikasi eksperimen acakmeliputi prosedur, observasi dan model; mengidentifikasi ruang sampel dan event dari eksperimen

1.1.1 Eksperimen Acak

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menjelaskan penentuan eksperimen acakmeliputi prosedur, observasi dan model; mengidentifikasi ruang sampel dan event dari eksperimen acak

PENGANTAR

Konsep dasar tentang eksperimen acak dan penentuan ruang sampel serta event dari suatu eksperimen tersebut terdapat dalam bahasan ini. Pendefinisian tentang eksperimen acak, ruang sampel dan event tersebut dilengkapi dengan beberapa contoh yang berguna untuk memberikan penjelasan secara utuh tentang konsep-konsep tersebut.

EKSPERIMEN ACAK

Eksperimen acak merupakan suatu eksperimen yang hasilnya (outcome) bervariasi dan tidak dapat diprediksi bila eksperimen tersebut diulang pada kondisi yang sama.Eksperimen acak ditentukan melalui penetapan prosedur eksperimen dan pengukuran atau observasi hasil (outcome)yang harus dilakukan.Selain itu, eksperimen acak juga perlu dilengkapi dengan model eksperimen. Dalam eksperimen pelemparan sebuah koin, model eksperimennya adalah terjadinya angka atau gambar memiliki kemungkinan yang sama (equally likely), dan tiap hasil lemparan tidak terkait dengan hasil lemparan sebelumnya. Suatu eksperimen acak dapat mempunyai prosedur yang sama tapi observasi yang dilakukan tidak sama. Observasi yang dilakukan dalam eksperimen acak dapat meliputi lebih dari satu observasi.

CONTOH 1

Berikut ini merupakan contoh penetapan prosedur dan observasi yang harus dilakukan dalam eksperimen acak.

Tabel 1Prosedur Eksperimen Acak

Eksperimen	Prosedur	Observasi
E_1	Pilih bola dalam kotak yang berisi 10 bola identik yang diberi nomor 1 sampai 10	Catat nomor bola
E_2	Pilih bola dalam kotak yang berisi 4 bola identik yang dinomori 1 dan 2 untuk bola hitam (h), nomor 3 dan 4 untuk bola putih (p).	Catat nomor dan warna bola
E_3	Lempar koin tiga kali. **Model:**terjadinya angka dan gambar memiliki kemungkinan yang sama (equally likely) **Catatan:** outcome eksperimen berupa angka (A) atau gambar (G)	Catat banyaknya angka yang terjadi
E_4	Lempar koin tiga kali. **Model:**terjadinya angka dan gambar memiliki kemungkinan yang sama (equally likely) **Catatan:** outcome eksperimen berupa angka (A) atau gambar (G)	Cataturutan angka dan/atau gambar hasil lemparan
E_5	Pilih bilangan integer ganjil positif	Catat integer ganjil positif terpilih
E_6	Pilih bilangan positif dari 0 (nol) sampai dengan 12	Catat bilangan positif yang terpilih
E_7	Hitung banyaknya pesan yang datang pada pusat pesan tiap jam	Catat hasil penghitungan pesan tersebut
E_8	Ukur nilai tegangan dalam rangkaian pada waktu t_1	Catat hasil pengukuran tegangan tersebut

Ruang Sampel

Himpunan dari seluruh hasil (outcome) atau titik sampel dalam eksperimen disebut ruang sampel dan disimbolkan dengan S. Dalam eksperimen pelemparan sebuah dadu, ruang sampel S merupakan himpunan terbatas dari enam bilangan yang menyatakan jumlahmata dadu yang muncul atas, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ruang sampel yang seperti ini disebut diskrit dan terbatas. Ruang sampel juga dapat berupa diskrit dan tak terbatas. Sebagai contoh,S dalam eksperimen 'pilih integer positif secara acak'merupakan himpunan tak terbatas, $S = \{1, 2, 3, \cdots\}$.

Eksperimen juga dapat memunyai ruang sampel tak terbatasdan tak terhitung. Misalnya dalam eksperimen 'pilih bilangan positif dari 0 sampai dengan 12', maka ruang sampel dari eksperimen ini adalahS={0<s<12}. Ruang sampel ini disebut kontinu.

CONTOH 2

Berikut ini merupakan ruang sampel terkait eksperimen acak dalam contoh 1.

Tabel 2Ruang SampelEksperimen Acak

Eksp.	Observasi	Ruang Sampel
E_1	Nomor bola yang terpilih dari dalam kotak	$S_1 = \{1, 2, \ldots, 10\}$
E_2	Nomor dan warna bola terpilih	$S_2 = \{(1,h), (2,h), (3,p), (4,p)\}$
E_3	Jumlah banyaknya angka dalam tiga kali lemparan	$S_3 = \{0,1,2,3\}$
E_4	Urutan hasil lemparan koin dalam tiga kali	$S_4=\{AAA, AAG, AGA, AGG, GAA, GAG, GGA, GGG\}$
E_5	Bilangan integer ganjil positif	$S_5=\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$
E_6	Bilangan positif dari 0 sampai dengan 12	$S_6 = \{x: 0 \leq x \leq 12\}$
E_7	Banyaknya pesan yang datang tiap jam	$S_7 = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$
E_8	Nilai tegangan pada waktu t_1	$S_8 = \{v: v \geq 0\}$

Eksperimen E_1, E_2, E_3, E_4 memunyai ruang sampel diskrit dan terbatas, sedangkan eksperimen E_5 dan E_7 memunyai ruang sampel diskrit dan tak terbatas. Eksperimen E_6 dan E_8 adalah contoh ruang sampel kontinu.

Event

Dalam satu eksperimen biasanya yang diperhatikan adalah hasil (outcome) dengan karakteristik tertentu. Misalnya dalam pelemparansebuah dadu yang diperhatikan adalah kejadian dari munculnya jumlah mata dadu bernilai genap.

CONTOH 3

Berikut ini merupakan event yang didefinisikan dalam ruang sampel terkait eksperimen acak dalam contoh 1.

Tabel 3 Event Ruang Sampel Eksperimen Acak

Eksp.	Observasi	Event
E_1	Bola bernomor genap terpilih	$A_1=\{2,4,6,8,10\}$
E_2	Bola bernomor genap dan berwarna putih terpilih	$A_2=\{(4,p)\}$
E_3	Jumlah angka sama banyak dengan gambar	$A_3=\emptyset$
E_4	Tiga kali lemparan outcome sama	$A_4=\{AAA, GGG\}$
E_5	Bilangan yang terpilih tidak negatif	$A_5=S_5=\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$
E_6	Bilangan yang terpilih lebih kecil dari 5	$A_6=\{x:0\leq x<5\}$
E_7	Tidak ada pesan yang datang tiap jam	$A_7=\{0\}$
E_8	Nilai tegangan pada waktu t_1 lebih besar dari 210 tetapi lebih kecil dari 230	$A_8=\{v: 210 < v < 230\}$

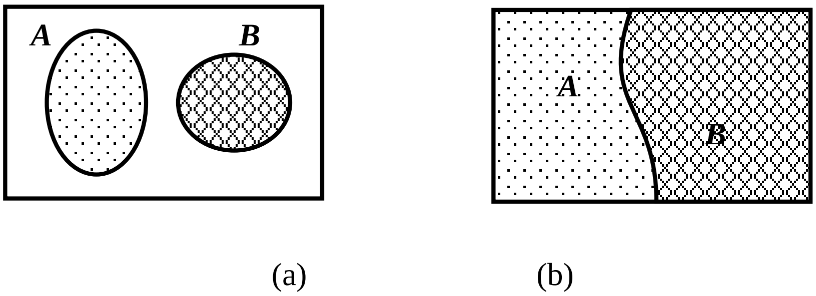
Event yang terdiri dari satu outcome dalam ruang sampel diskrit disebut event elementer. Event A_2 dan A_7 adalah event elementer. Event dapat juga meliputi seluruh ruang sampel seperti event A_5. Event nul, $\emptyset$, muncul bila tidak ada outcome yang memenuhi kondisi yang diberikan pada event tersebut seperti pada event A_3.

Operasi Himpunan

Eventdapat juga didefinisikan sebagai hasil (outcome) eksperimen dengan karakteristik tertentu sebagai himpunan bagian (subset) dari ruang sampel. Suatu event dapat diperoleh dari kombinasi beberapa event menggunakan operasi himpunan.

Gabungan (union) dua event *A* dan *B*, dinotasikan dengan $A \cup B$, didefinisikan sebagai himpunan outcome yang termasuk dalam *A*, atau *B* atau keduanya. Event $A \cup B$ terjadi jika *A* atau *B*, atau kedua event *A* dan *B* terjadi.

Interseksi dua event *A* dan *B*, dinotasikan $A \cap B$, didefinisikan sebagai himpunan outcome dalam *A* dan *B*. Dua event yang memunyai outcome yang tidak dapat terjadi secara bersamaan disebut *mutually exclusive*(saling ekslusif), interseksi dari dua event tersebut adalah event nul, $A \cap B = \emptyset$. Kumpulan event-event disebut *collectively exhaustive*(kolektif lengkap) jika dan hanya jika gabungan (union) dari himpunan event-event tersebut adalah sama dengan ruang sampel.



Gambar 1 (a) Event Mutually Exclusive dan (b) Mutually exclusive dan Collectively Exhaustive

Komplemen event *A*, dinotasikan A^c, didefinisikan sebagai himpunan seluruh outcome yang tidak berada dalam *A*. Dua event *A* dan *B* disebut sama,$A = B$, jika kedua event tersebut memiliki outcome yang sama.

Berikut ini merupakan sifat-sifat operasi himpunan dan kombinasinya yang berguna dalam konsep himpunan dan event:

Komutatif

$A \cup B = B \cup A$ dan $A \cap B = B \cap A$

Asosiatif

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Distributif

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Aturan DeMorgan

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad \text{dan} \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Operasi gabungan dan interseksi dapat diulang untuk sejumlah event. Gabungan event $A_1, A_2, \cdots, A_n$dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

Gabungan event tersebut terjadi jika satu atau lebih event A_k terjadi. Event interseksi

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

terjadi bila seluruh event $A_1, A_2, \cdots, A_n$ terjadi.

RINGKASAN

- Eksperimen acak merupakan eksperimen yang hasilnya (outcome) berbeda-beda dan tidak dapat diprediksi bila eksperimen tersebut diulang dalam kondisi yang sama.
- Ruang sampel *S* merupakan himpunan seluruh hasil (outcome) yang mungkin dalam eksperimen.
- Event merupakan subset dari *S* yang memunyai karakteristik tertentu yang diperhatikan dalam eksperimen.

LATIHAN

Monitor tiga panggilan (call) telepon berturutan pada sentral telepon. Panggilan telepon diklasifikasikan sebagai panggilan suara (bila ada pembicaraan) dan panggilan data. Hasil observasi adalah deretan tiga huruf, misal *ssd* adalah observasi dua panggilan suara dan satu panggilan data. Tulis elemen-elemen dari himpunan berikut:

a) A_1 = {panggilan pertama adalah pangggilan suara}
b) B_1 = {panggilan pertama adalah panggilan data}
c) A_2 = {panggilan kedua adalah panggilan suara}

d) B_2 = {panggilan pertama adalah panggilan data}

e) A_3 = {semua panggilan sama}

f) B_3 = {panggilan suara dan data bergantian}

Untuk setiap pasangan event A_1 dan B_1; A_2 dan B_2; A_3 dan B_3; identifikasi apakah pasangan event tersebut adalah mutually exclusive atau collectively exhaustive atau keduanya.

1.1.2 Teori Probabilitas

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menjelaskan teori probabilitas berdasarkan pendekatan frekuensi relatif dan aksioma probabilitas.

PENGANTAR

Probabilitas merupakan bilangan yang mewakili nilai kemungkinan sebuah event terjadi bila suatu eksperimen acak dilakukan. Teori probabilitas dapat dibedakan dalam dua pendekatan, yaitu frekuensi relatif dan aksioma probabilitas. Pendefinisian probabilitas melalui frekuensi relatif memberikan pemahaman mendalam berkenaan dengan hukum alamyang banyak diaplikasikan dalam persoalan praktis. Pendekatan melalui definisi terkait dengan aksioma probabilitas lebih banyak digunakan sebagai dasar pemahaman untuk mempelajari teori probabilitas yang lebih modern dan lebih lanjut.

FREKUENSI RELATIF

Suatu eksperimen acak memiliki prosedur 'pilih bola dalam kotak yang berisi bola identik yang diberi nomor 1, 2 dan 3' dengan observasi yang harus dilakukan adalah 'catat nomor bola'. Dalam eksperimen ini terdapat 3 outcome yang mungkin (k) dengan ruang sampel adalah$S$={1, 2, 3}.Anggap bahwa eksperimen diulang sebanyak n kali(trial) dalam kondisi yang sama. Gambar 1 menunjukkan outcome eksperimen dalam 100 trial yang dilakukan secara simulasi menggunakan komputer. Jelas bahwa outcome eksperimen secara konsisten tidak dapat diprediksi dengan benar.

Misalkan $N_1(n)$, $N_2(n)$ dan $N_3(n)$ merupakan jumlah dari tiap outcome k yang terjadi, maka frekuensi relatif dari outcome tersebut didefinisikan dengan

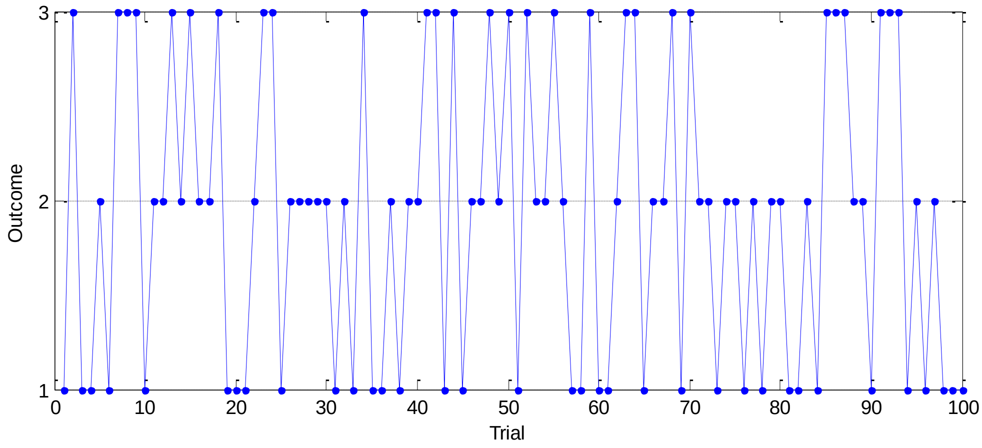
$$f_k = \frac{N_k(n)}{n}$$

Regulasi statistik menyatakan bahwa model probabilitasdalam teknik didasarkan pada kenyataan bahwa rata-rata nilai deretan outcome yang panjang dari pengulangan (trial) eksperimen acak secara konsisten menghasilkan nilai yang kurang lebih sama. Oleh karena itu,$f_k(n)$ akan menuju nilai konstan untuk n trial yang sangat besar, yaitu

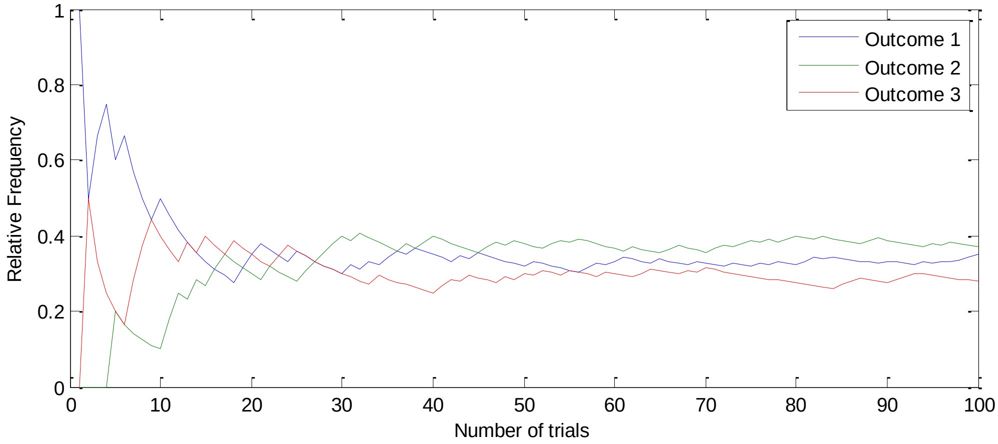
$$\lim_{n\to\infty} f_k(n) = p_k$$

dengan konstanta p_k disebut dengan probabilitas untuk outcome k.

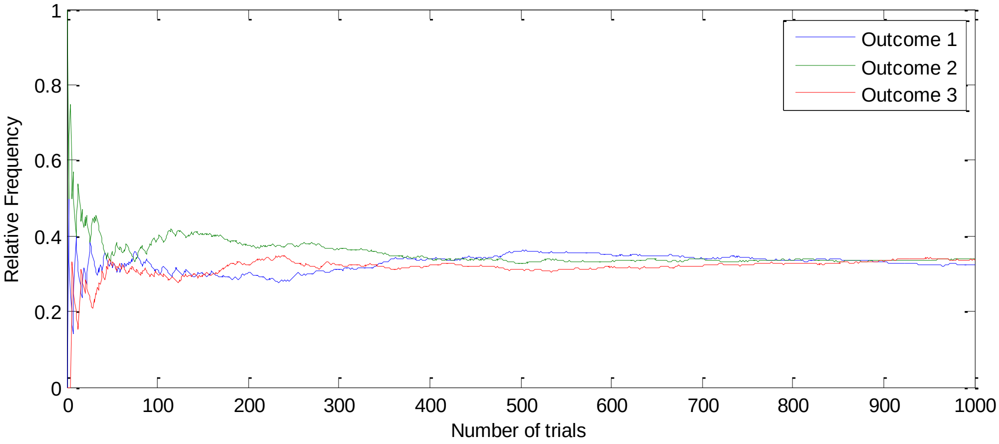
Gambar 2 menunjukkan frekuensi relatif untuk tiga outcome eksperimen. Frekuensi relatif tersebut konvergen pada nilai 1/3 bila jumlah trial semakin banyak seperti yang ditunjukkan dalam Gambar 3. Nilai frekuensi relatif ini menunjukkan bahwaterjadinyamasing-masing outcome dalam eksperimen memiliki kemungkinan yang sama.



Gambar 2Outcome eksperimen 'pilih bola dalam kotak'.



Gambar 3Frekuensi relatif dari tiga outcome eksperimen untuk 100 trial.



Gambar 4Frekuensi relatif dari tiga outcome eksperimen untuk 1000 trial.

Karena jumlah terjadinya tiapoutcome (N_k) dalam pemilihan bola yang diulang sebanyak *n* kali (*n* trial) adalah bilangan antara 0 dan *n*, maka

$$0 \leq N_k \leq n \text{untuk } k=1, 2, 3$$

dan bila persamaan tersebut dibagi dengan *n* (banyaknya trial), diperoleh frekuensi relatif yang merupakan bilangan antara nol dan satu:

$$0 \leq f_k \leq 1 \quad \text{untuk } k=1, 2, 3$$

Jumlah dari terjadinya seluruh outcome yang mungkin adalah sama dengan *n*, ditulis

$$\sum_{k=1}^{3} N_k\,(n) = n$$

Jika kedua sisi dari persamaan tersebut dibagi dengan *n*, maka jumlah seluruh frekuensi relatif adalah sama dengan satu, yaitu

$$\sum_{k=1}^{3} f_k\,(n) = 1$$

Persamaan ini merupakan sifat dari frekuensi relatif. Beberapa kelemahan pendekatan frekuensi relatif diantaranya adalah pada umumnya suatu eksperimen jarang dilakukan sampai dengan tak hingga sehingga probabilitas $p_k$tidak dapat diketahui dengan pasti; frekuensi relatiftidak akan dapat diaplikasikan untuk situasi di manasuatueksperimentidak dapat diulang. Oleh karena itu, pengembangan teori matematika probabilitas menjadi sangat diperlukan untuk menyelesaikan persoalan praktis yang berkaitan dengan fenomena acak.

AKSIOMA PROBABILITAS

Misalkan *A* menyatakan event yang didefinisikan pada ruang sampel *S* dan probabilitas event *A* dinotasikan dengan $P(A)$.Teori probabilitas dimulai dengan pendefinisian tigaaksiomaberikut:

1. $P(A) \geq 0$

   Aksioma ini menyatakan bahwa nilai probabilitas adalah bilangan tidak negatif.

2. $P(S) = 1$

   Aksioma kedua menyatakan bahwa ruang sampel meliputi seluruh hasil yang mungkin dalam suatu eksperimen. Oleh karena itu probabilitas ruang sampel mempunyai nilai probabilitas yang tertinggi yaitu 1. Nilai ini juga menyatakan bahwa *S* diketahui sebagai event yang pasti. Sedangkan event yang tidak memunyai elemen diketahui sebagai event yang tidak mungkin dengan probabilitas sama dengan 0 (nol).

3. $P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n) \quad A_m \cap A_n = \varnothing \quad m \neq n = 1, 2, \cdots, N$

   Aksioma ini menyatakan bahwa probabilitas union sejumlah event mutually exclusive sama dengan jumlah dari probabilitas event-event individu.

Aksioma probabilitas memberikan sekumpulan aturan-aturan yang konsisten bahwa besaran probabilitas yang valid harus terpenuhi. Dari aksioma probabilitas ini, dapat dikembangkan beberapa dalil yang berguna untuk penghitungan nilai probabilitas.

Partisi ruang sampel ke dalam dua event mutually exclusive dan collectively exhaustive, yaitu event *A* dan komplemen dari event *A*, maka diperoleh$A \cap A^c = \emptyset$.

Menurut aksioma ketiga

$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

Karena $S = A \cup A^c$ maka menurut aksioma kedua, probabilitas komplemen *A* adalah

$$1 = P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Dalam beberapa eksperimen, event-event yang terjadi tidak hanya berupa event-event *mutually exclusive* saja, tetapi dapat juga terjadi event-event tersebut mempunyai elemen-elemen yang sama dalam satu ruang sampel.Elemen ini terjadinya secara serempak atau bersamaan (joint) dari event-event yang bukan ekslusif. Untuk dua event *A* dan *B*, elemen bersama (joint) membentuk event $A \cap B$.

Probabilitas $P(A \cap B)$disebut probabilitas joint untuk event *A* dan *B* yang berinterseksi dalam satu ruang sampel. Dari diagram Venn dapat dilihat bahwa

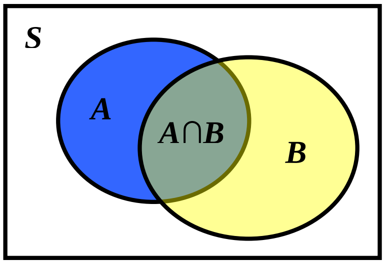
$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

atau

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \le P(A) + P(B)$$

Jadi probabilitas union dari dua event tidak pernah melebihi nilai jumlah dari probabilitas event-event tersebut. Untuk event-event mutually exclusive, karena $A\cap B = \emptyset$ maka

$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0.$



.

Gambar 5Diagram Venn Interseksi Event A dan B.

CONTOH

Untuk eksperimen "Pilih bola dalam kotak yang berisi bola yang dinomori 1 sampai 10". Catat nomor bola.Event *A* didefinisikan sebagai "bola bernomor genap terpilih" dan event *B* adalah "bola bernomor lebih besar dari 6". Dapatkan probabilitas komplemen event *A*, probabilitas join dan union even *A* dan B.

Dapat diperoleh bahwa:

Probabilitas ruang sampel *S*={1,2,...,10} adalah $P(S) = 1$.

Probabilitas event*A*, *A*={2,4,6,8,10}, adalah $P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Probabilitas komplemen *A*,A^c = {1, 3, 5, 7, 9} adalah $P(A^c) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Atau Probabilitas komplemen *A* sama dengan $P(A^c) = 1 - P(A) = \frac{1}{2}$

Probabilitas event *B*, *B*={7,8,9,10}, adalah $P(B) = \frac{4}{10}$

Probabilitas joint *A* dan *B*, *A*∩*B*={8,10}, adalah $P(A \cap B) = \frac{2}{10}$

Probabilitas union *A* dan *B*, adalah

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{5}{10} + \frac{4}{10} - \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$$

RINGKASAN

- Probabilitas suatu event selalu bernilai tak negatif, sedangkan probabilitas ruang sampel selalu bernilai 1 (satu) yang menyatakan bahwa ruang sampel meliputi seluruh hasil eksperimen.
- Probabilitas union dari event-event mutually exclusive sama dengan jumlah probabilitas masing-masing event individu.
- Probabilitas komplemen dari suatu event sama dengan 1 (satu) dikurangi probabilitas event tersebut.
- Probabilitas joint dari dua event merupakan probabilitas interseksi event-event tersebut dalam satu ruang sampel.

LATIHAN

Dadu bermata enam dengan setiap sisi mempunyai peluang muncul yang sama. Berapa probabilitas setiap outcome? Untuk event-event:

A = {dadu bermata genap}

B = {dadu bermata ganjil}

C= {mata dadu lebih dari 3}

dapatkan probabilitas setiap event tersebut, probabilitas union A dan B, probabilitas joint A dan C.

1.2 Probabilitas Bersyarat

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menghitung probabilitas suatu event yang bersyarat event lain.

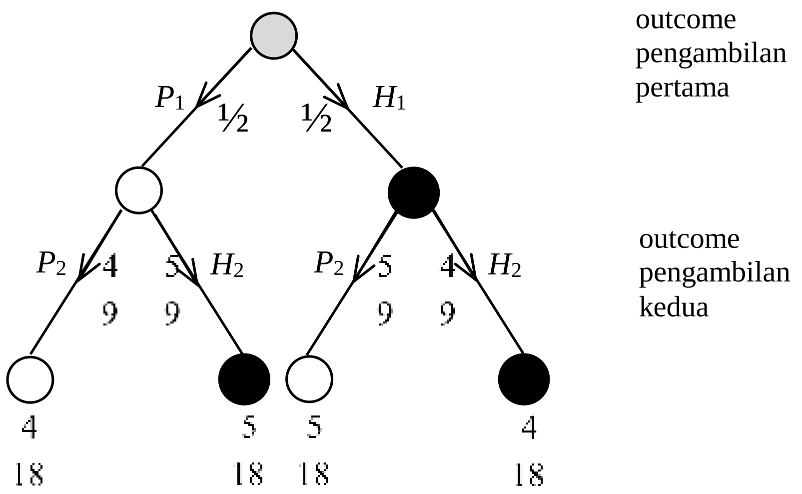
PENGANTAR

Dalam bahasan ini akan dijelaskan tentang hubungan dari dua event, misal *A* dan *B*, apakah terjadinya salah satu event mengubah terjadinya event yang lain. Jadi, apakah pengetahuan tentang terjadinya event *B* akan mengubah kemungkinan terjadinya event *A*. Untuk menjawab pertanyaan ini perhatikan eksperimen berikut ini.

PROBABILITAS BERSYARAT

Eksperimen yang akan dilakukan adalah 'ambil bola dua kali dari dalam kotak yang berisi 10 bola terdiri dari 5 bola putih dan 5 bola hitam'. Catat warna bola terambil (warna bola dalam kotak tidak dapat dilihat dari luar). Bola yang sudah terambil pada pengambilan pertama tidak dikembalikan ke dalam kotak.

Hasil eksperimen ini dapat dinyatakan dalam diagram pohon (tree diagram) berikut:



Gambar 6Diagram Pohon Eksperimen Pengambilan Bola Tanpa Pengembalian Kembali

Bila *B* adalah event bola putih terambil pada pengambilan pertama dan *A* adalah event bola putih terambil pada pengambilan kedua, maka dari tree diagram tampak bahwa probabilitas bola putih kedua terambil bergantung pada hasil pengambilan pertama.

Jika pada pengambilan pertama terambil bola putih (*B*) maka probabilitas bola putih kedua terambil sama dengan 4/9. Sebaliknya, jika bola hitam yang terambil pada pengambilan pertama maka probabilitas bola putih terambil pada pengambilan kedua sama dengan 5/9. Jadi, event *A*bergantung (bersyarat) pada terjadinya event *B*.

Diberikan event *B* yang memunyai probabilitas tidak nol

$$P(B) > 0$$

Probabilitas bersyarat dari event *A*, jika diberikan event *B*, didefinisikan

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilitas $P(A|B)$ menggambarkan fakta bahwa probabilitas event *A* bergantung pada event *B*. Bila *A* dan *B* mutually exclusive $A \cap B = \varnothing$ maka $P(A|B) = 0$.

CONTOH

Eksperimen berikut merupakan pengambilan sebuah bola dari sebuah kotak. Kotak berisi dua bola hitam yang diberi nomor 1 dan 2, dan dua bola putih yang diberi nomor 3 dan 4. Nomor dan warna bola dicatat sebagai hasil eksperimen. Definisikan event *A* sebagai event terpilihnya bola hitam, event*B* adalah event bola bernomor genap dan event *C* adalah nomor bola lebih besar dari 2. Simpulkan apakah pengetahuan terjadinya event *B* dan *C* mempengaruhi probabilitas terjadinya event *A*.

Ruang sampel dari eksperimen ini adalah

$$S = \{(1,h),(2,h),(3,p),(4,p)\}$$

dengan event-event

$$A = \{(1,h),(2,h)\}$$

$$B = \{(2,h),(4,p)\}$$

$$C = \{(3,p),(4,p)\}$$

Karena $P(A \cap B) = P(\{(2,h)\})$ dan $P(A \cap C) = P\{\varnothing\}$, maka

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.25}{0.5} = 0.5 = P(A)$$

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{0}{0.5} = 0 \neq P(A)$$

Pada kasus pertama, pengetahuan terjadinya event *B* tidak mengubah probabilitas *A* sedangkan pengetahuan terjadinya event *C* berimplikasi bahwa event *A* tidak dapat terjadi.

RINGKASAN

- Probabilitas bersyarat digunakan untuk menguji kebergantungan terjadinya suatu event terhadap event lain.
- Probabilitas event A bersyarat event B sama dengan probabilitas joint dari A dan B dibagi dengan probabilitas event B.

LATIHAN

Eksperimen dilakukan untuk menguji dua IC berasal dari pabrik XYZ. Observasi dilakukan untuk menentukan IC tadi diterima (a: *accepted*) atau ditolak (r: *rejected*). Event B didefinisikan sebagai event dari IC pertama yang diuji adalah ditolak. Secara matematis ditulis $B=\{rr, ra\}$. Dengan cara yang sama $A=\{rr, ar\}$ menyatakan event IC kedua ditolak. Diketahui bahwa $P(\{rr\})=0.01$, $P(\{ra\})=0.01$, $P(\{ar\})=0.01$ dan $P(\{aa\})=0.97$.

Dapatkan probabilitas IC kedua adalah ditolak biladiketahui IC pertama ditolak.

1.3 Probabilitas Total Dan Teorema Bayes

1.3.1 Probabilitas Total

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menghitung probabilitas total suatu event berdasarkan terjadinya event-event lain yang didefinisikan dalam ruang sampel yang sama.

PENGANTAR

Konsep probabilitas total digunakan untuk memeroleh probabilitas event tertentu (A) berdasarkan terjadinya event-event lain (B_n) yang *mutually exclusive* dalam ruang sampel yang sama. Probabilitas event A dinyatakan sebagai jumlah dari probabilitas join event A dengan event B_n tersebut.

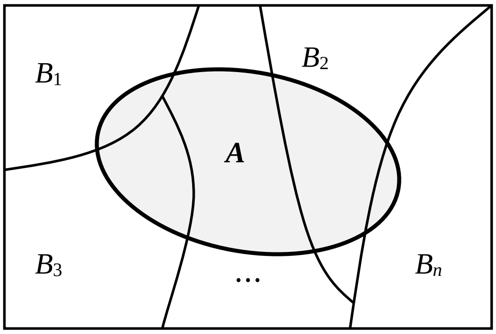
PROBABILITAS TOTAL

Probabilitas dari event *A*,*P*(*A*), dalam suatu ruang sampel *S* dapat diekspresikan dalam probabilitas bersyarat. Anggap terdapat *N* event *mutually exclusive*B_n, $n = 1, 2, \cdots, N$ seperti yang terdapat pada gambar. Event-event ini memenuhi

$$B_m \cap B_n = \varnothing \quad m \neq n = 1,2,\cdots,N$$

dan

$$\bigcup_{n=1}^{N} B_n = S$$



Gambar 7Diagram Venn n Event Mutually Exclusive Bn dan EventA

.

Probabilitas total dari event *A* dinyatakan sebagai

$$P(A) = \sum_{n=1}^{N} P(A|B_n)P(B_n)$$

Persamaan diatas dapat dibuktikan melalui penurunan berikut ini.

$$A \cap S = A$$

$$A \cap S = A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n \right) = \bigcup_{n=1}^{N} (A \cap B_n)$$

event $A \cap B_n$ adalah mutually exclusive. Penerapan aksioma ke-3 untuk event-event tersebut menghasilkan

$$P(A) = P(A \cap S) = P\left[\bigcup_{n=1}^{N} (A \cap B_n) \right] = \sum_{n=1}^{N} P(A \cap B_n)$$

Dengan melakukan subsitusi $P(A \cap B_n) = P(A|B_n)P(B_n)$ pada persamaan di atas diperoleh persamaan probabilitas total untuk event *A*.

Misal, *N*=2 maka

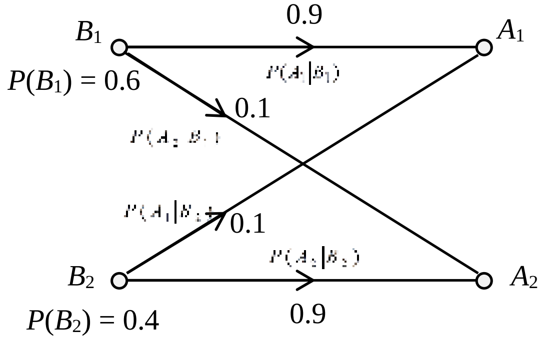
$$P(A) = \sum_{n=1}^{2} P(A \cap B_n) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)$$

$$= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) = \sum_{n=1}^{2} P(A|B_n)P(B_n)$$

CONTOH

Dalam sistem komunikasi biner terdiri dari transmitter yang mengirim satu dari dua simbol (0 atau 1) pada kanal sampai ke receiver. Adanya eror pada sistem menyebabkan terjadinya penerimaan simbol yang salah oleh receiver. Misalkan simbol 0 yang dikirim oleh transmitter diterima oleh receiver sebagai simbol 1. Probabilitas receiver membuat kesalahan keputusan adalah sama dengan 0.1, sedangkan probabilitas simbol 1 yang ditransmisikan adalah 0.6. Notasikan B_i adalah simbol yang dikirim dan A_i adalah simbol yang diterima dengan *i*=1 untuk simbol 1, dan *i*=2 untuk simbol 0. Probabilitas simbol yang diterima berasal dari simbol sama yang dikirim adalah 0.9. Hitung probabilitas simbol diterima, yaitu $P(A_1)$ dan $P(A_2)$.

Sistem Komunikasi dalam contoh ini dapat diilustrasikan dengan diagram berikut:



Gambar 8Sistem Komunikasi Biner

Probabilitas bahwa simbol 1 dan 0 yang dikirim adalah

$$P(B_1) = 0.6 \; P(B_2) = 0.4$$

dan probabilitas simbol diterima diperoleh dari simbol dikirim (probabilitas transisi) adalah

$$P(A_1|B_1) = 0.9; \; P(A_2|B_1) = 0.1$$

$$P(A_1|B_2) = 0.1; \; P(A_2|B_2) = 0.9$$

Probabilitas simbol 1 yang diterima, A_1,

$$P(A_1) = P(A_1|B_1)P(B_1) + P(A_1|B_2)P(B_2)$$

$$= 0.9(0.6) + 0.1(0.4) = 0.58$$

Probabilitas simbol 0 yang diterima, A_2,

$$P(A_2) = P(A_2|B_1)P(B_1) + P(A_2|B_2)P(B_2)$$

$$= 0.1(0.6) + 0.9(0.4) = 0.42$$

RINGKASAN

Probabilitas total digunakan untuk mencari probabilitas event tertentu (A) berdasarkan event-event lain (B_n) yang *mutually exclusive*dan *collectively exhaustive*dalam ruang sampel yang sama.

Probabilitas event A tersebut dinyatakan sebagai jumlah dari probabilitas join event A dengan event B_n.

LATIHAN

Sistem komunikasi seperti contoh dikembangkan untuk kasus tiga simbol yang ditransmisikan yaitu 0, 1 dan 2. Asumsikan probabilitas transisi pada kanal adalah sama yaitu $P(A_i|B_j) = 0.1$ untuk $i \neq j$ dan $P(A_i|B_j) = 0.8$

untuk $i = j = 0, 1, 2$. Probabilitas simbol 0, 1, dan 2 ditransmisikan adalah $P(B_0) = 0.5$, $P(B_1) = 0.3$ dan $P(B_2) = 0.2$.

a. Sket model secara diagram sistem komunikasi tersebut.

b. Hitung probabilitas simbol diterima $P(A_0), P(A_1)$ dan $P(A_2)$

1.3.2 Teorema Bayes

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menghitung probabilitas posteriori suatu eksperimen acak.

PENGANTAR

Teorema Bayes digunakan untuk mengestimasi suatu informasi atau hasil eksperimen berdasarkan probabilitas event yang diketahui sebelum eksperimen tersebut dilakukan. Aplikasi teorema Bayes banyak digunakan dalam sistem komunikasi.

TEOREMA BAYES

Definisi probabilitas bersyarat dapat digunakan pada dua event, yaitu

$$P(B_n|A) = \frac{P(B_n \cap A)}{P(A)}$$

atau

$$P(A|B_n) = \frac{P(A \cap B_n)}{P(B_n)}$$

Dengan menggunakan persamaan probabilitas bersyarat, diperoleh

$$P(B_n|A) = \frac{P(A|B_n)P(B_n)}{P(A)}$$

Substitusi *P*(*A*) dengan menggunakan rumus probabilitas total, teorema Bayes dapat dinyatakan dalam persamaan

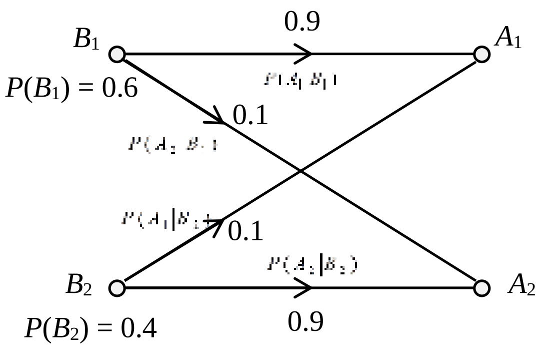
$$P(B_n|A) = \frac{P(A|B_n)P(B_n)}{P(A|B_1)P(B_1) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N)} \quad n = 1, 2, 3, \cdots, N$$

Probabilitas $P(B_n)$ biasanya disebut dengan probabilitas priori, karena probabilitas ini diberikan pada event B_n sebelum eksperimen dilakukan. Begitu juga dengan $P(A|B_n)$ diketahui sebelum eksperimen dilakukan. Dalam konteks komunikasi probabilitas ini disebut dengan probabilitas transisi. Sedangkan $P(B_n|A)$ disebut dengan probabilitas posteriori, karena probabilitas ini diketahui setelah eksperimen dan event *A* telah terjadi.

CONTOH

Dalam sistem komunikasi biner terdiri dari transmitter yang mengirim satu dari dua simbol sinyal (0 atau 1) pada kanal sampai ke receiver. Adanya eror pada sistem menyebabkan terjadinya penerimaan sinyal yang salah oleh receiver. Misalkan sinyal 0 yang dikirim oleh transmitter diterima oleh receiver sebagai sinyal 1. Probabilitas receiver membuat kesalahan keputusan acak adalah sama dengan 0.1, sedangkan probabilitas simbol 1 yang ditransmisikan adalah 0.6. Notasikan B_i adalah simbol yang dikirim dan A_i adalah simbol yang diterima dengan i=1 untuk simbol 1, dan i=2 untuk simbol 0. Probabilitas simbol yang diterima berasal dari simbol sama yang dikirim adalah 0.9. Hitung probabilitas posteriori untuk tiap simbol.

Sistem Komunikasi dalam contoh ini dapat diilustrasikan dengan diagram berikut:



Tabel 4Sistem Komunikasi Biner Simetris

Probabilitas bahwa simbol 1 dan 0 yang dikirim adalah

$$P(B_1) = 0.6 \; P(B_2) = 0.4$$

dan probabilitas transisi

$$P(A_1 | B_1) = 0.9$$

$$P(A_2 | B_1) = 0.1$$

$$P(A_1 | B_2) = 0.1$$

$$P(A_2 | B_2) = 0.9$$

Probabilitas simbol 1 yang diterima, A_1,

$$P(A_1) = P(A_1 | B_1)P(B_1) + P(A_1 | B_2)P(B_2)$$

$$= 0.9(0.6) + 0.1(0.4) = 0.58$$

Probabilitas simbol 1 yang diterima, A_2,

$$P(A_2) = P(A_2 | B_1)P(B_1) + P(A_2 | B_2)P(B_2)$$

$$= 0.1(0.6) + 0.9(0.4) = 0.42$$

Probabilitas posteriori untuk simbol yang diterima berasal dari simbol yang sama

$$P(B_1 | A_1) = \frac{P(A_1 | B_1)P(B_1)}{P(A_1)} = \frac{0.9(0.6)}{0.58} = \frac{0.54}{0.58} \approx 0.931$$

$$P(B_2 | A_2) = \frac{P(A_2 | B_2)P(B_2)}{P(A_2)} = \frac{0.9(0.4)}{0.42} = \frac{0.36}{0.42} \approx 0.857$$

Probabilitas posteriori untuk simbol yang diterima berbeda dengan simbol yang dikirim

$$P(B_1 | A_2) = \frac{P(A_2 | B_1)P(B_1)}{P(A_2)} = \frac{0.1(0.6)}{0.42} = \frac{0.06}{0.42} \approx 0.143$$

$$P(B_2 | A_1) = \frac{P(A_1 | B_2)P(B_2)}{P(A_1)} = \frac{0.1(0.4)}{0.58} = \frac{0.04}{0.58} \approx 0.069$$

RINGKASAN

- Probabilitas priori diketahui (diberikan) sebelum eksperimen dilakukan.
- Probabilitas posteriori dapat dihitung dengan menggunakan teorema Bayes bila eksperimen telah dilakukan dan terjadi event tertentu yang diamati.

LATIHAN

Sistem komunikasi seperti contoh dikembangkan untuk kasus tiga simbol yang ditransmisikan yaitu 0, 1 dan 2. Asumsikan probabilitas transisi pada kanal adalah sama yaitu $P(A_i|B_j) = 0.1$ untuk $i \neq j$ dan $P(A_i|B_j) = 0.8$ untuk $i = j = 0,1,2$. Probabilitas simbol 0,1,2 ditransmisikan adalah $P(B_0) = 0.5$, $P(B_1) = 0.3$ dan $P(B_2) = 0.2$.

c. Sket model secara diagram sistem komunikasi tersebut.
d. Hitung probabilitas simbol diterima $P(A_0), P(A_1)$ dan $P(A_2)$
e. Hitung probabilitas posteriori untuk sistem ini.
f. Bila probabilitas $P(B_i) = 1/3, i = 0, 1, 2$; ulangi soal (c).

1.4 EventIndependent

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menghitung probabilitas suatu event berdasarkanpengetahuan tentang kejadian event lain yang independen secara statistik.

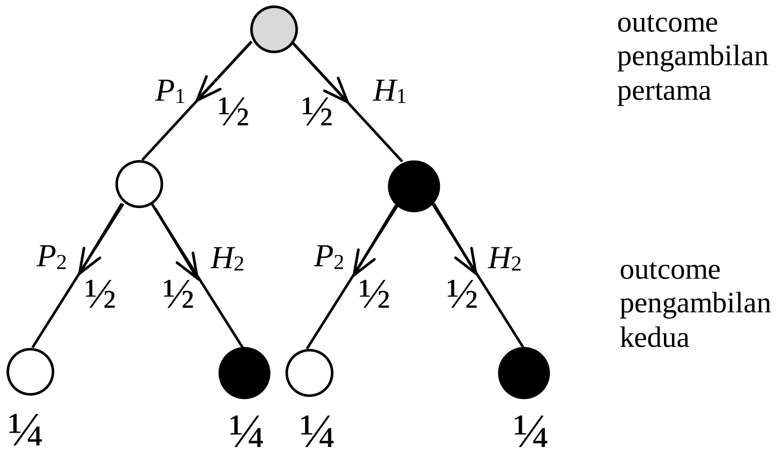
PENGANTAR

Pengetahuan tentang terjadinya suatu event dapat mengubah atau tidak mengubah probabilitas event yang lain. Jika probabilitas terjadinya suatu event tidak bergantung pada terjadinya event lain, maka event-event tersebut disebut event independen secara statistik.

EVENTINDEPENDENT

Eksperimen yang akan dilakukan adalah "ambil bola dua kali dari dalam kotak yang berisi 10 bola terdiri dari 5 bola putih dan 5 bola hitam'. Catat warna bola terambil (warna bola dalam kotak tidak dapat dilihat dari luar). Bola yang sudah terambil pada pengambilan pertama dikembalikan lagi ke dalam kotak.

Hasil eksperimen ini dapat dinyatakan dalam tree diagram berikut:



Gambar 9Diagram Pohon Eksperimen Pengambilan Bola Dengan Pengembalian Bola Terambil

Bila *B* adalah event bola putih terambil pada pengambilan pertama dan *A* adalah event bola putih terambil pada pengambilan kedua, maka dari tree diagram tampak bahwa probabilitas bola putih kedua terambil tidak bergantung pada hasil pengambilan pertama.

Jadi, probabilitas event *A* tidakbergantung pada terjadinya event *B*.

Dua event *A* dan *B* memunyai probabilitas tak nol, jadi diasumsikan $P(A) \neq 0$ dan $P(B) \neq 0$. Event *A* dan *B* disebut event-event independent secara statistik bila probabilitas terjadinya dari satu event tidak dipengaruhi oleh terjadinya event lain. Secara matematis untuk event-event independent secara statistik, berlaku

$$P(A|B) = P(A)$$

atau

$$P(B|A) = P(B)$$

untuk event-event independen secara statistik.

Ketakbergantungan(independensi) event juga memunyai arti bahwa probabilitas dari kejadian yang bersamaan (interseksi) dari dua event harus sama dengan perkalian dari probabilitas kedua event tersebut.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

CONTOH

Eksperimen berikut merupakan pengambilan sebuah bola dari sebuah kotak. Kotak berisi dua bola hitam yang diberi nomor 1 dan 2, dan dua bola putih yang diberi nomor 3 dan 4. Nomor dan warna bola dicatat sebagai hasil eksperimen. Definisikan event *A* sebagai event terpilihnya bola hitam, event *B* adalah event bola bernomor genap dan event *C* adalah nomor bola lebih besar dari 2. Buktikan apakah event *A* dan *B* atau *A* dan *C* independent.

Ruang sampel eksperimen

$$S = \{(1,h),(2,h),(3,p),(4,p)\}$$

dan event

$$A = \{(1,h),(2,h)\}$$

$$B = \{(2,h),(4,p)\}$$

$$C = \{(3,p),(4,p)\}$$

diperoleh

$$P(A) = P(B) = 0.5$$

$$P(A \cap B) = P(\{(2,h)\}) = 0.25$$

Jadi

$$P(A \cap B) = 0.25 = P(A)P(B)$$

Karena probabilitas interseksi *A* dan *B* sama dengan perkalian dari probabilitas *A* dan *B*, maka event *A* dan *B* independent. Independensi *A* dan *B* juga dapat dibuktikan melalui persamaan berikut:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{(2,h)\})}{P(\{(2,h),(4,p)\})} = \frac{0.25}{0.5} = 0.5$$

$$P(A)=\frac{P(A)}{P(S)}=\frac{P(\{(1,h),(2,h)\})}{P(\{(1,h),(2,h),(3,p),(4,p)\})}=\frac{0.5}{1}=0.5$$

Dua persamaan diatas menyatakan bahwa $P(A)=P(A|B)$ jadi pengetahuan terjadinya *B* tidak mengubah probabilitas terjadinya *A*.

Event *A* dan *C* tidak independent karena $P(A\cap C)=0$

A dan *C* adalah mutually exclusive karena $A\cap C=\varnothing$, sehingga terjadinya *C* berimplikasi bahwa *A* jelas tidak terjadi.

Secara umum, bila dua event memunyai probabilitas tak nol dan mutually exclusive maka event-event tersebut tidak dapat menjadi event independent. Jika dua event adalah independent dan mutually exclusive, maka

$$0=P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

Persamaan ini menyatakan bahwa paling tidak salah satu event tersebut harus memunyai probabilitas nol.

RINGKASAN

- Dua event adalah independent bila pengetahuan tentang terjadinya salah satu event tidak mengubah probabilitas event yang lainnya.
- Probabilitas joint dari dua event independent sama dengan perkalian masing-masing probabilitas event tersebut.
- Event-event mutually exclusive yang memunyai nilai probabilitas tidak nol tidak dapat menjadi event independent.

LATIHAN

Monitor dua panggilan telepon berturutan pada sentral telepon. Panggilan telepon diklasifikasikan sebagai panggilan suara (bila ada pembicaraan) dan panggilan data. Hasil observasi adalah sekuen dari dua huruf, misal *sd* adalah observasi satu panggilan suara dan satu panggilan data. Dua panggilan telepon tersebut adalah independent. Probabilitas panggilan suara adalah 0.8. N_S

merupakan notasi untuk banyaknya panggilan suara. Apakah pasangan event $\{ N_S = 2\}$ dan $\{ N_S \geq 1\}$ adalah independent?

1.5 Keandalan Sistem

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu mengaplikasikan konsep probabilitas untuk memeroleh nilai keandalan suatu sistem yang tersusun dalam konfigurasi seri, paralel atau seri-paralel.

PENGANTAR

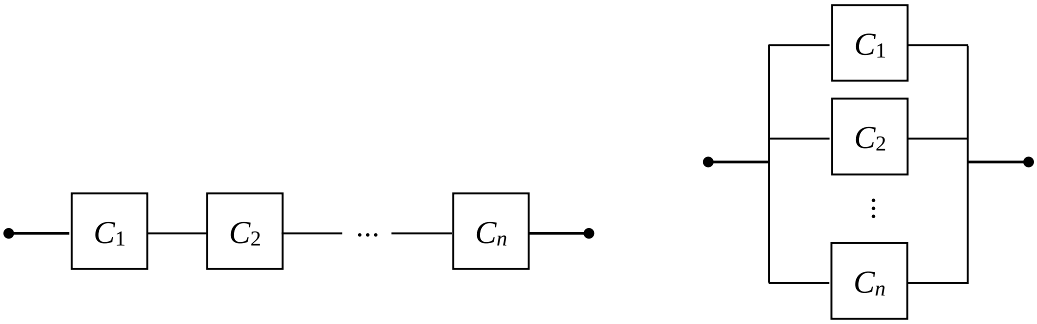
Salah satu aplikasi konsep probabilitas adalah untuk menghitung keandalan suatu sistem. Keandalan sistem dapat dianalisis berdasarkan struktur sistem yang dapat tersusun dalam konfigurasi seri dan paralel atau gabungan dari keduanya.

KEANDALAN SISTEM

Keandalan merupakan perhatian utama dalam desain sistem modern. Sebagai contoh, sistem pembangkit daya listrik yang dapatmemenuhikonsumsi daya pada konsumen. Keandalan sistem merupakan hal yang sangat penting yang menjamin bahwa sistem ini terus beroperasi bahkan bila terjadi beberapa kerusakan yang terjadi pada satu subsistem dalam sistem tersebut. Pertanyaan kuncinya adalah bagaimana caranya membangun sistem yang dapat diandalkan bahkan mungkin dari komponen yang tidak dapat diandalkan? Model probabilitas merupakan sebuah alat untuk menjawab pertanyaan ini secara kuantitatif.

Pengoperasiansistem membutuhkanoperasibeberapa atausemua komponennya. Sebagai contoh, sistem seriakan berfungsihanya jikasemua komponennyaberfungsi, dan sistem paralelakan berfungsiselamasetidaknya satukomponennyaberfungsi. Sistem yang lebih kompleksdapat diperolehsebagaikombinasidaridua konfigurasidasar ini.

Berdasarkan pengalaman, tidak mungkin untuk memprediksi secara tepat kapan suatu komponen akan rusak (gagal). Evaluasi keandalan sistem menjadi mungkin melalui teori probabilitas dengan menggunakan nilai probabilitas komponen atau sistem saat masih berfungsi.



(a) (b)

Gambar 10 (a) Konfigurasi Seri (b) Konfigurasi Paralel

Sistem dalam konfigurasi seri dikatakan berfungsi bila semua komponen yang menyusun sistem berfungsi. Probabilitas sistem berfungsi adalah sama dengan probabilitas semua komponen berfungsi. Definisikan event *F* sebagai sistem berfungsi dan event $A_i$adalah komponen $C_i$berfungsi dengan i= 1, 2, ⋯, *n*. Dengan mengasumsikan bahwa kerusakan semua kompenen adalah independen, maka

Sistem seri berfungsi ≅ semua komponen berfungsi

= C_1 berfungsi dan C_2 berfungsi dan⋯dan C_n berfungsi

$$F = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

Bila probabilitas komponen berfungsi adalah *p*, maka probabilitas sistem seri berfungsi dinyatakan sebagai

$$P(F) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) = p^n$$

Sistem dalam konfigurasi paralel dikatakan berfungsi bila satu atau lebih komponen dalam sistem berfungsi. Untuk memudahkan analisis, sistem berfungsi dapat dinyatakan sebagai komplemen dari sistem rusak. Oleh karena itu, sistem dikatakan rusak bila semua komponen dalam sistem rusak, maka

$$F^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c$$

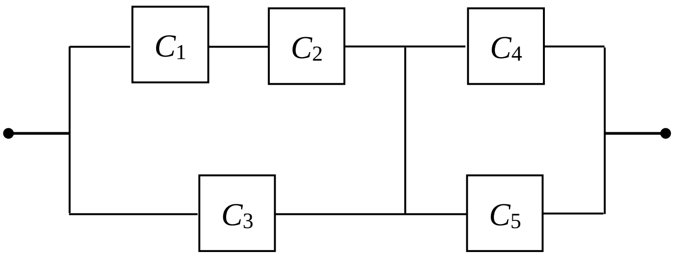
Probabilitas sistem paralel berfungsi

$$P(F) = 1 - (P(A_1^c)\, P(A_2^c) \cdots P(A_n^c)) = 1 - (1 - p)^n$$

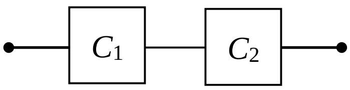
dengan asumsi kegagalan komponen adalah independen dan probabilitas komponen berfungsi adalah p, maka $P(A_i) = p$ dan $P(A_i^c) = 1 - p$.

CONTOH 1

Suatu sistem memiliki konfigurasi seperti dalam gambar. Dapatkan probabilitas sistem tersebut berfungsi dengan asumsi bahwa kerusakan seluruh komponen adalah independen. Definisikan event A_i adalah komponen C_i berfungsi. Probabilitas komponen C_1 dan C_2 berfungsi adalah 0.9, dan probabilitas komponen C_3, C_4 dan C_5 berfungsi adalah 0.8.



Subsistem seri (komponen C_1 dan C_2):



Probabilitas subsistem seri:

$$P(F_{seri}) = P(A_1)\, P(A_2) = 0.9(0.9) = 0.81$$

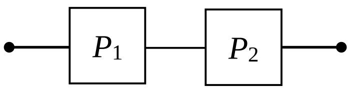
Probabilitas subsistem paralel pertama (seri atau C_3):

$$P(F_{P1}) = 1 - P(F_{seri}^c)\, P(A_3^c) = 1 - (1 - 0.81)(1 - 0.8) = 0.962$$

Probabilitas subsistem paralel kedua (C_4 atau C_5):

$$P(F_{P2}) = 1 - P(A_4^c)\, P(A_5^c) = 1 - (1 - 0.8)(1 - 0.8) = 0.96$$

Rangkaian ekuivalen sistem:

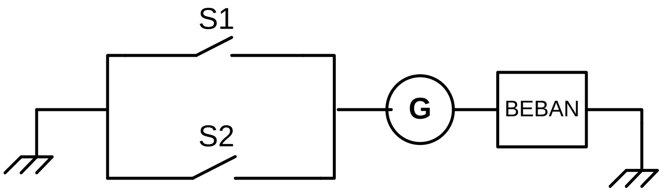


Jadi, probabilitas sistem adalah

$$P(F) = P(F_{P1})\,P(F_{P2}) = (0.962)(0.96) = 0.9235$$

CONTOH 2

Suatu sistem catu daya seperti pada gambar terdiridari dari subsistem switch dan generator. Probabilitas switch 1 dan 2 berfungsi adalah 0.9 dan probabilitas generator berfungsi 0.8, serta probabilitas switch 2 rusak bila switch 1 rusak sama dengan 0.4. Berapa probabilitas sistem tersebut berfungsi pada saat diperlukan.



Sistem berfungsi adalah ekuivalen dengan subsistem switch dan generator berfungsi.

Jadi,

$$\begin{aligned} P(\text{sistem berfungsi}) &= P(\text{switch baik})P(\text{generator baik}) \\ &= (1 - P(\text{switch rusak}))P(\text{generator baik}) \\ &= (1 - P(\text{switch 1 rusak dan switch 2 rusak}))P(\text{generator baik}) \\ &= (1 - P(S_1^c \cap S_2^c))P(G) \end{aligned}$$

Karena kerusakan switch 2 (S_2) bergantung pada kerusakan switch 1(S_1), maka berdasarkan teori probabilitas bersyarat

$$P(S_2^c \cap S_1^c) = P(S_2^c \mid S_1^c)P(S_1^c) = 0.4(0.1) = 0.04$$

Proabilitas sistem berfungsi:

$$P(\text{sistem berfungsi}) = (1 - 0.04)(0.8) = 0.768$$

RINGKASAN

- Bila kerusakan komponen adalah independen, probabilitas sistem seri berfungsi adalah sama dengan perkalian probabilitas masing-masing komponen berfungsi.
- Bila kerusakan (kegagalan) komponen adalah independen, probabilitassistem paralel berfungsi adalah sama dengan 1 (satu) dikurangi perkalian probabilitas kerusakan (kegagalan) masing-masing komponen.
- Probabilitas sistem gabungan seri-paralel dianalisis berdasarkan ekuivalensi sistem dalam hubungan seri dan/atau paralel.

LATIHAN

Sistem terdiri dari sebuah kontroler dan tiga unit peripheral. Sistem disebut berfungsi bila kontroler dan minimal dua peripheral berfungsi. Dapatkan probabilitas sistem tersebut berfungsi dengan asumsi bahwa kerusakan seluruh komponen adalah independen. (Petunjuk: definisikan event A adalah kontroler berfungsi dan B_i adalah peripheral berfungsi)

2 Variabel Acak Diskrit

2.1 Konsep Variabel Acak Diskrit

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menjelaskan konsep variabel acak diskrit dan mengidentifikasi hasil observasi dari eksperimen acak yang dapat digolongkan dalam variabel acak diskrit.

PENGANTAR

Model probabilitas dimulai dengan model fisik suatu eksperimen. Eksperimen terdiri dari prosedur dan observasi. Himpunan seluruh observasi yang mungkin, *S*, merupakan ruang sampel dari eksperimen tersebut. *S* merupakan awal dari model matematis probabilitas. Model matematika ini berisiaturan yangmenugaskanbilangan antara0dan1untuk mengaturevent *A*di*S*.Jadi,untuk setiap *A* merupakan himpunan bagian dari *S*, modelmenetapkan probabilitasdari *A*dengan $0 \le P(A) \le 1$.

KONSEP VARIABEL ACAK

Notasi yang digunakan untuk variabel acak adalah huruf kapital, misalnya *X*. Himpunan seluruh nilai yang mungkin dalam *X*merupakan kisaran (range)*X*. Range dari variabel acakdinotasikan dengan huruf *S* dengan subscript yang merupakan nama dari variabel acak. Sebagai contoh, S_X adalah range dari variabel acak *X*, S_Y adalah range variabel acak *Y*, dan sebagainya. PenggunaanS_X untuk menotasikan range *X*disebabkan karena himpunan seluruh nilai yang mungkin dari *X* adalah analog dengan *S*, yaitu himpunan dari seluruh outcome yang mungkin dalam eksperimen.

Sebuah modelprobabilitasselalu dimulaidengan eksperimen. Setiap variable acakberkaitan langsung denganeksperimen ini. Terdapat tigajenis hubungan antara variabel acak dengan observasi yang dilakukan dalam suatu eksperimen.

Variabel acak adalah sama dengan observasi yang dilakukan dalam eksperimen.

Tipe variabel acak ini didefinisikan secara langsung dari observasi yang dilakukan dalam suatu eksperimen. Misalkan, dalam eksperimen 'hitung banyaknya hit' dalam website Teknik Elektro ITS. Variabel acak *X* didefinisikan sebagai jumlah dari banyaknya hit, maka hasil observasi dalam eksperimen tersebut adalah variabel acak. Karenanya, range*X* dan ruang sampel adalah identik.

Variabel acak merupakan fungsi dari observasi

Eksperimen dilakukan untuk mengujiempat IC apakah diterima atau ditolak. Observasi dari eksperimen tersebut adalah urutan (sekuen)empat huruf, yaitu*a* (diterima) atau*r* (ditolak). Sebagai contoh, s_1 = *aaaa*, s_2 = *araa*, s_3= *aara* dan seterusnya. Ruang sampel *S* terdiri dari 16 sekuen yang mungkin. Variabel acak terkait eksperimen ini dinotasikan *N*, yaitu jumlah IC yang diterima. Untuk $s_2$dan s_3, maka *N* = 3 (IC yang diterima). Jadi, range*N* adalah S_N = {0, 1, 2, 3, 4}.

Variabel acak merupakan fungsi dari variabel acak lain.

Dalam eksperimen pengujian empat IC, definisikan variabel acak baru *Y* yang merupakan fungsi dari dua kali banyaknya IC yang diterima. Hubungan *Y* terkait dengan *N* adalah

$$Y = f(N) = 2N$$

Karena S_N = {0, 1, 2, 3, 4}, maka range*Y* adalah S_Y = {0, 2, 4, 6, 8}

X disebut variabel acak diskrit jika range dari *X* adalah himpunan yang dapat dihitung, dengan ruang sampel $S_X = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$. Jadi, himpunan nilai yang mungkin *S* dapat ditabelkan meskipun tabel tersebut mungkin sangat panjang. Sebaliknya, variabel acak *Y* yang dapat dinyatakan pada setiap bilangan real dalam interval $a \le y \le b$ disebut variabel acak kontinu.

Bila range dari variabel acak *X* adalah terbatas

$$S_X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

disebut variabel acak diskrit terbatas. Variabel acak diskrit biasanya memuat nilai-nilai integer, meskipun dalam beberapa kasus tertentu dapat bernilai bukan integer.

CONTOH

Variabel acak berikutdidefinisikan sebagai

X: jumlah mahasiswa yang memeroleh nilai *A* dalam MK Probabilitas dan Proses Stokastik

Y: jumlah panggilan telepon yang dijawab dalam tiap jam

Z: jumlah menit waktu tunggu untuk menjawab panggilan telepon berikutnya

Tentukan tipe dari variabel acak tersebut ke dalam variabel acak diskrit atau kontinu.

Variabel acak *X* dan *Y* merupakan variabel acak diskrit, dengan nilai yang mungkin untuk variabel acak tersebut merupakan himpunan nilai yang dapat dihitung.

Variabel acak *Z* memiliki ruang sampel kontinu yang dapat berupa bilangan real tak negatif. Oleh karena itu, variabel acak *Z* adalah variabel acak kontinu.

RINGKASAN

- Variabel acak diskrit merupakan variabel acak yang memiliki range yang dapat dihitung.
- Pada umumnya, variabel acak diskrit memiliki titik-titik nilai berupa integer (bilangan bulat).

LATIHAN

Ruang sampel suatu eksperimen adalah $S = \{1, 2, 3, 5, 8, 12\}$. Variabel acak *X* didefinisikan sebagai $X = 2s - 1$. Catat seluruh nilai yang mungkin dari variabel acak *X*.

2.2 Fungsi Variabek Acak

2.2.1 PMF Variabel Acak Diskrit

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menghitung probabilitas event menggunakan fungsi massa probabilitas variabel acak diskrit.

PENGANTAR

Dalam bahasan berikut, dikenalkan model probabilitas yang menugaskan bilangan antara 0 dan 1 untuk tiap outcome bernilai diskrit dari eksperimen. Model probabilitas untuk variabel acak diskrit *X* ini dideskripsikan sebagai fungsi massa probabilitas dalam range seluruh bilangan real.

FUNGSI MASSA PROBABILITAS

Fungsi massa probabilitas (*probability mass function*–PMF) didefinisikan sebagai

$$P_X(x) = P(X = x)$$

Amati notasi yang digunakan pada variabel acak dan PMF. Pada variabel acak, huruf besar (*X*) menyatakan nama variabel dan huruf kecil (*x*) digunakan untuk nilai yang mungkin dalam variabel tersebut. Notasi untuk PMF adalah *P* dengan *subscript* menunjukkan nama variabel.

PMF berisi seluruh informasi tentang variabel acak *X*. Karena $P_X(x)$ adalah probabilitas dari event $\{X=x\}$, maka $P_X(x)$ memunyai beberapa sifat penting yang diturunkan dari aksioma probabilitas untuk variabel acak diskrit.

Sifat-sifat PMF

1. $P_X(x) \geq 0 \quad \forall x$

PMF variabel acak diskrit selalu bernilai tak negatif.

2. $\sum_{x \in S_X} P_X(x) = 1$

Jumlah PMF dari variabel acak *X* sama dengan 1.

CONTOH

Tinjau eksperimen 'lempar sebuah dadu'. Variabel acak *Y* didefinisikan sebagai jumlah mata dadu yang muncul pada permukaan atas.

a. Dapatkan PMF dan sket PMF dari *Y* tersebut.

b. Hitung $P(Y > 2)$ dan $P(2 \leq Y < 5)$.

Ada 6 outcome dari eksperimen 'lempar sebuah dadu' dengan tiap outcome memunyai probabilitas 1/6. Variabel acak *Y* adalah jumlah mata dadu yang muncul pada permukaan atas, jadi probabilitas tiap event adalah

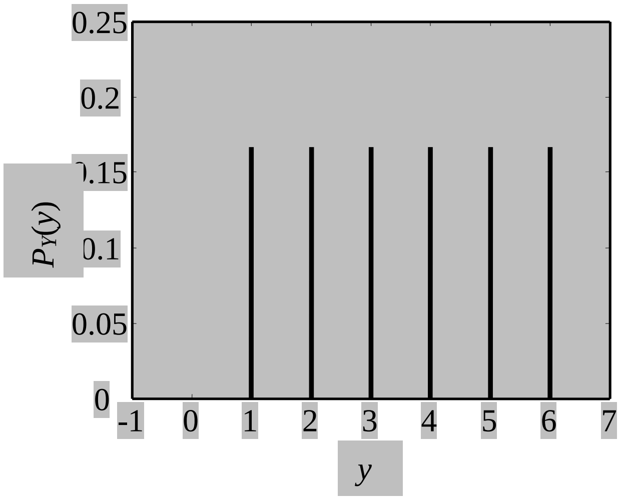
$$P(Y=1) = 1/6;\ P(Y=2) = 1/6;\ P(Y=3) = 1/6$$

$$P(Y=4) = 1/6;\ P(Y=5) = 1/6;\ P(Y=6) = 1/6$$

Secara matematis, PMF ditulis dalam bentuk

$$P_Y(y) = \begin{cases} 1/6 & 1 \leq y \leq 6 \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases}$$

Plot PMF dari variabel acak *Y* seperti pada gambar berikut:



b. Probabilitas {Y>2} adalah

$$P(Y>2)=1-P(Y\leq 2)=1-(P(Y=1)+P(Y=2))=1-(2/6)=4/6$$

atau dapat dihitung dengan cara

$$P(Y>2)=P(Y=3)+P(Y=4)+P(Y=5)+P(Y=6)=4/6$$

Probabilitas {2 ≤ Y< 5} adalah

$$P(2\leq Y<5)=P(Y=2)+P(Y=3)+P(Y=4)=(1/6)+(1/6)+(1/6)=3/6$$

Bentuk PMF dari variabel acak Y dalam contoh ini disebut uniform diskrit. Secara umum, PMF variabel acak uniform diskrit memiliki bentuk sebagai berikut:

$$P_Y(y)=\begin{cases}1/(l-k+1) & y=k,k+1,k+2,\cdots,l \\ 0 & \text{yang lain}\end{cases}$$

di mana parameter k dan l adalah integer dengan $k<l$.

RINGKASAN

- PMF dari variabel acak X didefinisikan sebagai probabilitas event {X=x}
- PMF selalu bernilai tak negatif.
- Jumlah PMF dari suatu variabel acak sama dengan 1

LATIHAN

Dua IC dari pabrik XYZ dites apakah IC tersebut diterima (a) atau ditolak (r). Setiap IC yang diterima (a) diberi poin 1.

Ada 4 outcome dari eksperimen ini: *aa*, *ar*, *ra*, *rr* dengan tiap outcome memunyai probabilitas ¼. Variabel acak X adalah tiga nilai yang mungkin dari tiga event tersebut, yaitu $\{X=0\}=\{rr\}$, $\{X=1\}=\{ar, ra\}$ dan $\{X=2\}=\{aa\}$.

a) Dapatkan PMF dari variabel acak X dalam representasi matematis dan grafis.

b) Hitung $P(X\leq 1)$ dan $P(X>1)$.

2.2.2 CDF Variabel Acak

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menghitung probabilitas suatu event menggunakan fungsi distribusi kumulatif (*cumulative distribution function* – CDF) variabel acak diskrit.

PENGANTAR

Deskripsi model probabilitas untuk variabel acak diskrit dapat ditunjukkan melalui fungsi distribusi kumulatif. Fungsi ini merupakan penjumlahan probabilitas massa dari tiap nilai dalam variabel acak tersebut. Secara grafis, fungsi distribusi variabel acak diskrit memunyai bentuk tangga dengan tinggi tiap anak tangga sama dengan probabilitas tiap nilai dalam variabel tersebut.

FUNGSI DISTRIBUSI KUMULATIF

Fungsi distribusi kumulatif (*cumulative distribution function* – CDF)variabel acak Xdidefinisikan sebagai probabilitas event $\{X \leq x\}$:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Event $\{X \leq x\}$ dan probabilitasnya bervariasi sesuai dengan nilai x, karenanya $F_X(x)$ merupakan fungsi dari variabel x.

Bila nilai tertentu dalam variabel acak diskrit$X$ dinotasikan x_i, maka fungsi distribusi kumulatif,$F_X(x)$,dapat juga ditulis sebagai

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^{N} P_X(x_i)\, u(x - x_i)$$

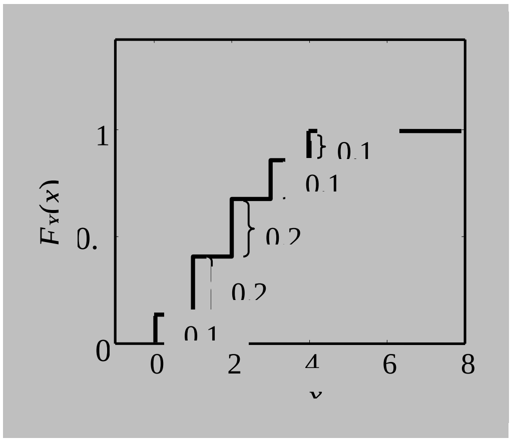
di mana $u(.)$ merupakan fungsi tangga satuan (*stairstep*) yang didefinisikan dengan

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Dan

$$P_X(x_i) = P(X = x_i)$$

adalah fungsi massa probabilitas (PMF).



variabel acak diskrit *X* memunyai bentuk *stairstep* seperti pada gambar berikut. Amplitudo dari step sama dengan probabilitas terjadinya nilai *x* pada step tersebut.

Sifat-sifat CDF variabel acak diskrit

a. $F_X(-\infty) = 0$ dan $F_X(\infty) = 1$

$F_X(x)$ dimulai dari nol dan berakhir pada nilai satu.

b. untuk semua $x' \geq x$, $F_X(x') \geq F_X(x)$

CDF tidak pernah turun, dari kiri ke kanan

CONTOH

Tinjau eksperimen 'lempar sebuah dadu'. Variabel acak *Y*didefinisikan sebagai jumlah mata dadu yang muncul pada permukaan atas.

a. Dapatkan CDF dan sket CDF dari *X* tersebut.

b. Hitung $P(Y \leq 3)$, $P(Y>2)$dan $P(2 \leq Y < 5)$.

a. Fungsi distribusi kumulatif (CDF) variabel acak *Y* adalah

$$F_Y(y) = \frac{1}{6}u(y-1) + \frac{1}{6}u(y-2) + \frac{1}{6}u(y-3) + \frac{1}{6}u(y-4)$$
$$+\frac{1}{6}u(y-5) + \frac{1}{6}u(y-6)$$

dengan plot CDF dari variabel acak *Y* seperti pada gambar.

b. Probabilitas $\{Y \leq 3\}$ adalah

$$P(Y \leq 3) = F_Y(3) = \frac{1}{6}u(3-1) + \frac{1}{6}u(3-2) + \frac{1}{6}u(3-3) + \frac{1}{6}u(3-4)$$
$$+\frac{1}{6}u(3-5) + \frac{1}{6}u(3-6)$$

berdasarkan definisi fungsi tangga satuan bahwa $u(x)$ bernilai 1 (satu) untuk $x \geq 0$ dan bernilai 0 (nol) untuk $x<0$, maka

$$P(Y \leq 3) = F_Y(3) = \frac{1}{6}u(2) + \frac{1}{6}u(1) + \frac{1}{6}u(0) = \frac{3}{6}$$

Probabilitas $\{Y>2\}$ adalah

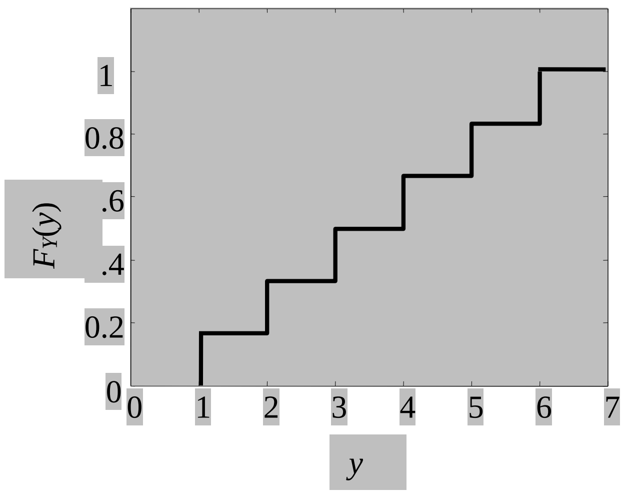
$$P(Y > 2) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - F_Y(2) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

dengan $F_Y(2) = \frac{1}{6}u(1) + \frac{1}{6}u(0) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Probabilitas $\{2 \leq Y < 5\}$ adalah

$$P(2 \leq Y < 5) = P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

.



RINGKASAN

- Fungsi distribusi kumulatif (CDF) dari variabel acak diskrit dideskripsikan dengan jumlah dari fungsi massa probabilitasnya.
- Sket CDF untuk variabel acak diskrit memunyai bentuk tangga dengan tinggi anak tangga menyatakan probabilitas tiap nilai dalam variabel tersebut.

LATIHAN

Dua IC dari pabrik XYZ dites apakah IC tersebut diterima (a) atau ditolak (r). Setiap IC yang diterima diberi poin 1. Ada 4 outcome dari eksperimen ini: aa, ar, ra, rr dengan tiap outcome memunyai probabilitas ¼. Variabel acak X adalah tiga nilai yang mungkin dari tiga event tersebut, yaitu $\{X=0\}=\{rr\}$, $\{X=1\}=\{ar, ra\}$ dan $\{X=2\}=\{aa\}$.

a) Dapatkan CDF dari variabel acak X dalam representasi matematis dan grafis.

b) Hitung $P(X\leq 1)$ dan $P(X>1)$.

2.2.3 Momen Variabel AcakDiskrit

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menghitung nilai momen variabel acak diskrit dalam nilai ekspektasi, varians dan standar deviasi.

PENGANTAR

Selain dinyatakan dengan fungsi probabilitas, variabel acak diskrit dinyatakan juga dalam moment-moment-nya. Dari moment terhadap origin dan moment sentral dapat dikembangkan pengukuran karakteristik variabel acakdalam bentuk nilai. Nilai-nilai tersebut adalah mean dan varians.

MOMENT VARIABEL ACAK DISKRIT

Nilai ekspektasi variabel acak *X* didefinisikan

$$E[X] = \sum_{x \in S_X} x P_X(x)$$

Nilai ekspektasi disebut juga sebagai nilai mean (rata-rata), dan dinotasikan dengan μ_X . Definisi nilai ekspektasi variabel acak ini dapat dijelaskan sebagai berikut. Misalkan, suatu eksperimen menghasilkan variabel acak *X* dan eksperimen tersebut dilakukan sebanyak *n* trial independen. Notasikan nilai *X* pada trial ke-*i* dengan *x*(*i*), maka rata-rata sampel untuk *n* trial tersebut adalah

$$m_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x(i)$$

Asumsikan bahwa tiap $x \in S_X$ terjadi sebanyak N_x kali, maka

$$m_n = \frac{1}{n} \sum_{x \in S_X} N_X\, x = \sum_{x \in S_X} \frac{N_X}{n} x$$

Probabilitas event *A* terjadi sebanyak *N* kali dalam *n* observasi dalam interpretasi frekuensi relatif dinyatakan dengan

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{N_A}{n}$$

dan dalam notasi variabel acak

$$P_X(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{N_X}{n}$$

maka

$$\lim_{n \to \infty} m_n = \sum_{x \in S_X} x P_X(x) = E[X]$$

Varians dari variabel acak *X*

$$\mathrm{var}[X] = \sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2]$$

Karena $(X - \mu_X)^2$ merupakan fungsi *X*, maka varians *X* dapat dihitung dengan rumus berikut:

$$\mathrm{var}[X] = \sigma_X^2 = \sum_{x \in S_X} (x - \mu_X)^2 P_X(x)$$

Akar dari varians, σ_X , disebut standar deviasi dari *X*. Nilai ini adalah ukuran sebaran variabel acak *X* dalam fungsi kepadatan terhadap nilai mean.

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{var}[X]}$$

Varians dapat juga diperoleh dari pengetahuan momen pertama dan kedua, yaitu

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2] = \sum_{x \in S_X} x^2 P_X(x) - \sum_{x \in S_X} 2\mu_X x P_X(x) + \sum_{x \in S_X} \mu_X^2 P_X(x)$$

$$= E[X^2] - 2\mu_X E[X] + \mu_X{}^2$$

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X{}^2$$

CONTOH

Variabel acak *X* memiliki fungsi massa probabilitas berikut:

$$P_X(x) = \begin{cases} 1/4 & x = 0 \\ 1/2 & x = 1 \\ 1/4 & x = 2 \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases}$$

Dapatkan nilai ekspektasi (mean), varians dan standar deviasi dari *X*.

Nilai ekspektasi dari variabel acak *X*:

$$E[X] = \mu_X = 0 \cdot P_X(0) + 1 \cdot P_X(1) + 2 \cdot P_X(2) = 0(1/4) + 1(1/2) + 2(1/4) = 1$$

Varians *X* adalah

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2]$$

$$= (0-1)^2 P_X(0) + (1-1)^2 P_X(1) + (2-1)^2 P_X(2) = (1/4) + (1/4) = 1/2$$

Varians dapat dihitung melalui momen kedua dan momen pertama (nilai ekspektasi):

$$E[X^2] = \sum_{x \in S_X} x^2 P_X(x)$$

$$= 0^2 \cdot P_X(0) + 1^2 \cdot P_X(1) + 2^2 \cdot P_X(2) = (1/2) + 4(1/4) = 6/4$$

jadi, varians *X*:

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2 = (6/4) - (1) = 1/2$$

Standar deviasi X adalah:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{1/2} = 0.707$$

RINGKASAN

- Nilai ekspektasi dari variabel acak merupakan nilai yang diharapkan atau nilai rata-rata (mean) dari variabel acak tersebut.
- Varians dari variabel acak digunakan untuk mengetahui sebaran massa dari variabel acak tersebut terhadap nilai mean.
- Standar deviasi adalah akar dari varians.

LATIHAN

Variabel acak N memiliki fungsi massa probabilitas berikut:

$$P_N(n) = \begin{cases} 0.1 & n = 1 \\ 0.4 & n = 2 \\ 0.5 & n = 3 \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases}$$

Dapatkan nilai ekspektasi (mean) dan varians dari N.

2.3 Model Fungsi Var. Acak Diskrit

2.3.1 ModelPoisson

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menggunakan model Poisson untuk menghitung probabilitas event variabel acak diskrit.

PENGANTAR

Model Poisson merupakan contoh dari model fungsi probabilitas untuk variabel acak diskrit. Model Poisson banyak digunakan dalam aplikasi perhitungan (counting), misalnya berapa jumlah unit cacat dalam produksi lampu pada shift pertama, jumlah panggilan telepon pada layanan antar pesan dalam tiap jam, dan sebagainya.

MODEL POISSON

Fungsi massa probabilitas (PMF) menyatakan probabilitas terjadinya *X* sebanyak *k* dalam selang waktu tertentu didefinisikan dengan

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad k=0,1,2,\cdots$$

denganλ>0 merupakan rate banyaknya kejadian tiap satu satuan waktu.

Fungsi distribusi (CDF) dari *X* didefinisikan sebagai

$$F_X(x)=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}u(x-k)$$

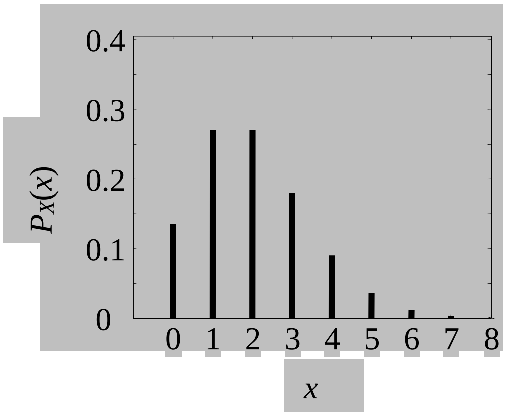
Gambar berikut merupakan deskripsi secara grafis PMF dan CDF model Poisson (λ=2) dari variabel acak *X*.

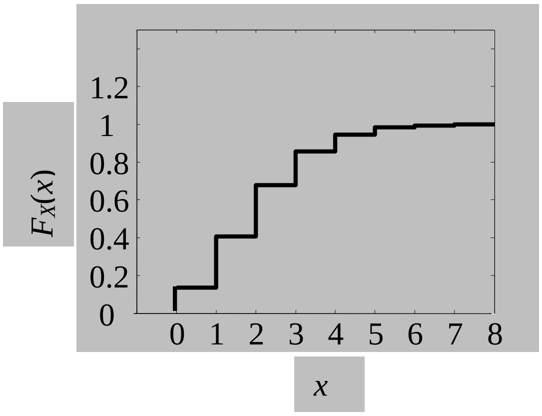
Model Poisson untuk variabel acak *X* memiliki mean

$$E[X]=\lambda$$

dan varians

$$\mathrm{var}(X)=\lambda$$





CONTOH

Komputer akan mengalami downtime bila komponen tertentu rusak. Komponen tersebut mempunyai rata-rata kerusakan 1 kali tiap 4 minggu. Downtime tidak akan mengganggu bila tersedia komponen pengganti. Saat ini, ada satu komponen pengganti di gudang.Hitung probabilitas downtime yang dapat mengganggu komputer tersebut.

X : variabel acak banyaknya kerusakan yang terjadi

X ~ Poisson dengan rate 1 per 4 minggu

$$\lambda = \frac{1}{4}$$

PMF dari X adalah

$$P(X = k) = \frac{(\frac{1}{4})^k e^{-(\frac{1}{4})}}{k!}$$

Untuk k=0,1,2,3,4 dan seterusnya, PMF dari X adalah

$$P(X = 0) = \frac{(\frac{1}{4})^0 e^{-(\frac{1}{4})}}{0!} = 0.7788$$

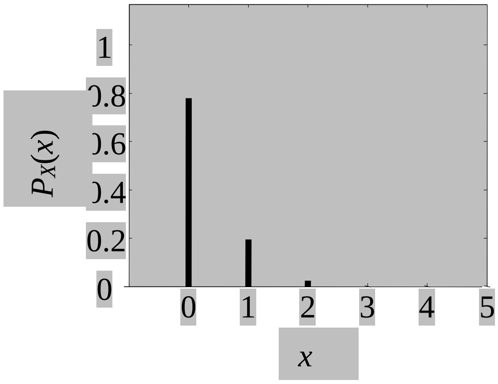
$$P(X = 1) = \frac{(\frac{1}{4})^1 e^{-(\frac{1}{4})}}{1!} = 0.1947$$

$$P(X = 2) = \frac{(\frac{1}{4})^2 e^{-(\frac{1}{4})}}{2!} = 0.0243$$

$$P(X = 3) = \frac{(\frac{1}{4})^3 e^{-(\frac{1}{4})}}{3!} = 0.0020$$

$$P(X = 4) = \frac{(\frac{1}{4})^4 e^{-(\frac{1}{4})}}{4!} = 0.0001$$

Secara grafis, PMF dari variabel acak *X* seperti pada gambar berikut:



Downtime akan mengganggu bila terjadi lebih dari satu kerusakan. Jadi,

$$P(\text{downtime yg mengganggu}) = P(\text{lebih dari 1 kerusakan terjadi})$$

$$= 1 - P(X \leq 1) = 1 - F_X(1)$$

$$= 1 - (0.7788 + 0.1947) = 0.0265$$

RINGKASAN

- Model probabilitas Poisson digunakan untuk memodelkan fenomena acak yang terjadi dalam satuan waktu.
- Model Poisson memiliki parameter λ yang merupakan rate dari suatu informasi dalam satu satuan waktu.

LATIHAN

Banyaknya *hit* pada website Teknik Elektro ITS dalam interval waktu tertentu dimodelkan dengan variabel acak Poisson. Rata-rata hit tiap menit sebanyak 120 *hit*. Hitung probabilitas tidak ada *hit* dalam 1 detik.

2.3.2 ModelBinomial

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menggunakan model binomial untuk menghitung probabilitas variabel acak diskrit.

PENGANTAR

Model binomial merupakan salah satu contoh model probabilitas untuk variabel acak diskrit. Model ini digunakan untuk memeroleh probabilitas banyaknya sukses dalam eksperimen acak dengan syarat outcome tiap trial dalam eksperimen tersebut memiliki probabilitas sukses atau gagal yang sama.

MODEL BINOMIAL

Anggap bahwa suatu eksperimen acak dilakukan sebanyak *N*trial. Outcome tiap trial dinyatakan dalam sukses atau gagal. Probabilitas sukses sama dengan *p* dan probabilitas gagal sama dengan 1–*p*. Jika *X* adalah jumlah sukses sebanyak *k* yang terjadi dalam*N* trial, maka fungsi massa probabilitas *X*dimodelkan dalam binomial (*N*,*p*) adalah

$$P_X(x) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

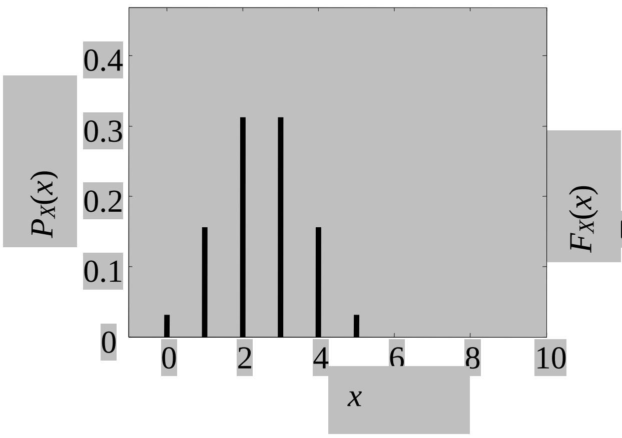
dengan

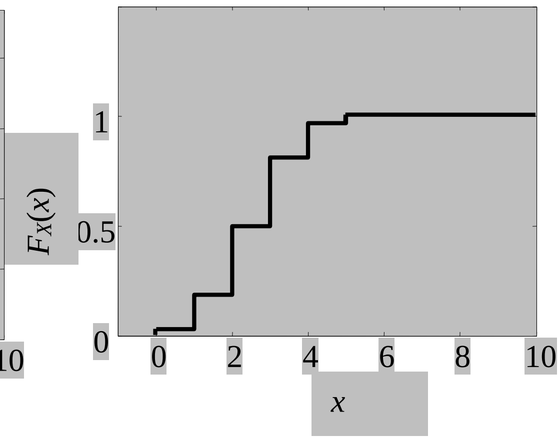
$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Fungsi distribusi binomial untuk variabel acak *X* dinyatakan dengan

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} u(x-k)$$

Gambar berikut merupakan contoh PMF dan CDF model binomial dari variabel acak *X*~Binomial (5,0.5)





Model binomial dari variabel acak *X* memiliki mean

$$E[X] = Np$$

dan varians

$$\mathrm{var}(X) = Np(1-p)$$

CONTOH

Untuk memenuhi kebutuhan daya di pabrik yang minimal membutuhkan 180 kW digunakan tiga generator dengan kapasitas 100 kW untuk tiap generator. Tiga generator tersebut mempunyai nilai keandalan yang sama, yaitu 0.8. Tentukan probabilitas bahwa sistem dengan tiga generator tersebut dapat memenuhi kebutuhan daya di pabrik.

X: banyaknya generator dalam keadaan baik

p= probabilitas generator dalam keadaan baik= keandalan generator = 0.8

N = 3

X ~ binomial (3, 0.8)

PMF dari variabel acak *X* adalah

$$P(X = k) = \binom{3}{k}(0.8)^k(1-0.8)^{3-k}$$

Untuk *k*=0,1, 2 dan 3, PMF dari *X* adalah

$$P(X = 0) = \binom{3}{0}0.8^0(1-0.8)^3 = 0.008;$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1}(0.8)^1(1-0.8)^2 = 0.096$$

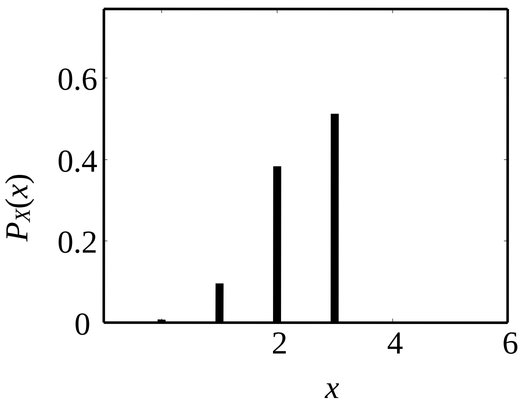
$$P(X=2)=\binom{3}{2}(0.8)^2(1-0.8)^1=0.384;$$

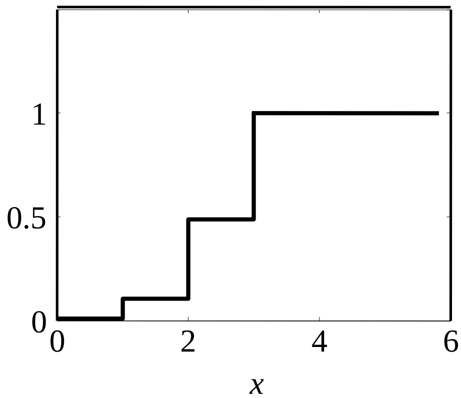
$$P(X=3)=\binom{3}{3}(0.8)^3(1-0.8)^0=0.512$$

Fungsi distribusi (CDF) X:

$$F_X(x)=0.008\,u(x)+0.096\,u(x-1)+0.384\,u(x-2)+0.512\,u(x-3)$$

Plot PMF dan CDF variabel acak binomial terdapat pada gambar berikut





Sistem dapat memenuhi kebutuhan daya ~ jumlah generator dalam keadaan baik paling tidak ada 2

P(sistem dapat memenuhi kebutuhan daya) = P(setidaknya 2 generator dalam keadaan baik)

$$=P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)$$

$$=0.384+0.512=0.896$$

RINGKASAN

- Model binomial digunakan untuk menghitung probabilitas banyaknya sukses dalam suatu eksperimen.

- Model binomial dapat digunakan bila probabilitas sukses atau gagal tiap eksperimen memunyai nilai sama.

LATIHAN

Master station dari sistem interkom menyediakan musik untuk enam kamar. Probabilitas tiap kamar akan switch-on sebesar 0.4 dan bila terjadi switch-on memerlukan 0.5 W. Dapatkan dan plot fungsi massa dan distribusi probabilitas untuk variabel acak X yang menyatakan “daya yang disupply oleh master station”. Jika amplifier master station overload bila daya yang dikeluarkan lebih dari 2W, berapa probabilitas master station tersebut overload?

3 Variabel Acak Kontinu

3.1 Konsep Variabel Acak Kontinu

CAPAIAN PEMBELAJARAN

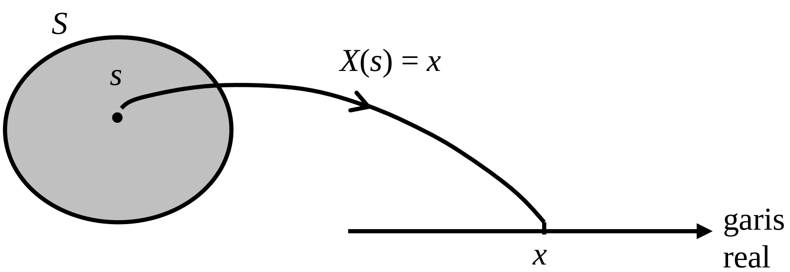
Mahasiswa mampu menjelaskan konsep variabel acak kontinu untuk suatu eksperimen acak.

PENGANTAR

Dalam bahasan ini akan dikenalkan konsep baru yang memperkenankan event didefinisikan dengan cara yang konsisten dari himpunan bilangan kontinu. Konsep yang dimaksud adalah konsep variabel acak kontinu. Konsep ini merupakan alat untuk memecahkan masalah-masalah praktis yang berhubungan dengan model probabilitas untuk variabel acak kontinu.

KONSEP VARIABEL ACAK

Variabel acak *X* dapat dipandang sebagai fungsi yang memetakan seluruh elemen dalam ruang sampel*S* ke dalam titik-titik pada garis bilangan real seperti yang ditunjukkan gambar berikut.Variabel acak direpresentasikan dengan huruf besar (seperti *X*, *Y* atau *W*) dan nilai tertentu dari variabel acak dinotasikan dengan huruf kecil (seperti *x*, *y* atau *w*).



Berdasarkan hasil observasi (outcome) dari suatu eksperimen, variabel acak dapat dibedakan menjadi:

Variabel acak kontinu

Pada umumnya, variabel acak kontinu diperoleh pada eksperimen yang observasinya merupakan hasil pengukuran kuantitas yang dapat diukur dengan ruang sampel kontinu. Misalnya, ‘ukur level air dalam tangki’, maka hasil pengukuran dapat bernilai 10.05; 10.15; 10.0; 10.99, dan sebagainya.

Variabel acak diskrit

Variabel acak diskrit diperoleh pada eksperimen yang observasinya merupakan hasil penghitungan (kuantitas yang dapat dihitung) dengan ruang sampel diskrit. Misalnya, 'Hitung jumlah mobil yang lewat tiap 10 menit di jalan teknik elektro', maka hasil observasi dapat bernilai 10, 11, 12, 13 dan sebagainya.

Variabel acak campuran (mixed)

Variabel acak ini memunyai nilai diskrit pada beberapa nilai dan yang lainnya kontinu. Kasus ini biasanya merupakan tipe yang kurang penting, tetapi terjadi dalam beberapa aplikasi praktis.

RUANG SAMPEL KONTINU

Sebuah himpunan bilangan kontinu terdiri atas seluruh bilangan riil yang terdapat pada interval antara dua batas nilai x_1 dan x_2. Terdapat banyak eksperimen yang menghasilkan variabel acak dengan range merupakan himpunan bilangan kontinu. Sebagai contoh adalah pengukuran waktu kedatangan sebuah partikel, pengukuran tegangan, dan pengukuran sudut phasa gelombang.

CONTOH

'Pilih bilangan positif antara 0 sampai dengan 5' maka ruang sampel $S = \{0 < s \le 5\}$. Definisikan variabel acak *X* sebagai fungsi dari

$$X = X(s) = s^2.$$

Titik-titik dalam *S* dipetakan pada titik-titik dalam garis bilangan real dalam himpunan $\{0 < x \le 25\}$.

Sebagai variabel acak, maka variabel acak kontinu juga memenuhi aksioma probabilitas seperti halnya variabel acak diskrit. Fitur yang membedakan dari model variabel acak kontinu adalah bahwa probabilitas setiap outcome tunggal adalah nol. Secara intuitif hal ini berkaitan dengan fakta bahwa semakin ketat prediksi yang dibuat, semakin kecil probabilitas bahwa prediksi tersebut terjadi. Besarnya probabilitas pada sebuah himpunan dengan interval yang semakin kecil akan semakin kecil juga.

Konsep varabel acak sering dianalogikan dengan sebuah massa dari volume benda. Meskipun benda dengan volume tertentu memiliki massa tertentu, namun satu titik pada benda tidak terdapat massa. Situasi ini mengacu pada konsep kerapatan materi. Untuk variabel acak kontinu, konsep ini sama dengan fungsi kepadatan probabilitas.

RINGKASAN

Variabel acak merupakan fungsi yang memetakan setiap titik dalam ruang sampel ke dalam nilai-nilai dalam garis bilangan real.

Variabel acak kontinu merupakan variabel yang memunyai range nilai kontinu.

LATIHAN

Misal satu titik sembarang dipilih dari bagian dalam lingkaran berjari-jari 1. Jika Xmenyatakan jarak titik terpilih ke titik pusat, tentukan probabilitas dari event $X \leq x$ (Asumsikanbahwa setiap titik pada lingkaran mempunyai kesempatan sama untuk terpilih).

3.2 Fungsi Variabel Acak Kontinu

3.2.1 Fungsi Distribusi Variabel Acak Kontinu

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menghitung probabilitas suatu event menggunakan fungsi distribusi kumulatif variabel acak kontinu.

PENGANTAR

Fungsi distribusi kumulatif memberikan pengetahuan tentang karakteristik suatu variabel acak. Selain itu, fungsi ini dapat juga digunakan untuk menghitung nilai probabilitas suatu event dalam variabel tersebut.

FUNGSI DISTRIBUSI VARIABEL ACAK KONTINU

Probabilitas $P(X \leq x)$ merupakan probabilitas dari event $\{X \leq x\}$. Fungsi distribusi probabilitas kumulatif (*cumulative distribution function*–CDF) dari variabel acak X didefinisikan

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

$F_X(x)$ seringkali hanya disebut dengan fungsi distribusi X saja.

Fungsi distribusi memunyai beberapa sifat yang diturunkan dari fakta bahwa $F_X(x)$ adalah probabilitas.

Sifat-sifat fungsi distribusi:

1. $F_X(-\infty) = 0$

Variabel acak mendekati nilai yang terkecil, maka CDF dari variabel mendekati nol

2. $F_X(\infty) = 1$

Variabel acak mendekati nilai yang tertinggi, maka CDF dari variabel mendekati satu.

3. $0 \le F_X(x) \le 1$

Karena CDF merupakan nilai probabilitas, maka CDF memiliki range dari nol sampai dengan satu.

4. $F_X(x_1) \le F_X(x_2) \; x_1 < x_2$

CDF adalah fungsi yang tidak menurun (nondecreasing) dari *x*, sehingga untuk x_1 lebih kecil dari x_2 maka CDF dari x_2 selalu lebih besar atau sama dengan CDF dari x_1.

5. $P(x_1 < X \le x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

CONTOH

Arus dalam suatu rangkaian adalah acak yang dideskripsikan dalam ruang sampel $S = \{0 \le i \le 12\}$. Variabel acak *X* didefinisikan sebagai

$$X(i) = \begin{cases} 0 & i < 0 \\ i & 0 \le i \le 12 \\ 1 & i > 12 \end{cases}$$

Dapatkan:

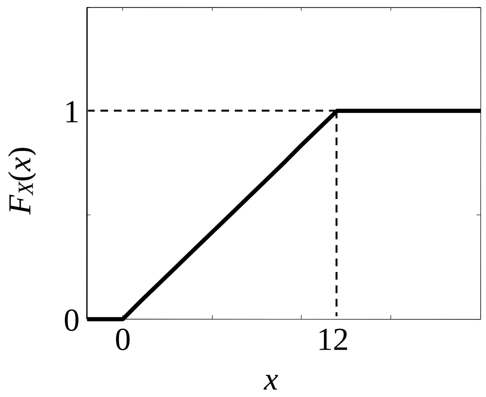
CDF dari variabel acak *X*.

$P(X \le 6)$ dan $P(4 < X \le 10)$.

Dalam bentuk persamaan CDF dari *X* adalah

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x}{12} & 0 \le x \le 12 \\ 1 & x > 12 \end{cases}$$

Plot fungsi distribusi (CDF) dari variabel acak *X* seperti pada gambar berikut



Probabilitas $\{X \le 6\}$ adalah

$$P(X \le 6) = F_X(6) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Probabilitas $\{4 < X \le 10\}$ adalah

$$P(4 < X \le 10) = F_X(10) - F_X(4) = \frac{10}{12} - \frac{4}{12} = \frac{1}{2}$$

Model fungsi probabilitas dari variabel acak seperti dalam contoh disebut model uniform. Secara umum, model uniform memiliki CDF sebagai berikut:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

dengan parameter $-\infty < a < \infty$ dan *b >a*.

RINGKASAN

Fungsi distribusi*X*didefinisikan sebagai probabilitas dari event $\{X \le x\}$.

Nilai CDF terletak dalam range 0 dan 1; dan CDF merupakan fungsi yang tidak turun.

LATIHAN

Waktu transmisi dari pesan-pesan (messages) dalam sistem komunikasi dinyatakan dengan fungsi eksponensial berikut:

$$P(X > x) = e^{-\lambda x} \qquad x > 0$$

Dapatkan persamaan matematis CDF dari variabel acak *X* dan sket fungsi tersebut. Berapa probabilitas $\{T < X \leq 2T\}$ dengan $T = 1/\lambda$.

3.2.2 Fungsi KepadatanProbablitas

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menghitung probabilitas suatu event menggunakan fungsi kepadatan probabilitas variabel acak kontinu.

PENGANTAR

Selain dideskripsikan dalam fungsi distribusi kumulatif, variabel acak juga dideskripsikan dalam fungsi kepadatan probabilitas. Fungsi ini memberikan deskripsi secara utuh tentang variabel acak tersebut.

FUNGSI KEPADATAN PROBABILITAS

Fungsi kepadatan probabilitas (*probability density function*–PDF) dinotasikan dengan $f_X(x)$ didefinisikan sebagai derivatif dari fungsi distribusi

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Sifat-sifat fungsi kepadatan

1. $0 \leq f_X(x)$

Karena fungsi kepadatan diperoleh dari derivatif fungsi distribusi dan fungsi distribusi merupakan fungsi dari *x* yang tidak menurun, maka fungsi kepadatan adalah fungsi yang tidak negatif.

2. $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\, du$

Fungsi distribusi dari *X* dapat diperoleh melalui integrasi fungsi PDF.

3. $P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\, dx$

$$= \int_{-\infty}^{x_2} f_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{x_1} f_X(x)\,dx = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

Probabilitas dalam interval adalah area dibawah $f_X(x)$ dalam interval tersebut.

4. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

Total massa dibawah kurva PDF adalah satu satuan.

CONTOH

Arus dalam suatu rangkaian adalah acak yang dideskripsikan dalam ruang sampel $S = \{0 \le i \le 12\}$. Variabel acak *X* didefinisikan sebagai

$$X(i) = \begin{cases} 0 & i < 0 \\ i & 0 \le i \le 12 \\ 1 & i > 12 \end{cases}$$

Dapatkan:

PDF dari variabel acak *X*.

P(*X*> 6).

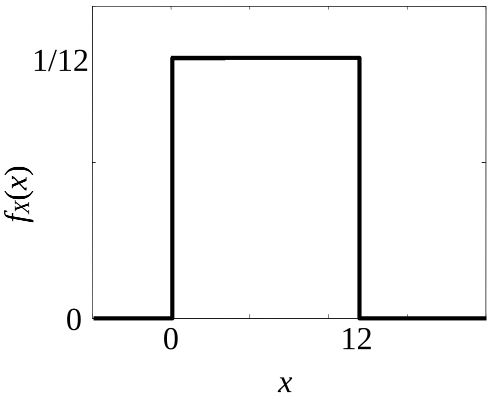
Persamaan matematis CDF dari *X* adalah

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x}{12} & 0 \le x \le 12 \\ 1 & x > 12 \end{cases}$$

Derivatif fungsi distribusi (CDF) merupakan fungsi kepadatan (PDF) variabel acak *X*

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{1}{12} & 0 \le x \le 12 \\ 0 & x > 12 \end{cases}$$

Plot PDF dari *X* ditunjukkan oleh gambar berikut



Probabilitas *X* bernilai lebih besar dari 6 adalah

$$P(X>6)=\int_6^{12}\frac{1}{12}\,dx=\frac{1}{12}x\Big|_6^{12}=\frac{1}{2}$$

Model fungsi probabilitas dari variabel acak seperti dalam contoh disebut model uniform. Secara umum, model uniform memiliki CDF sebagai berikut:

$$f_X(x)=\begin{cases}1/(b-a) & a\le x\le b\\ 0 & \text{yang lain}\end{cases}$$

dengan parameter $-\infty<a<\infty$ dan *b* >*a*.

RINGKASAN

Fungsi kepadatan probabilitas didefinisikan sebagai derivatif dari fungsi distribusi kumulatif

Fungsi kepadatan selalu bernilai tak negatif

Luas dibawah kurva fungsi kepadatan sama dengan satu satuan

LATIHAN

Waktu transmisi dari pesan-pesan (messages) dalam sistem komunikasi dinyatakan dengan fungsi eksponensial berikut

$$P(X>x)=e^{-\lambda x} \qquad x>0$$

Dapatkan fungsi kepadatan probabilitas dari variabel acak *X* dan sket fungsi tersebut. Berapa probabilitas $\{T<X\le 2T\}$ dengan $T=1/\lambda$.

3.2.3 Momen Variabel Acak Kontinu

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menghitung nilai momen variabel acak kontinu yang berupa nilai mean, varians dan standar deviasi.

PENGANTAR

Selain dinyatakan dengan fungsi probabilitas, variabel acak kontinu dinyatakan juga dalam momennya. Dari momen terhadap origin dan momen sentral dapat dikembangkan pengukuran karakteristik variabel acaksebagai nilai. Nilai-nilai tersebut adalah mean dan varians.

MOMEN VARIABEL ACAK KONTINU

Momen terhadap origin didefinisikan

$$m_n = E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)\,dx$$

Jelas bahwa $m_0 = 1$ merupakan area dibawah fungsi $f_X(x)$. Sedangkan $m_1 = \overline{X}$ merupakan nilai ekspektasi dari *X* atau disebut juga mean (rata-rata) dinotasikan juga dengan μ_X .

Jadi, mean dari variabel acak *X* adalah

$$\mu_X = E[X] = \overline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$$

Momen kedua diberikan oleh

$$m_2 = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx$$

Momen terhadap nilai mean dari *X* disebut momen sentral.

Momen sentral didefinisikan sebagai nilai ekspektasi dari fungsi

$$g(X) = (X - \mu_X)^n \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

yaitu

$$E[(X - \mu_X)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^n f_X(x)\,dx$$

Momen sentral kedua diberi nama varians dengan notasi khusus σ_X^2 . Jadi, varians dinyatakan dengan

$$\sigma_X^2 = E[(x-\mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x)\, dx$$

Akar kuadrat positif dari varians, σ_X , disebut standar deviasi dari *X*. Nilai ini adalah ukuran sebaran variabel acak *X* dalam fungsi kepadatan terhadap nilai mean.

Varians dapat juga diperoleh dari pengetahuan momen pertama dan kedua, yaitu

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2]$$

$$= E[X^2 - 2X\mu_X + \mu_X{}^2] = E[X^2] - 2\mu_X E[X] + \mu_X{}^2$$

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X{}^2$$

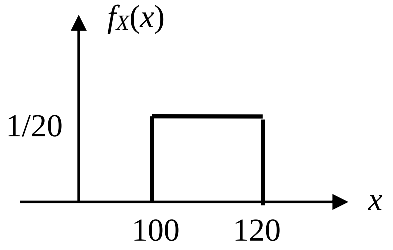
CONTOH

Tegangan yang dihasilkan generator adalah acak. Tegangan ini terdistribusi uniform dalam range dari 100 sampai dengan 120. Dapatkan nilai mean, varians dan standar deviasi tegangan tersebut.

Tegangan (*X*) terdistribusi uniform memiliki fungsi kepadatan probabilitas (PDF) sebagai berikut:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 100 \\ \dfrac{1}{20} & 100 \le x \le 120 \\ 0 & x > 120 \end{cases}$$

Sket PDF dari *X*



Nilai mean dari *X*

$$\mu_X = \int_{100}^{120} x \frac{1}{20} dx = \frac{1}{40} x^2 \Big|_{100}^{120} = 110$$

Momen kedua dari *X*

$$E[X^2] = \int_{100}^{120} x^2 \frac{1}{20} dx = \frac{1}{3(20)} x^3 \Big|_{100}^{120} = 12133.13$$

Varians dari *X*

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X{}^2 = 12133.13 - 12100 = 33.13$$

Akar varians atau standar deviasi *X*

$$\sigma_X = 5.756$$

RINGKASAN

Nilai mean dari variabel acak merupakan nilai yang diharapkan atau nilai rata-rata.

Varians dari variabel acak digunakan untuk mengetahui sebaran massa dari variabel acak terhadap nilai mean.

Standar deviasi adalah akar dari varians.

LATIHAN

Arus dalam rangkaian adalah acak dengan distribusi uniform dalam interval (1A, 5A). Dapatkan nilai mean dan varians dari arus tersebut.

3.3 Model Perhitungan

3.3.1 Model Eksponensial

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menggunakan model eksponensial untuk menghitung probabilitas variabel acak kontinu.

PENGANTAR

Model eksponensial adalah salah satu contoh model fungsi probabilitas untuk variabel acak kontinyu. Model ini banyak digunakan dalam pemodelan masa pakai komponen-komponen elektronik dan pemodelan dalam sistem antrian.

MODEL EKSPONENSIAL

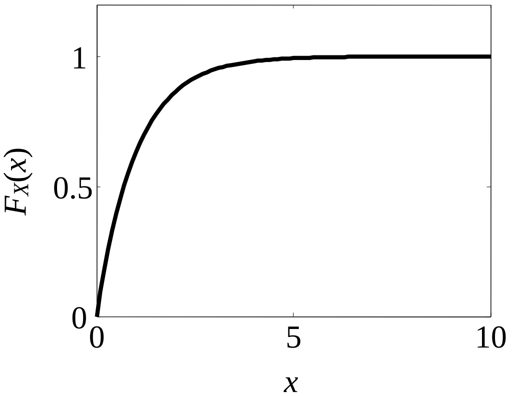
Variabel acak eksponensial *X* dengan parameter λ memunyai fungsi kepadatan

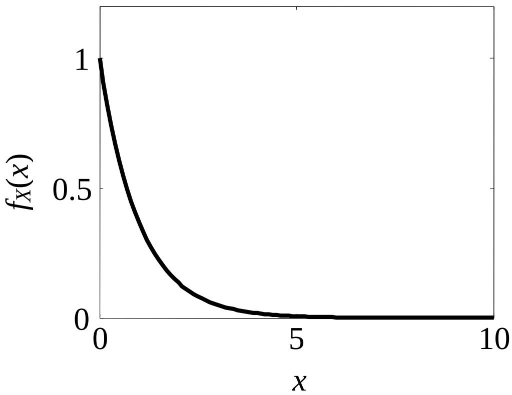
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

dan fungsi distribusi

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Plot fungsi pdf dan CDF model eksponensial (λ=1) seperti yang ditunjukkan gambar berikut:





Moment ke-n dari *X*

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} x^n \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{n!}{\lambda^n}$$

Untuk *n*=1

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

adalah nilai mean dari *X*.

Moment kedua diperoleh pada *n*=2,

$$E[X^2] = \frac{2}{\lambda^2}$$

Varians dari *X* dapat diperoleh dari moment pertama dan kedua

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Dalam aplikasi teknik keandalan sistem, model eksponensial banyak digunakan untuk memodelkan masa pakai (variabel acak *T*) dari komponen atau sistem.

Nilai probabilitas sampai saat *t*, suatu komponen atau sistem masih berfungsi atau belum rusak disebut juga dengan fungsi keandalan *R*(*t*). Fungsi ini didefinisikan dengan

$$R(t) = P(T > t) = \int_t^{\infty} f_T(u)\, du$$

atau

$$R(t) = P(T > t) = 1 - P(T \le t) = 1 - F_T(t)$$

Jadi, fungsi keandalan dari variabel acak *T* yang dimodelkan dengan eksponensial adalah

$$R(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$$

Nilai mean dari variabel acak *T* dikenal juga dengan nama mean time to failure (MTTF) komponen elektronik.

$$\mathrm{MTTF} = \frac{1}{\lambda}.$$

CONTOH

Masa pakai (lifetime) sejenis komponen elektronika adalah acak. Masa pakai tersebut memunyai distribusi eksponensial dengan mean 100 jam. Hitung probabilitas masa pakai komponen lebih dari 150 jam. Bila keandalan komponen tidak boleh kurang dari 0.8, hitung masa pakai komponen tersebut.

T adalah variabel acak masa pakai

T ~ eksponensial dengan mean 100 jam

$$E[T] = \frac{1}{\lambda} = 100 \text{ jam maka } \lambda = \frac{1}{100}$$

Fungsi distribusi kumulatif *T*

$$F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-t/100}$$

Probabilitas *T* lebih dari 150 jam adalah

$$P(T > 150) = 1 - P(T \le 150)$$

$$= 1 - F_T(150) = 1 - (1 - e^{-150/100}) = 0.223$$

Probabilitas T lebih besar dari 150 jam ini menyatakan juga nilai keandalan komponen beroperasi pada jam ke 150.

Lama komponen dipakai jika keandalannya ≥ 0.8

$$R(t) \geq 0.8$$

$$e^{-t/100} \geq 0.8$$

$$t \leq -100(\ln 0.8)$$

$$t \leq 22.3 \text{ jam}$$

Jadi, komponen tersebut harus diganti paling lambat setelah dipakai selama 22.3 jam.

Dari contoh ini, dapat dilihat bahwa fungsi keandalan model eksponensial dapat digunakan untuk menentukan saat komponen elektronik perlu dilakukan penggantian.

RINGKASAN

Model eksponensial banyak digunakan untuk memodelkan masa pakai atau lifetime komponen elektronik.

Fungsi keandalan eksponensial merupakan nilai probabilitas sampai waktu tertentu komponen elektronik masih berfungsi.

LATIHAN

Level air dalam bendungan (dam) dideskripsikan dengan fungsi kepadatan eksponensial berikut

$$f_X(x) = (1/13.5)\exp(-x/13.5)$$

Dam akan meluap (overflow) bila ketinggian airnya melebihi 40.6 m. Berapa probabilitas terjadinya overflow?

3.3.2 Model Weibull

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menggunakan model Weibull untuk menghitung probabilitas event variabel acak kontinu.

PENGANTAR

Salah satu kegunaan model Weibull adalah untuk menyatakan masa pakai komponen elektromekanik seperti motor, generator dll. Selain itu, fungsi keandalan Weibull dapat digunakan untuk melakukan penjadwalan perawatan komponen elektromekanik.

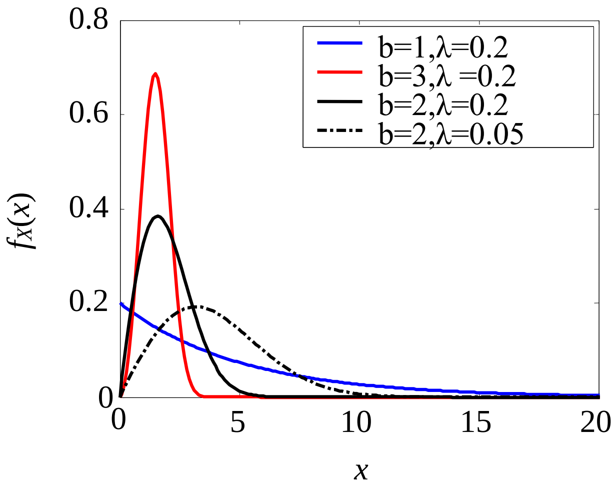
MODEL WEIBULL

Fungsi kepadatan probabilitas (PDF) dari variabel acak X dengan parameter λ dan b seperti pada persamaan berikut

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda b x^{b-1} e^{-\lambda x^b} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

dengan λ merupakan skala dari model dan b menentukan bentuk dari model Weibull.

Untuk b=1 maka model Weibull menjadi model eksponensial, dan untuk b=2 model Weibull yang diperoleh disebut model Rayleigh.



Fungsi distribusi (CDF) model Weibull adalah

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x^b} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Fungsi keandalan dari variabel acak yang dimodelkan dengan model Weibull sebagai berikut:

$$R(t) = P(T > t)$$

$$= 1 - P(T \leq t) = 1 - F_T(t)$$

$$= 1 - (1 - e^{-\lambda t^b}) = e^{-\lambda t^b}$$

Fungsi keandalan ini dapat digunakan untuk menentukan lama pemakaian atau waktu komponen elektromekanik perlu dilakukan perawatan.

CONTOH

Generator memiliki masa pakai berdistribusi Weibull dengan fungsi kepadatan

$$f_T(t) = 0.0002te^{-0.0001t^2} \qquad t \geq 0$$

dengan *t* dalam jam.

Hitung probabilitas masa pakai generator lebih dari 50 jam.

Bila keandalan generator tidak boleh kurang dari 0.8, hitung masa pakai generator tersebut.

Fungsi kepadatan generator

$$f_T(t) = 0.0002te^{-0.0001t^2} \qquad t \geq 0$$

dengan parameter b=2 dan λ=0.0001.

Fungsi distribusi generator

$$F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t^b} = 1 - e^{-0.0001t^2}$$

Keandalan generator untuk pemakaian 50 jam

$$R(50) = P(T > 50)$$

$$= 1 - P(T \leq 50) = 1 - F_T(50)$$

$$= 1 - (1 - e^{-0.0001(50)^2}) = e^{-0.25} = 0.7788$$

Lama pemakaian maksimum generator bila keandalannya tidak boleh kurang dari 0.8

$$R(t) \geq 0.8$$

$$e^{-0.0001t^2} \geq 0.8$$

$$t^2 \leq -10000(\ln 0.8)$$

$$t \leq 47.24 \text{ jam}$$

Jadi, generator tersebut harus diganti paling lambat setelah dipakai selama 47.24 jam.

RINGKASAN

Model Weibull memiliki dua parameter dalam fungsi distribusi dan kepadatannya. Parameter tersebut menentukan bentuk dan skala dari model probabilitasnya

Salah satu aplikasi model Weibull untuk memodelkan masa pakai dari komponen elektromekanik.

LATIHAN

Masa pakai dari motor dinyatakan dalam fungsi distribusi

$$F_T(t) = 1 - e^{-0.0001t^2}$$

dengan *t* dalam jam. Berapa keandalan motor untuk pemakaian 100 jam, dan bila keandalan motor tidak boleh kurang dari 0.8 berapa lama pemakaian maksimum dari motor tersebut.

3.3.3 Model Gauss

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menggunakan model Gauss untuk menghitung probabilitas event variabel acak kontinu.

PENGANTAR

Model Gauss (disebut juga model normal) muncul dalam banyak aplikasi. Karenanya model ini banyak digunakan dalam berbagai bidang. Misalnya, digunakan untuk menyatakan banyaknya produk yang cacat dalam satu produksi, rata-rata tegangan yang dihasilkan oleh generator dan sebagainya.

MODEL GAUSS (NORMAL)

Fungsi kepadatan (PDF)Gauss dari variabel acak *X* adalah

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-(x-\mu_X)^2 / 2\sigma_X^2}$$

dan fungsi distribusi (CDF)Gauss

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(u-\mu_X)^2 / 2\sigma_X^2}\, du$$

Dalam model Gauss terdapat dua parameter yaitu $\mu_X$danσ_X yang merupakan nilai mean dan varians dari variabel acak *X*. Variabel acak Gauss biasanya ditulis dengan

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2).$$

Variabel acak *X* yang memunyai nilai mean nol dan varians 1 disebut standar normal *N*(0,1).

CDF dari variabel acak *Z* dalam standar normal adalah

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du$$

Probabilitas dari variabel acak Gauss dapat diperoleh dengan menggunakan tabel dari Φ(*z*).

Jika *X* adalah variabel acak Gauss, $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, CDF dari *X* adalah

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma}\right)$$

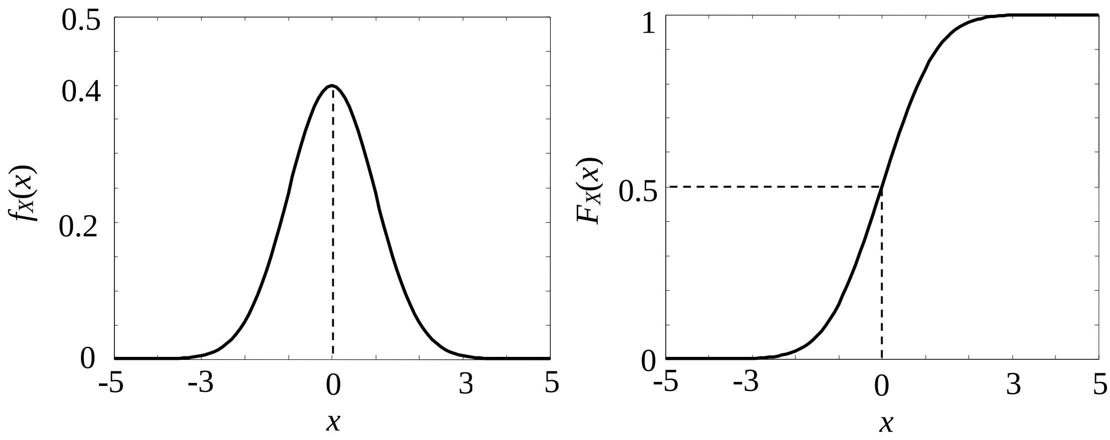
Jadi, $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ ditransformasi ke dalam bentuk standar $Z \sim N(0,1)$ dengan fungsi transformasi

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

Probabilitas *X* dalam interval (a,b] adalah

$$P(a < X \le b) = \Phi\left(\frac{b - \mu_X}{\sigma_X}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu_X}{\sigma_X}\right)$$

Gambar berikut merupakan fungsi kepadatan dan distribusi variabel acak *X* terdistribusi Gauss (*X*~*N*(0,1)).



Bila PDF dari variabel acak Gauss adalah simetri terhadap titik *x*=*m* maka ekspektasi dari *X* adalah $E[X] = m$

Jadi, bila variabel acak *X* simetri terhadap nilai mean maka ekspektasi *X* adalah

$$E[X] = \mu_X$$

Sedangkan varians dari *X* adalah

$$\mathrm{var}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot e^{-(x-\mu_X)^2 / 2\sigma_X^2} = \sigma_X^2$$

Nilai probabilitas berikut diturunkan berdasarkan sifat simetri PDF Gauss (*N*~(0,1)) terhadap nilai mean.

$$P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a)$$

$$P(X \leq -a) = P(X \geq a)$$

$$P(X \geq -a) = P(X \leq a)$$

CONTOH

Tegangan acak berdistribusi normal dengan mean 110 volt dan standar deviasi 5 volt dikenakan pada beban 1kΩ. Dapatkan probabilitas beban menerima tegangan lebih dari 105 volt.

V: variabel acak tegangan

$$V \sim N(110,25)$$

Probabilitas beban tersebut menerima tegangan lebih dari 105 volt.

$$P(V > 105) = P\left(Z > \frac{105 - \mu_V}{\sigma_V}\right) = P\left(Z > \frac{105 - 110}{5}\right) = P(Z > -1)$$

Berdasarkan sifat simetri Gauss maka

$$P(V > 105) = P(Z > -1) = P(Z \leq 1) = 0.8413$$

RINGKASAN

Model probabilitas Gauss memunyai dua parameter yaitu mean dan varians dari variabel acak.

Probabilitas variabel acak *X*yang tidak dalam standar normal (μ_X, σ_X^2) dapat diperoleh dengan melakukan transformasi variabel tersebut kedalam standar normal (0,1).

LATIHAN

Tegangan acak Gauss dengan mean nol dan standar deviasi 4.2 V digunakan untuk mensupply daya resistor 100 ohm yang memerlukan daya rata-rata 0.25 W. Berapa probabilitas resistor menerima daya lebih dari rata-ratanya?

3.4 Transformasi Variabel Acak

CAPAIAN PEMBELAJARAN

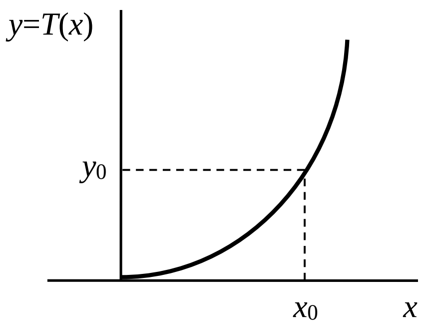
Mahasiswa mampu menghitung probabilitas variabel acak berdasarkan pengetahuan variabel acak lain melalui transformasi variabel.

PENGANTAR

Dalam masalah praktis, diperlukan pengetahuan tentang fungsi kepadatan atau distribusi dari suatu variabel acak berdasarkan fungsi kepadatan atau distribusi dari variabel acak yang lain. Misalnya, untuk menghitung daya rata-rata atau probabilitas daya yang diserap oleh beban di mana tegangan yang diberikan pada beban adalah acak. Konsep transformasi variabel acak dalam bahasan ini dapat diaplikasikan untuk memeroleh solusi dari permasalahan tersebut.

TRANSFORMASI VARIABEL ACAK

Transformasi *T* disebut monoton naik bila $T(x_1) < T(x_2)$ untuk setiap $x_1 < x_2$. Untuk *T* kontinyu, setiap nilai *X* berkorespondensi satu-satu dengan nilai *Y* seperti yang terlihat pada gambar.



Dari gambar dapat dilihat bahwa nilai y_0 berkorespondensi dengan nilai x_0, jadi

$y_0 = T(x_0)$ atau $x_0 = T^{-1}(y_0)$

dengan T^{-1} adalah invers transformasi *T*.

Probabilitas event $\{Y \le y_0\}$ sama dengan probabilitas event $\{X \le x_0\}$. Jadi,

$$F_Y(y_0) = P(Y \le y_0) = P(X \le x_0) = F_X(x_0)$$

Secara umum, untuk semua *y*

$$F_Y(y) = F_X(x)$$

Fungsi kepadatan probabilitas *Y* diperoleh dari derivatif fungsi distribusinya

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

$$= \frac{dF_X(x)}{dy \cdot \frac{dx}{dx}} = \frac{dF_X(x)}{dx} \cdot \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \left. \frac{f_X(x)}{T'(x)} \right| x = T^{-1}(y)$$

CONTOH

Tegangan acak dengan distribusi uniform dalam interval (210, 230) digunakan untuk men-supply beban 1 kΩ. Hitung probabilitas beban menerima daya lebih dari 50 watt.

V : tegangan acak

V ~ uniform dengan interval (210,230)

Fungsi kepadatan uniform untuk variabel acak *V* adalah

$$f_V(v) = \begin{cases} 1/20 & 210 \le v \le 230 \\ 0 & v \text{ yang lain} \end{cases}$$

Daya pada beban

$$W = T(v) = \frac{V^2}{R} = 10^{-3} V^2$$

Untuk *V*=210 volt maka *W*=44.1 watt; dan *V*=230 volt maka daya *W*=52.9 watt.

Derivatif daya

$$W' = T'(v) = 2(10^{-3}) \cdot V$$

Variabel acak daya diperoleh dari transformasi variabel acak tegangan. Fungsi kepadatan daya

$$f_W(w) = \frac{f_V(v)}{T'(v)} = \frac{1/20}{2(10^{-3})v}$$

Substitusi $v = T^{-1}(w) = 31.6w^{1/2}$ diperoleh

$$f_W(w) = \begin{cases} 0.79w^{-1/2} & 44.1 \le w \le 52.9 \\ 0 & w \text{ yang lain} \end{cases}$$

Probabilitas beban menerima daya lebih dari 50 watt adalah

$$P(W > 50) = \int_{50}^{\infty} f_W(w)\,dw = \int_{50}^{52.9} 0.79w^{-1/2}\,dw$$

$$= 0.79(2)w^{1/2}\Big|_{50}^{52.9} = 0.32$$

atau

$$P(W > 50) = 1 - P(W \le 50)$$

$$= 1 - \int_{44.1}^{50} 0.79w^{-1/2}\,dw = 1 - 0.79(2)w^{1/2}\Big|_{44.1}^{50} = 0.32$$

RINGKASAN

Transformasi variabel acak digunakan untuk memeroleh variabel acak baru dari variabel acak yang lain.

Fungsi kepadatan (distribusi) dari variabel acak yang baru diturunkan dari fungsi kepadatan (distribusi) dari variabel acak asal.

LATIHAN

Variabel acak *X* memiliki CDF sebagai berikut:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Variabel acak *Y* didefinisikan sebagai $Y = 100X$. Dapatkan probabilitas $\{Y > 50\}$.

4 Variabel Acak Multipel

4.1 Joint CDF

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menghitung probabilitas joint event menggunakan fungsi distribusi kumulatif dari dua variabel acak.

PENGANTAR

Konsep variabel acak joint merupakan konsep perluasan dari variabel acak tunggal. Variabel acak joint merupakan event joint dari dua variabel acak yang didefinisikan dalam ruang sampel yang sama.

FUNGSI DISTRIBUSI KUMULATIF JOINT

Anggap dua variabel acak *X* dan *Y* didefinisikan pada ruang sampel *S*, dengan nilai tertentu dari *X* dan *Y* dinotasikan dengan *x* dan *y*. Pasangan bilangan terurut (*x*,*y*) dipandang sebagai titik-titik acak dalam bidang *xy*.

Bidang dari seluruh titik-titik (*x*,*y*) dalam range *X* dan *Y* dapat dilihat sebagai ruang sampel yang baru yang biasanya disebut dengan ruang sampel joint dengan simbol S_j.

Dalam kasus satu variabel acak, event *A* didefinisikan dengan

$$A = \{X \leq x\}$$

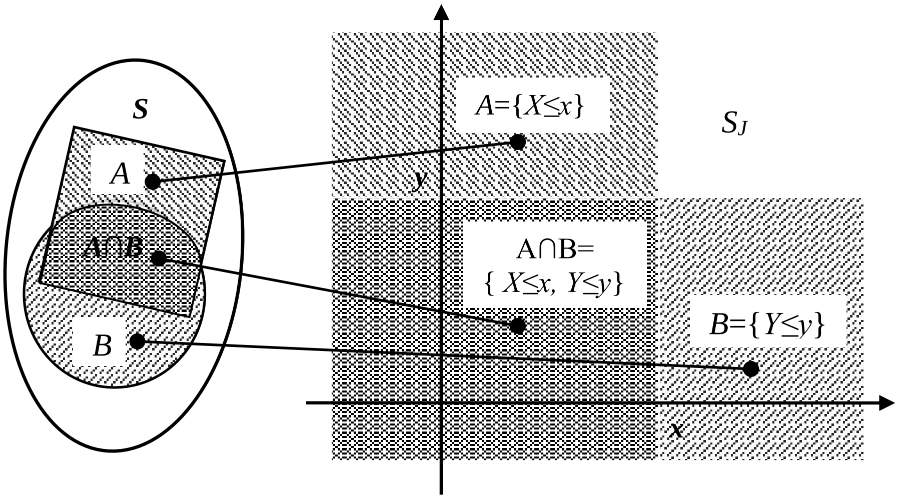
dan event *B*

$$B = \{Y \leq y\}.$$

Event *A* dan *B* menunjuk pada ruang sampel *S*, sedangkan event $\{X \leq x\}$ dan $\{Y \leq y\}$ menunjuk pada ruang sampel S_j. Gambar berikut merupakan ilustrasi antara kedua ruang sampel tersebut. Event *A* berkorespondensi dengan nilai dalam koordinat *X* di S_j yang tidak melebihi *x* dan event *B* berkorespondensi dengan nilai dalam koordinat *Y* di $S_j$yang tidak melebihi *y*. Event $A \cap B$ menunjuk pada event joint $\{X \leq x \text{ and } Y \leq y\}$ dan ditulis dengan $\{X \leq x, Y \leq y\}$.

Probabilitas dari event joint $\{X \leq x, Y \leq y\}$ yang merupakan fungsi dari bilangan *x* dan *y* didefinisikan melalui fungsi distribusi kumulatif joint (joint CDF) dengan simbol $F_{X,Y}(x,y)$.

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$



Fungsi distribusi joint untuk dua variabel acak *X* dan *Y* memunyai beberapa sifat yang dapat diturunkan berdasarkan pendefinisiannya.

Sifat-sifat fungsi distribusi joint:

1. $F_{X,Y}(-\infty,-\infty) = 0$
2. $F_{X,Y}(\infty,\infty) = 1$
3. $0 \le F_{X,Y}(x,y) \le 1$
4. $F_{X,Y}(x_2,y_2) + F_{X,Y}(x_1,y_1) - F_{X,Y}(x_1,y_2) - F_{X,Y}(x_2,y_1)$

$= P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2) \ge 0$

5. $F_{X,Y}(x,\infty) = F_X(x)\ F_{X,Y}(\infty,y) = F_Y(y)$

Empat sifat pertama dari fungsi distribusi joint merupakan perluasan dua dimensi dari sifat-sifat variabel acak tunggal yang dapat digunakan untuk menguji validasi fungsi distribusi joint. Sedangkan sifat kelima menyatakan bahwa fungsi distribusi dari satu variabel acak dapat diperoleh dari fungsi distribusi joint dengan men-set salah satu dari variabelnya bernilai tak hingga. Fungsi $F_X(x)$ dan $F_Y(y)$ yang diperoleh dengan cara tersebut disebut fungsi distribusi marginal.

Meskipun definisi joint CDF adalah sederhana, biasanya joint CDF jarang digunakan dalam mempelajari model probabilitas. Model probabilitas lebih mudah dipelajari dengan fungsi massa probabilitas untuk variabel acak diskrit dan fungsi kepadatan probabilitas untuk variabel acak kontinyu.

CONTOH

Masa pakai (*X*) dan intensitas (*Y*) sejenis bola lampu memiliki fungsi distribusi joint

$$F_{X,Y}(x,y) = 1 - e^{-0.001x} - e^{-0.002y} + e^{-0.001x-0.002y} \quad \text{untuk } x \geq 0,\ y \geq 0$$

Dapatkan:

fungsi distribusi marginal *X* dan *Y*.

probabilitas event $\{500 < X \leq 1500, 1000 < Y \leq 2000\}$.

a) Validasi fungsi distribusi joint

1. $F_{X,Y}(-\infty,-\infty) = 0$

2. $F_{X,Y}(\infty,\infty) = 1 - e^{-0.001(\infty)} - e^{-0.002(\infty)} + e^{-0.001(\infty)-0.002(\infty)} = 1$

Fungsi distribusi marginal untuk masa pakai *X* dan intensitas *Y* lampu adalah

$$F_X(x) = F_{X,Y}(x,\infty)$$

$$= 1 - e^{-0.001x}$$

$$F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty, y) = 1 - e^{-0.002y}$$

b) Probabilitas event $\{500 < X \leq 1500, 1000 < Y \leq 2000\}$ adalah

$$P(500 < X \leq 1500, 1000 < Y \leq 2000) = F_{X,Y}(1500,2000) + F_{X,Y}(500,1000)$$

$$- F_{X,Y}(1500,1000) - F_{X,Y}(500,2000)$$

$$= (1 - e^{-1.5} - e^{-4} + e^{-(1.5+4)}) + (1 - e^{-0.5} - e^{-2} + e^{-(0.5+2)})$$

$$- (1 - e^{-1.5} - e^{-2} + e^{-(1.5+2)}) - (1 - e^{-0.5} - e^{-4} + e^{-(0.5+4)})$$

$$= 0.045$$

RINGKASAN

Fungsi distribusi joint didefinisikan sebagai probabilitas joint dari dua variabel acak

Fungsi distribusi marginal dari satu variabel acak dapat diperoleh dengan men-set salah satu variabel dalam fungsi distribusi joint dengan nilai tak hingga

LATIHAN

Sebuah sistem memiliki dua buah komponen A dan B. Masa pakai komponen A dan B memiliki distribusi eksponensial dengan mean 2000 jam. Masa pakai komponen

A dinyatakan sebagai variabel acak *X* dan masa pakai komponen B dinyatakan sebagai variabel acak *Y*.

Joint CDF dari *X* dan *Y* adalah

$$F_{X,Y}(x,y) = 1 - e^{-0.002x} - e^{-0.002y} + e^{-0.002(x+y)} \qquad x \geq 0, y \geq 0$$

Dapatkan:

marginal CDF dari *X* dan *Y*.

$$P(1000 < X \leq 2000, 1500 < Y \leq 2500)$$

4.2 Joint PMF

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menghitung probabilitas joint event menggunakan fungsi massa probabilitas dari dua variabel acak.

PENGANTAR

Fungsi massa probabilitas joint digunakan untuk mendeskripsikan joint event dari dua variabel acak diskrit dalam bidang *xy*. Representasi joint PMF dalam bahasan ini diberikan dalam bentuk persamaan dan matriks. Sifat-sifat dari joint PMF tersebut terdapat juga dalam bahasan ini.

FUNGSI MASSA PROBABILITAS JOINT

Fungsi massa probabilitas joint (joint PMF) dari variabel acak diskrit *X* dan *Y* adalah

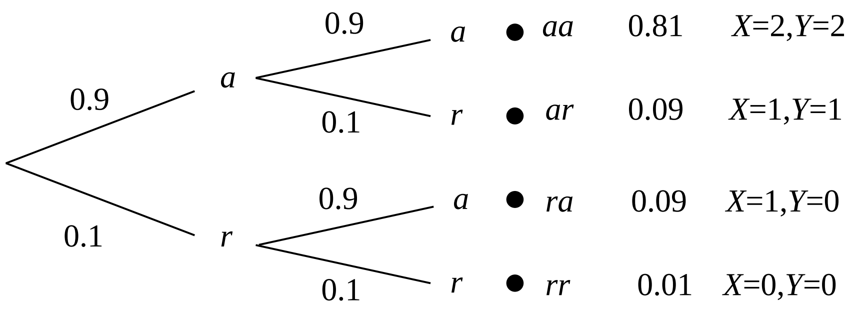
$$P_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$$

Perlu diingat bahwa $\{X = x, Y = y\}$ adalah event dalam eksperimen. Untuk pasangan *x* dan *y*, diperoleh $P_{X,Y}(x,y)$ melalui penjumlahan probabilitas seluruh outcome dari eksperimen untuk *X*=*x* dan *Y*=*y*.

CONTOH

Dua IC dari pabrik XYZ dites. Pada tiap tes, outcome yang mungkin adalah diterima (*a*) atau ditolak (*r*). Asumsikan tiap IC yang diterima (*a*) memunyai probabilitas 0.9 dan outcome tiap tes adalah independen. Hitung jumlah IC yang diterima *X* dan hitung jumlah tes yang sukses *Y* sebelum observasi pertama ditolak. (Jika kedua tes adalah sukses, maka *Y*=2).

Diagram pohon (tree diagram) dari eksperimen ini adalah



Ruang sampel dari eksperimen tersebut adalah *S* = {*aa*, *ar*, *ra*, *rr*}. Dari diagram pohon dapat diketahui bahwa *P*(*aa*) = 0.81, *P*(*ar*)=*P*(*ra*)=0.09 dan *P*(*rr*)=0.01

Tiap outcome menentukan pasangan nilai dari *X* dan *Y*. Definisikan *g*(*s*) sebagai fungsi yang mentransformasikan tiap outcome *s* dalam ruang sampel *S* ke dalam pasangan variabel acak (*X*,*Y*), maka

$$g(aa) = (2,2) \;\; g(a,r) = (1,1) \;\; g(ra) = (1,0) \;\; g(rr) = (0,0)$$

Joint PMF untuk tiap pasangan nilai *x*,*y* adalah jumlah dari probabilitas tiap outcome dengan *X*=*x* dan *Y*=*y*. Sebagai contoh, $P_{X,Y}(1,1) = P(ar)$. Joint PMF dapat diberikan sebagai titik-titik dalam bidang *x*, *y* dengan tiap nilai adalah nilai yang mungkin dari pasangan (*x*,*y*) atau dinyatakan dalam bentuk persamaan

$$P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.81 & x = 2,\, y = 2 \\ 0.09 & x = 1,\, y = 1 \\ 0.09 & x = 1,\, y = 0 \\ 0.01 & x = 0,\, y = 0 \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases}$$

Representasi dengan matriks untuk $P_{X,Y}(x,y)$ adalah

$P_{X,Y}(x,y)$	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$
$x = 0$	0.01	0	0
$x = 1$	0.09	0.09	0
$x = 2$	0	0	0.81

Catatan bahwa penjumlahan seluruh nilai probabilitas sama dengan 1 (satu). Hal ini merefleksikan aksioma kedua probabilitas yang menyatakan bahwa $P(S)=1$. Jadi, untuk variabel acak joint berlaku:

$$\sum_{x\in S_X}\sum_{y\in S_Y} P_{X,Y}(x,y)=1$$

dengan range S_X adalah himpunan seluruh nilai dari X dengan probabilitas tak nol dan demikian pula untuk S_Y. Dapat dikatakan juga bahwa $P_{X,Y}(x,y)\geq 0$ untuk seluruh pasangan x, y.

Marginal PMF dari variabel acak X dan Y dengan joint PMF $P_{X,Y}(x,y)$ adalah

$$P_X(x)=\sum_{y\in S_Y} P_{X,Y}(x,y),\quad P_Y(y)=\sum_{x\in S_X} P_{X,Y}(x,y)$$

Terminologi ini berasal dari representasi matriks joint PMF. Dengan menjumlahkan entry setiap kolom dan entry setiap baris, akan diperoleh marginal PMF dari X dan Y.

Dari contoh di atas, dapat diperoleh bahwa PMF dari variabel acak X adalah

$$P_X(0)=\sum_{y=0}^{2} P_{X,Y}(0,y)=0.01\ P_X(1)=\sum_{y=0}^{2} P_{X,Y}(1,y)=0.18$$

$$P_X(2)=\sum_{y=0}^{2} P_{X,Y}(2,y)=0.81\ P_X(x)=0 \quad x\neq 0,1,2$$

dan PMF dari Y adalah

$$P_Y(0)=\sum_{x=0}^{2} P_{X,Y}(x,0)=0.10\ P_Y(1)=\sum_{x=0}^{2} P_{X,Y}(x,1)=0.09$$

$$P_Y(2)=\sum_{x=0}^{2} P_{X,Y}(x,2)=0.81\ P_Y(y)=0 \quad y\neq 0,1,2$$

Dapat diamati bahwa tiap nilai $P_X(x)$ adalah hasil penjumlahan seluruh entry pada satu baris dalam matriks, sebaliknya tiap nilai $P_Y(y)$ adalah jumlah entry pada kolom. Dengan menuliskan nilai tersebut ke dalam matriks diperoleh

$P_{X,Y}(x,y)$	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$P_X(x)$
$x=0$	0.01	0	0	0.01
$x=1$	0.09	0.09	0	0.18
$x=2$	0	0	0.81	0.81

$P_Y(y)$	0.10	0.09	0.81

Marginal PMF dari *X* dan *Y* secara lengkap ditulis dalam bentuk persamaan seperti berikut:

$$P_X(x) = \begin{cases} 0.01 & x = 0 \\ 0.18 & x = 1 \\ 0.81 & x = 2 \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases} \qquad P_Y(y) = \begin{cases} 0.10 & y = 0 \\ 0.09 & y = 1 \\ 0.81 & y = 2 \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases}$$

RINGKASAN

Fungsi massa probabilitas (PMF) joint adalah probabilitas joint dari dua variabel acak diskrit.

Jumlah probabilitas untuk seluruh pasangan titik-titik (*x*, *y*) dari variabel acak *X* dan *Y* diskrit sama dengan satu.

Marginal PMF diperoleh dari penjumlahan probabilitas pada baris atau kolom dalam matriks joint PMF.

LATIHAN

Dua komputer menggunakan modem dan line telpon untuk mentransfer e-mail dan berita internet tiap jam. Pada permulaan dari panggilan data, modem pada tiap line menegosiasikan kecepatan yang bergantung pada kualitas line. Bila hasil negosiasi adalah rendah, komputer mereduksi jumlah berita yang ditransfer. Misal jumlah bit yang ditransmisikan *L* dan kecepatan *B* dalam bits per second memiliki joint PMF berikut:

$P_{L,B}(l,b)$	b = 14,400	b =21,600	b =28,800
l = 518,400	0.2	0.1	0.05
l = 2,592,000	0.05	0.1	0.2
l = 7,776,000	0	0.1	0.2

Dapatkan marginal PMF dari variabel acak *L* dan *B*.

4.3 Joint PDF

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menghitung probabilitas joint event menggunakan fungsi kepadatan probabilitas dari dua variabel acak.

PENGANTAR

Selain dideskripsikan dengan fungsi distribusi kumulatif joint, dua variabel acak juga didespripsikan dalam fungsi kepadatan probabilitas joint. Fungsi ini diperoleh dari derivatif kedua dari fungsi distribusi joint-nya. Definisi dan sifat-sifat dari fungsi kepadatan probabilitas joint terdapat dalam bahasan ini.

FUNGSI KEPADATAN PROBABILITAS JOINT

Untuk dua variabel acak *X* dan *Y*, fungsi kepadatan probabilitas joint (joint PDF) dinotasikan $f_{X,Y}(x,y)$, didefinisikan dengan derivatif kedua dari fungsi distribusi joint

$$f_{X,Y}(x.y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

dengan $F_{X,Y}(x,y)$ adalah fungsi distribusi joint (joint CDF).

Joint CDF dapat diperoleh dari joint PDF dengan melakukan pengintegralan berikut:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x',y')dx'dy'$$

Beberapa sifat kepadatan joint adalah

1. $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$
3. $P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$
4. $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$
5. $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$

Sifat pertama dan kedua merupakan perluasan dari sifat variabel acak tunggal. Sifat keempat dan kelima menyatakan bahwa fungsi kepadatan marginal dari variabel acak tunggal dapat diperoleh denganmengintegralkan fungsi kepadatan joint terhadap salah satu variabelnya.

CONTOH

Masa pakai (*X*) dan intensitas (*Y*) sejenis bola lampu memiliki fungsi distribusi joint

$F_{X,Y}(x,y) = 1 - e^{-0.001x} - e^{-0.002y} + e^{-0.001x-0.002y}$ untuk $x \geq 0, y \geq 0$

Dapatkan:

fungsi kepadatan marginal *X* dan *Y*.

probabilitas event $\{500 < X \leq 1500, 1000 < Y \leq 2000\}$.

a) Fungsi kepadatan joint *X* dan *Y*

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$= 0 - 0 - 0.001(0.002)e^{-0.001x}e^{-0.002y}$$

$$= 2 \cdot 10^{-6} e^{-0.001x-0.002y}$$

Fungsi kepadatan marginal *X*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy$$

$$= 2 \cdot 10^{-6} \int_{0}^{\infty} e^{-0.001x-0.002y}\, dy = 0.001e^{-0.001x}$$

Fungsi kepadatan marginal *Y*

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx$$

$$= 2 \cdot 10^{-6} \int_{0}^{\infty} e^{-0.001x-0.002y}\, dx = 0.002e^{-0.002y}$$

b) Probabilitas event $\{500 < X \leq 1500, 1000 < Y \leq 2000\}$ adalah

$$P(500 < X \le 1500, 1000 < Y \le 2000) = \int_{1000}^{2000}\int_{500}^{1500} 2\cdot 10^{-6} e^{-0.001x-0.002y}\, dx\, dy$$

$$= 2\cdot 10^{-3}(0.3834)\int_{1000}^{2000} e^{-0.002y}\, dy = 0.045$$

RINGKASAN

Fungsi kepadatan joint diperoleh dari derivatif kedua fungsi distribusi joint.

Integral fungsi kepadatan joint terhadap salah satu variabel akan diperoleh fungsi kepadatan marginal dari variabel yang lainnya

LATIHAN

Sebuah sistem memiliki dua buah komponen A dan B. Masa pakai komponen A dan B memiliki distribusi eksponensial dengan mean 2000 jam. Masa pakai komponen A dinyatakan sebagai variabel acak *X* dan masa pakai komponen B dinyatakan sebagai variabel acak *Y*.

Joint CDF dari *X* dan *Y* adalah

$$F_{X,Y}(x,y) = 1 - e^{-0.002x} - e^{-0.002y} + e^{-0.002(x+y)} \qquad x \ge 0,\ y \ge 0$$

Dapatkan:

marginal PDF dari *X* dan *Y*.

$$P(1000 < X \le 2000, 1500 < Y \le 2500)$$

4.4 Variabel Acak Bersyarat

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menghitung probabilitas event bersyarat event lain dengan menggunakan probabilitas joint kedua event tersebut.

PENGANTAR

Pada bahasan ini, akan diturunkan model probabilitas baru dari variabel acak yang didasarkan pada pengetahuan parsial yang dapat berupa event dalam variabel acak yang sama atau dalam variabel acak yang lain. Model probabilitas ini disebut dengan fungsi distribusi (kepadatan) bersyarat.

VARIABEL ACAK BERSYARAT

Fungsi distribusi bersyarat dari variabel acak *X* dengan syarat event *B* yang memiliki probabilitas tidak sama dengan nol didefinisikan dengan

$$F_X(x|B) = P(X \le x|B)$$

dan fungsi kepadatan bersyaratnya

$$f_X(x|B) = \frac{dF_X(x|B)}{dx}$$

Event *B* dapat berupa event dalam variabel acak *X* atau variabel yang lain.

Untuk event $B = \{X \le a\}$, fungsi distribusi bersyarat *X* dengan syarat *B* adalah

$$F_X(x|B) = F_X(x|X \le a) = P(X \le x|X \le a)$$

Dengan menggunakan rumus probabilitas bersyarat untuk event diperoleh

$$F_X(x|X \le a) = \frac{P(X \le x, X \le a)}{P(X \le a)}$$

Jika $B = \{Y \le b\}$, maka probabilitas event *X* dengan syarat event *B* adalah

$$F_X(x|B) = F_X(x|Y \le b)$$

$$= \frac{P(X \le x, Y \le b)}{P(Y \le b)} = \frac{F_{XY}(x,b)}{F_Y(b)}$$

Secara umum, fungsi distribusi bersyarat dinyatakan dengan

$$F_X(x|Y \le y) = \frac{F_{X,Y}(x,y)}{F_Y(y)}$$

$$F_Y(y|X \le x) = \frac{F_{X,Y}(x,y)}{F_X(x)}$$

dan fungsi kepadatan bersyarat

$$f_X(x|Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_Y(y|X = x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

CONTOH

Masa pakai (X) dan intensitas (Y) sejenis bola lampu memiliki fungsi kepadatanjoint

$$f_{X,Y} = 2\cdot 10^{-6} e^{-0.001x-0.002y} \quad \text{untuk } x \geq 0, y \geq 0$$

Dapatkan:

fungsi kepadatan marginal X dan Y.

probabilitas lampu dapat dipakai lebih dari 1000 jam bila diketahui intensitas lampu adalah 500 lumen.

Fungsi kepadatan marginal X adalah

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$= 2\cdot 10^{-6} \int_{0}^{\infty} e^{-0.001x-0.002y}\,dy = 0.001e^{-0.001x}$$

Fungsi kepadatan marginal Y adalah

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

$$= 2\cdot 10^{-6} \int_{0}^{\infty} e^{-0.001x-0.002y}\,dx = 0.002e^{-0.002y}$$

Probabilitas lampu tersebut dapat dipakai lebih dari 1000 jam bila diketahui intensitas lampu tersebut adalah 500 lumen

$$P(X > 1000 | Y = 500) = \int_{1000}^{\infty} f_X(x|Y = 500)\,dx$$

dengan fungsi kepadatan X bersyarat Y adalah

$$f_X(x|Y = 500) = \frac{f_{XY}(x,500)}{f_Y(500)}$$

$$= \frac{2.10^{-6} e^{-0.001x}.e^{-0.002(500)}}{2.10^{-3}.e^{-0.002(500)}} = 10^{-3}e^{-0.001x}$$

Jadi,

$$P(X > 1000 | Y = 500) = 10^{-3} \int_{1000}^{\infty} e^{-0.001x}\, dx$$

$$= 10^{-3} \cdot (-10^{3}) e^{-0.001x} \Big|_{1000}^{\infty} = -1(0 - e^{-1}) = e^{-1} = 0.3679$$

RINGKASAN

Fungsi distribusi suatu variabel acak bersyarat variabel acak yang lain sama dengan fungsi distribusi joint dari dua variabel acak tersebut dibagi dengan fungsi distribusi marginal variabel acak yang dijadikan syaratnya.

Fungsi kepadatan suatu variabel acak bersyarat variabel acak yang lain sama dengan fungsi kepadatan joint dari dua variabel acak tersebut dibagi dengan fungsi kepadatan marginal variabel acak yang dijadikan syaratnya.

LATIHAN

Sebuah sistem memiliki dua buah komponen A dan B. Masa pakai komponen A dan B memiliki distribusi eksponensial dengan mean 2000 jam. Masa pakai komponen A dinyatakan sebagai variabel acak *X* dan masa pakai komponen B dinyatakan sebagai variabel acak *Y*.

Joint PDF dari *X* dan *Y* adalah

$$f_{X,Y}(x, y) = 4 \cdot 10^{-6} e^{-0.002(x+y)} \qquad x \geq 0,\ y \geq 0$$

Tentukan probabilitas komponen A bertahan lebih lama dari pada komponen B.

4.5 Variabel Acak Independen

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menghitung probabilitas variabel acak jointyang independen.

PENGANTAR

Dalam bahasan ini, dijelaskan konsep independensi variabel acak yang merupakan penerapan konsep independensi dari event. Interpretasi dari variabel acak independen adalah generalisasi interpretasi dari event-event independen.

VARIABEL ACAK INDEPENDEN

Dua event *A* dan *B* adalah independen secara statistik jika (dan hanya jika)

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Kondisi ini dapat digunakan untuk aplikasi pada dua variabel acak *X* dan *Y* dengan pendefinisian event $A = \{X \le x\}$ dan $B = \{Y \le y\}$ untuk dua bilangan real *x* dan *y*. Jadi, *X* dan *Y* disebut variabel acak independen secara statistik jika (dan hanya jika)

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)\, P(Y \le y)$$

maka fungsi distribusi joint dari dua event tersebut adalah

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

dan fungsi kepadatan joint

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

Jadi, bila *X* dan *Y* independen, maka fungsi distribusi (kepadatan) joint merupakan hasil kali dari fungsi distribusi (kepadatan) masing-masing variabel acak tersebut.

Fungsi distribusi bersyarat dari variabel acak independen

$$F_X(x|Y \le y) = \frac{P(X \le x, Y \le y)}{P(Y \le y)} = \frac{F_{XY}(x, y)}{F_Y(y)}$$

karena *X* dan *Y* independen, maka

$$F_X(x|Y \le y) = F_X(x)$$

$$F_Y(y|X \le x) = F_Y(y)$$

dan fungsi kepadatan bersyaratnya adalah

$$f_X(x|Y \le y) = f_X(x)$$

$$f_Y(y|X \le x) = f_Y(y)$$

Bila *X* dan *Y* independen maka fungsi distribusi (kepadatan) *X* bersyarat *Y* atau sebaliknya tidak bergantung pada fungsi distribusi (kepadatan) dari variabel yang dijadikan syaratnya.

CONTOH

Masa pakai (*X*) dan intensitas (*Y*) sejenis bola lampu memiliki fungsi kepadatan joint

$$f_{X,Y}(x, y) = 2 \cdot 10^{-6} e^{-0.001x - 0.002y} \quad \text{untuk } x \ge 0, y \ge 0$$

Dapatkan fungsi kepadatan marginal *X* dan *Y*.

Buktikan bahwa variabel acak *X* dan *Y* adalah independen.

Fungsi kepadatan marginal *X*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$= 2\cdot 10^{-6}\int_{0}^{\infty} e^{-0.001x-0.002y}\,dy = 0.001e^{-0.001x}$$

Fungsi kepadatan marginal *Y*

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

$$= 2\cdot 10^{-6}\int_{0}^{\infty} e^{-0.001x-0.002y}\,dx = 0.002e^{-0.002y}$$

X dan *Y* independen bila

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

$$= 0.001e^{-0.001x}\cdot 0.002e^{-0.002y} = 2\cdot 10^{-6}e^{-0.001x-0.002y}$$

Jadi, variabel acak *X* dan *Y* adalah independen.

RINGKASAN

Jika*X* dan *Y* independen, maka fungsi distribusi dan kepadatan joint merupakan hasil kali dari fungsi distribusi atau kepadatan masing-masing variabel acak tersebut.

Untuk *X* dan *Y* independen maka fungsi distribusi (kepadatan)*X* bersyarat *Y* atau sebaliknya tidak bergantung pada fungsi distribusi (kepadatan) dari variabel yang dijadikan syaratnya.

LATIHAN

Sebuah sistem memiliki dua buah komponen A dan B. Masa pakai komponen A dan B memiliki distribusi eksponensial dengan mean 2000 jam. Masa pakai komponen A dinyatakan sebagai variabel acak *X* dan masa pakai komponen B dinyatakan sebagai variabel acak *Y*. Joint CDF dari *X* dan *Y* adalah

$$F_{X,Y}(x,y) = 1 - e^{-0.002x} - e^{-0.002y} + e^{-0.002(x+y)} \qquad x \geq 0,\, y \geq 0$$

Apakah masa pakai komponen A dan B independent?

4.6 Jumlah Dua Variabel Acak Independen

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menghitung probabilitas variabel acak yang didefinisikan sebagai jumlah dari dua variabel acak yang independen.

PENGANTAR

Dalam persoalan praktis, seringkali dijumpai informasi (sinyal) yang diinginkan terkontaminasi oleh gangguan (noise) di mana gangguan ini bersifat additif dan independen terhadap informasi yang diinginkan. Untuk mendapatkan deskripsi tentang fungsi kepadatan dari variabel acak independen tersebut diperlukan konsep tentang penjumlahan dua variabel acak independen. Konsep ini dapat digeneralisasi untuk kasus penjumlahan *n* variabel acak independen.

JUMLAH DUA VARIABEL ACAK INDEPENDEN

Misal *W* adalah variabel acak yang sama dengan jumlah dari dua variabel acak independen *X* dan *Y*

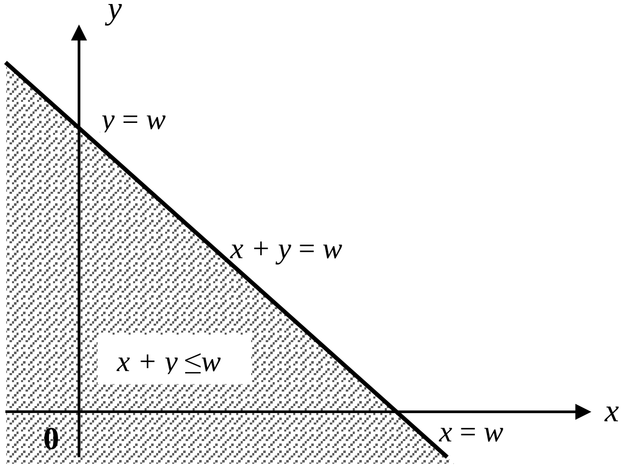
$$W = X + Y$$

Dalam masalah praktis, *X* dapat merepresentasikan sinyal acak tegangan dan *Y* dapat berupa noise pada waktu yang sama. Jumlah *W*dapat merepresentasikan sinyal plus noise yang terdapat pada penerima(receiver).

Fungsi distribusi probabilitas *W* didefinisikan

$$P(W) = P(W \le w) = P(X + Y \le w)$$

Daerah yang diarsir dalam bidang *xy* pada gambar berikut mengilustrasikan untuk $x + y \le w$.



Fungsi distribusi untuk daerah tersebut adalah

$$F_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{w-y} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

karena *X* dan *Y* independen, maka

$$F_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \int_{x=-\infty}^{w-y} f_X(x)\, dx\, dy$$

Derivatif dari persamaan fungsi distribusi, diperoleh

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) f_X(w-y)\, dy$$

Persamaan ini dikenal dengan nama intergral konvolusi. Dapat dilihat bahwa, fungsi kepadatan dari jumlah dua variabel independen secara statistik adalah konvolusi dari fungsi kepadatan dari variabel acak individu, dalam bentuk persamaan ditulis

$$f_W(w) = f_X(x) * f_Y(y)$$

Jika *Z* merupakan jumlah dari *N* variabel acak independen

$$Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

dengan X_i merupakan variabel acak independen dengan fungsi distribusi $F_{X_i}(x_i)$, maka fungsi kepadatan *Z* merupakan konvolusi dari fungsi kepadatan X_i

$$f_Z(z) = f_{X_1}(x_1) * f_{X_2}(x_2) * \cdots * f_{X_N}(x_N)$$

CONTOH

Sinyal terukur (*Y*) merupakan jumlah dari sinyal sebenarnya *S* dan noise *N* yang bersifat aditif. Sinyal acak *S* berdistribusi eksponensial dengan mean 100 dan noise *N* berdistribusi eksponensial dengan mean 10. Dapatkan probabilitas sinyal terukur bernilai lebih dari 110.

Sinyal terukur*Y* adalah jumlah dari dua sinyal, yaitu

$$Y = S + N$$

dengan

S~eksponensial dengan mean 100

N~eksponensial dengan mean 10

Fungsi kepadatan sinyal *S* dan noise *N* adalah

$$f_S(s) = \frac{1}{100} e^{-s/100} \qquad s \geq 0$$

$$f_N(n) = \frac{1}{10} e^{-n/10} \qquad n \geq 0$$

Fungsi kepadatan sinyal terukur *Y* adalah

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(s) f_n(y-s)\, ds$$

$$= \int_0^y \frac{1}{100} e^{-s/100} \cdot \frac{1}{10} e^{-(y-s)/10}\, ds$$

$$= \frac{1}{1000} e^{-y/10} \int_0^y e^{9s/100}\, ds$$

$$= \frac{1}{90} e^{-y/10} \cdot e^{9s/100} \Big|_0^y = \frac{1}{90} e^{-y/10} \left(e^{9y/100} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{90} \left(e^{-y/100} - e^{-y/10} \right)$$

Probabilitas sinyal terukur bernilai lebih dari 110 adalah

$$P(Y > 110) = 1 - P(Y \leq 110) = 1 - F_Y(110)$$

$$= 1 - \frac{1}{90} \int_0^{110} \left(e^{-y/100} - e^{-y/10} \right) dy$$

$$= 1 - \frac{1}{90} \left(-100e^{-y/100} + 10e^{-y/10} \Big|_0^{110} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{90} \left[-100e^{-1.1} + 10e^{-11} + 90 \right] = 1 - 0.63 = 0.37$$

RINGKASAN

Fungsi kepadatan dari jumlah dua variabel acak independen secara statistik adalah konvolusi dari fungsi kepadatan individu dari dua variabel acak tersebut.

Bila *Z* merupakan jumlah dari *n* variabel acak independen, maka fungsi kepadatan dari variabel acak *Z* merupakan konvolusi dari fungsi kepadatan individu dari *n* variabel acak tersebut.

LATIHAN

Dua variabel acak independen X_1 dan X_2 memiliki fungsi kepadatan probabilitas yang sama yaitu

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 2x_i / a^2 & 0 \le x_i \le a \\ 0 & x_i \text{ yang lain} \end{cases}$$

untuk *i*= 1 dan 2, dengan $a > 0$ adalah konstanta.

Dapatkan fungsi kepadatan dari jumlah $W = X_1 + X_2$.

4.7 Momen Joint Dua Variabel Acak

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menghitung momen joint dua variabel acak.

PENGANTAR

Dua variabel acak selain dideskripsikan dalam fungsi distribusi (kepadatan) joint, dideskripsikan pula dalam momen joint. Momen joint tersebut merupakan ukuran dari tingkat hubungan secara linear untuk dua variabel acak tersebut. Contoh aplikasi konsep momen joint dua variabel acak dalam bahasan ini diberikan untuk variabel acak kontinyu maupun diskrit.

MOMEN JOINT DUA VARIABEL ACAK

Momen joint terhadap origin dari dua variabel acak *X* dan *Y* didefinisikan dengan

$$E[X^n Y^k] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n y^k f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

Jumlah *n* + *k* disebut orde dari momen. Jadi, momen orde pertama *E*[*X*] dan *E*[*Y*] adalah nilai ekspektasi dari *X* dan *Y*yang merupakan ‘center of gravity’ dari fungsi $f_{X,Y}(x,y)$.

Momen orde dua *E*[*XY*] disebut dengan korelasi dari *X* dan *Y* disimbolkan dengan R_{XY} didefinisikan dengan

$$R_{XY} = E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\ f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

Bila korelasi*X* dan *Y* dinyatakan dalam bentuk

$$R_{XY} = E[X]E[Y]$$

maka *X* dan *Y* dikatakan tidak berkorelasi. Independensi secara statistik dari *X* dan *Y* adalah syarat cukup untuk menjamin bahwa dua variabel acak tersebut tidak berkorelasi.

Jika $R_{XY} = 0$, maka variabel acak *X* dan *Y* disebut ortogonal.

CONTOH

Variabel acak *X* memiliki mean $\mu_X = 3$ dan varians $\sigma_X^2 = 2$. Variabel acak *Y* didefinisikan dengan

$$Y = -6X + 22.$$

Buktikan bahwa variabel acak *X* dan *Y* tidak berkorelasi.

Momen kedua dari *X* dapat diperoleh dari persamaan varians, jadi

$$E[X^2] = \sigma_X^2 + \mu_X{}^2 = 2 + (3)^2 = 11$$

Nilai mean *Y* adalah

$$\mu_Y = E[-6X + 22] = -6\mu_X + 22 = 4$$

dan korelasi *X* dan *Y*

$$R_{XY} = E[XY] = E[-6X^2 + 22X]$$

$$= -6E[X^2] + 22\mu_X = -6(11) + 22(3) = 0$$

Karena $R_{XY} = 0$ maka *X* dan *Y* adalah ortogonal. Dan karena, $R_{XY} \neq E[X]E[Y] = 12$ maka *X* dan *Y*bukan variabel acak yang tidak berkorelasi.

Selain dinyatakan dalam momen terhadap origin, dua variabel acak dinyatakan juga dalam momen sentral joint yang didefinisikan dengan

$$E[(X-\mu_X)^n (Y-\mu_Y)^k] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^n (y-\mu_Y)^k\ f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

Momen sentral orde dua

$$E[(X-\mu_X)^2]=\sigma_X^2$$

$$E[(Y-\mu_Y)^2]=\sigma_Y^2$$

adalah varians dari *X* dan *Y*. Momen sentral orde dua yang lain disebut dengan kovarians dari *X* dan *Y* disimbolkan dengan C_{XY}. Kovarians didefinisikan dengan

$$C_{XY}=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)\,f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

Melalui ekspansi perkalian secara langsung, diperoleh

$$C_{XY}=R_{XY}-\mu_X\mu_Y=R_{XY}-E[X]E[Y]$$

Bila *X* dan *Y* independen atau tidak berkorelasi maka

$$C_{XY}=0$$

dan jika *X* dan *Y* adalah variabel acak ortogonal, maka

$$C_{XY}=-E[X]E[Y]$$

Normalisasi momen orde-dua

$$\rho_{XY}=\frac{C_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}\quad|\rho_{XY}|\le 1$$

disebut dengan koefisien korelasi. Koefisien korelasi ρ_{XY} merupakan ukuran derajat atau tingkat korelasi antara variabel acak *X* dan *Y*. Bila $|\rho_{XY}|=1$, $\rho_{XY}=+1$ atau -1, maka *X* dan *Y* disebut berkorelasi linear dengan sempurna, dan jika $\rho_{XY}=0$, maka *X* dan *Y* disebut tidak berkorelasi.

CONTOH

Variabel acak *X* memiliki nilai mean 10 dan varians 4. Variabel acak *Y* didefinisikan dengan $Y=2X+4$.

Dapatkan korelasi, kovarians dan koefisien korelasi dari *X* dan *Y*.

Mean dari *Y*

$$\mu_Y=E[Y]=E[2X+4]=2(10)+4=24$$

dan varians *Y*

$$\sigma_Y^2 = E[((2X+4)-(2\mu_X+4))^2]$$

$$= E[4(X-\mu_X)^2] = 4\sigma_X^2 = 16$$

Korelasi *X* dan *Y* adalah

$$R_{XY} = E[XY] = E[X(2X+4)]$$

$$= 2E[X^2] + 4E[X] = 2(4+10^2) + 4(10) = 248$$

Kovarians *X* dan *Y*

$$C_{XY} = R_{XY} - \mu_X \mu_Y = 248 - 10(24) = 8$$

Koefisien korelasi *X* dan *Y* adalah

$$\rho_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{8}{2(4)} = +1$$

Jadi, *X* dan *Y* berkorelasi positif dengan sempurna.

CONTOH

Dua IC dari pabrik XYZ dites. Pada tiap tes, outcome yang mungkin adalah diterima (*a*) atau ditolak (*r*). Asumsikan tiap IC yang diterima (*a*) memunyai probabilitas 0.9 dan outcome tiap tes adalah independen. Hasil penghitungan jumlah IC yang diterima adalah variabel acak *X* dan hasil penghitungan jumlah tes yang sukses sebelum observasi pertama ditolak dinyatakan sebagai variabel acak*Y*. (Jika kedua tes adalah sukses, maka *Y*=2).

Dapatkan korelasi dan kovarians *X* dan *Y*.

Model probabilitas untuk *X* dan *Y* diberikan oleh matriks berikut:

$P_{X,Y}(x,y)$	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$P_X(x)$
$x=0$	0.01	0	0	0.01
$x=1$	0.09	0.09	0	0.18
$x=2$	0	0	0.81	0.81
$P_Y(y)$	0.10	0.09	0.81	

Korelasi *X* dan *Y*

$$R_{XY} = E[XY] = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} xyP_{X,Y}(x,y) = (1)(1)0.09 + (2)(2)0.81 = 3.33$$

Mean dari *X* dan *Y*

$$E[X] = \sum_{x=0}^{2} xP(x) = (1)(0.18) + (2)(0.81) = 1.80$$

$$E[Y] = \sum_{x=0}^{2} yP(y) = (1)(0.09) + (2)(0.81) = 1.71$$

Kovarians *X* dan *Y*

$$C_{XY} = R_{XY} - E[X]E[Y] = 3.33 - (1.80)(1.71) = 0.252$$

RINGKASAN

Momen joint orde dua dari variabel acak *X* dan *Y*, *E*[*XY*], disebut dengan korelasi dari *X* dan *Y*.

Kovarians variabel acak *X* dan *Y* didefinisikan sebagai nilai korelasi *X* dan *Y* dikurangi dengan nilai perkalian mean *X* dan *Y*.

Koefisien korelasi digunakan untuk mengukur korelasi dua variabel acak.

LATIHAN

Dua variabel acak *X* dan *Y* memunyai mean $\mu_X = 1$ dan $\mu_Y = 2$, varians $\sigma_X^2 = 4$ dan $\sigma_Y^2 = 1$, dan koefisien korelasi $\rho_{XY} = 0.4$. Variabel acak baru *W* didefinisikan sebagai

$$W = X + 3Y$$

Dapatkan:

mean dan varians dari *W*

korelasi dari *W*

5 Proses Acak

5.1 Konsep Proses Stokastik

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menjelaskan konsep proses stokastik untuk tiap kategorinya.

PENGANTAR

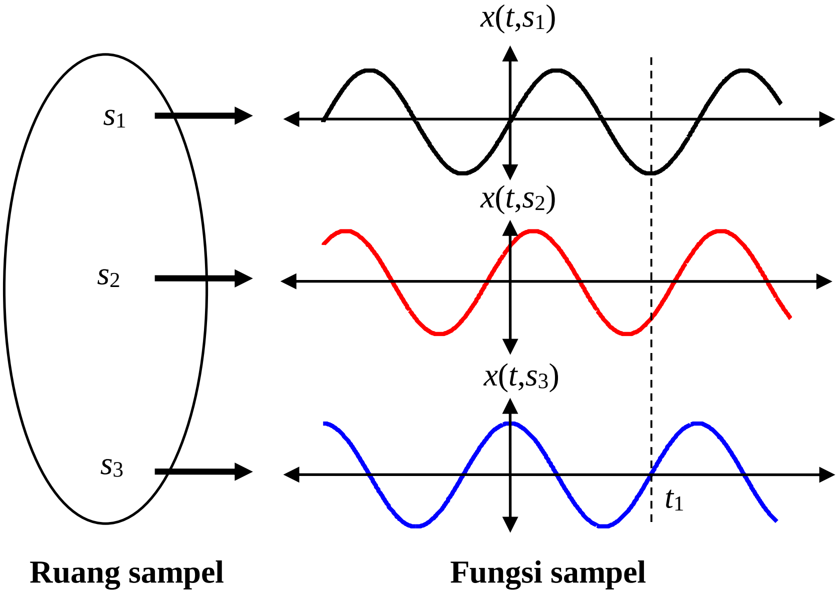
Dalam teori probabilitas, probabilitas menunjuk pada eksperimen yang terdiri dari prosedur dan pengamatan. Konsep variabel stokastik memetakan hasil eksperimen tersebut ke dalam garis bilangan real. Sedangkan konsep proses stokastik(acak) merupakan perluasan dari konsep variabel stokastik dengan memasukkan waktu. Kata proses dalam konteks ini berarti fungsi dari waktu. Jadi proses stokastik (acak) dapat diartikan sebagai fungsi stokastik dari waktu.

KONSEP PROSES STOKASTIK

Konsep proses stokastik didasarkan pada perluasan konsep variabel stokastik dengan memasukkan waktu. Karena variabel stokastik X berdasarkan definisinya merupakan fungsi dari outcome yang mungkin s dari eksperimen, maka proses stokastik menjadi fungsi dari s dan waktu. Dengan kata lain, fungsi waktu $x(t,s)$ untuk setiap outcome s. Keluarga dari seluruh fungsi ini dinotasikan $X(t,s)$ disebut proses stokastik. Dalam notasi pendek proses stokastik dinyatakan dengan $X(t)$. Jelas bahwa, proses stokastik $X(t,s)$ merepresentasikan suatu ansambel dari fungsi waktu bila t dan s variabel. Setiap anggota fungsi waktu disebut fungsi sampel atau seringkali disebut dengan realisasi dari proses. Gambar di bawah ini mengilustrasikan tiga fungsi sampel yang merupakan anggota dari ansambel.

Jadi, proses stokastik juga merepresentasikan fungsi sampel bila t adalah variabel dan s tetap pada nilai tertentu (outcome).

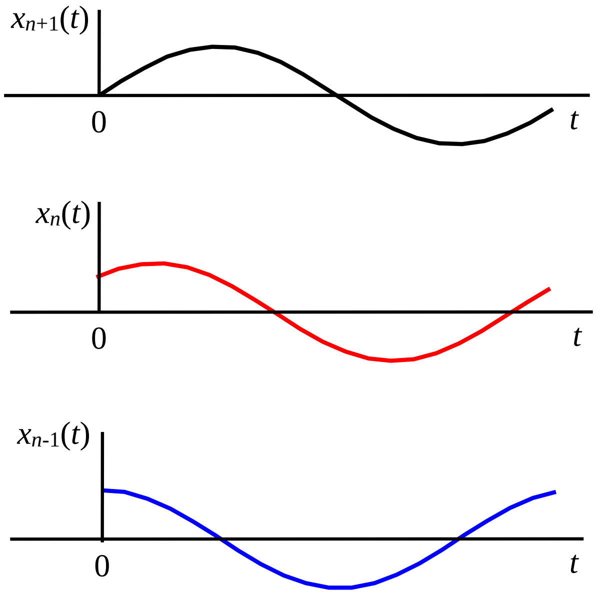
Proses stokastik juga merepresentasikan variabel stokastik bila t adalah tetap dan s variabel. Sebagai contoh, variabel stokastik$X(t_1,s)=X(t_1)$ diperoleh dari proses bila waktu dipertahankan pada nilai t_1. Seringkali digunakan notasi X_1 untuk menotasikan variabel stokastik yang dihubungkan dengan proses $X(t)$ pada waktu t_1. X_1 berhubungan dengan irisan secara vertikal dari seluruh ansambel pada waktu t_1 sepeti yang ditunjukkan pada gambar. Sifat-sifat statistik dari $X_1 = X(t_1)$ mendeskripsikan sifat-sifat statistik dari proses stokastik pada waktu t_1. Nilai ekspektasi dari X_1 ini disebut rata-rata ansambel atau nilai mean dari proses stokastik (pada waktu t_1).



KLASIFIKASI PROSES STOKASTIK

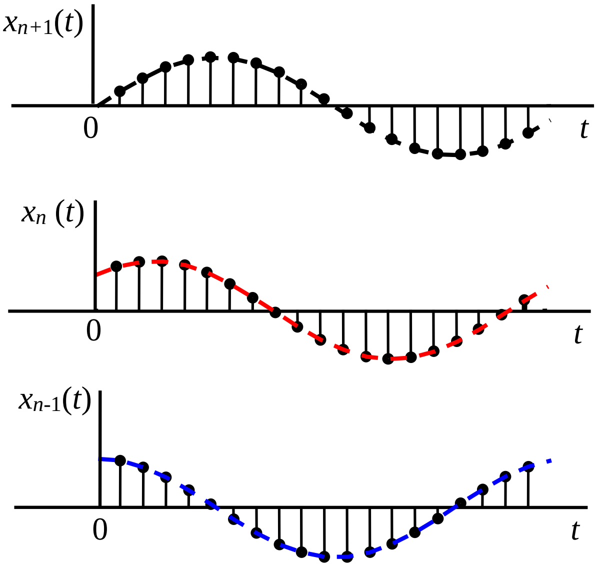
1. Proses stokastik waktu kontinyu dan amplitudo kontinyu

Proses stokastik ini dikenal juga dengan sinyal analog. Gambar berikut merupakan beberapa fungsi sampel dari $X(t)$=Asin($\omega t+\vartheta$) dengan A adalah konstan dan ϑ terdistribusi uniform dalam interval (0, 2π).



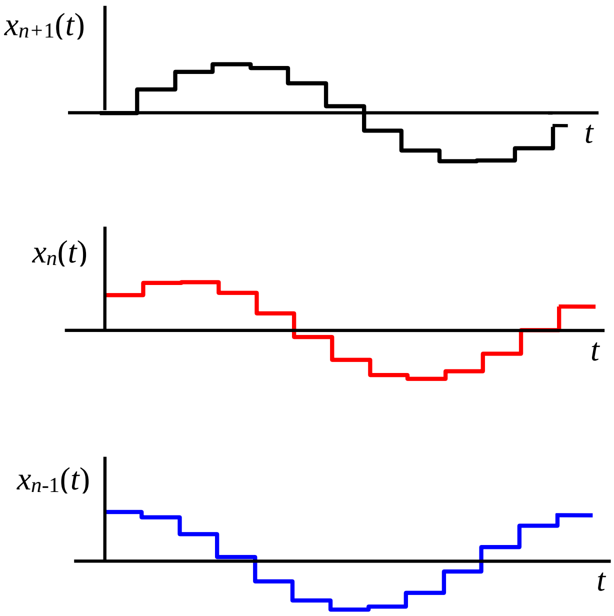
2. Proses stokastik waktu diskrit dan amplitudo kontinyu

Dikenal sebagai sinyal tersampel. Gambar berikut merupakan contoh dari beberapa fungsi sampel untuk proses stokastik $X(t)=A\sin(\omega t+\vartheta)$ dengan A adalah konstan dan ϑ terdistribusi uniform dalam interval $(0, 2\pi)$ yang disampling dengan periode sampling T tertentu.



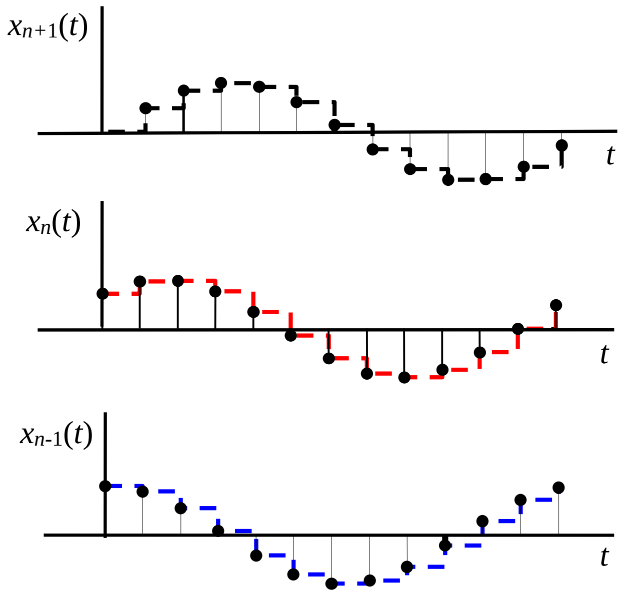
3. Proses stokastik waktu kontinyu dan amplitudo diskrit

Sinyal ini dapat dibangkitkan melalui konversi sinyal digital ke analog.



4. *Proses stokastik waktu diskrit dan amplitudo diskrit*

Dikenal dengan sinyal digital yang dibangkitkan oleh konverter sinyal analog to digital.



RINGKASAN

Proses stokastik $X(t)$ terdiri dari eksperimen dengan pengukuran probabilitas didefinisikan pada ruang sampel S dan fungsi yang menugaskan fungsi waktu $x(t,s)$ untuk tiap outcome s dalam ruang sampel eksperimen tersebut.

Fungsi sampel $x(t,s)$ adalah fungsi waktu yang dihubungkan dengan outcome s dari eksperimen.

Ansambel dari proses stokastik adalah himpunan dari seluruh fungsi waktu yang mungkin dihasilkan dari suatu eksperimen.

LATIHAN

Sket ansambel dari proses stokastik berikut

$X(t)=A\sin \omega t$ untuk semua t

dengan ω adalah konstan dan A adalah variabel stokastik terdistribusi uniform antara 0 dan a_0.

5.2 Proses Stokastik Stasioner

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu membuktikan suatu proses stokastik merupakan proses stasioner atau bukan.

PENGANTAR

Proses stokastik dideskripsikan dalam fungsi kepadatan joint dari variabel-variabel stokastik untuk proses tersebut. Secara umum, sulit mendeskripsikan fungsi tersebut, karenanya diperlukan beberapa asumsi. Deskripsi fungsi kepadatan dari proses stokastik, dalam bahasan ini, menggunakan salah satu asumsi, yaitu stasioneritas yang berarti bahwa pada saat kapanpun pengamatan dari proses, sifat-sifat statistik dari proses tersebut tidak mengalami perubahan.

PROSES STOKASTIK STASIONER

Proses stokastik dapat menjadi variabel stokastik bila waktu adalah tetap pada nilai tertentu. Variabel stokastik ini akan memiliki sifat-sifat statistik seperti mean, moment, varians dan sebagainya yang dapat diperoleh dari fungsi kepadatannya. Bila dua variabel stokastik diperoleh dari proses pada dua waktu tertentu, maka variabel-variabel tersebut memunyai sifat-sifat statistik yang dihubungkan dengan fungsi kepadatan joint-nya. Secara umum, untuk *N* variabel stokastik akan memiliki sifat-sifat statistik yang berhubungan dengan fungsi kepadatan joint dimensi–*N*.

Fungsi distribusi dari variabel stokastik $X_1=X(t_1)$ untuk waktu t_1, didefinisikan sebagai

$$F_X(x_1;t_1) = P(X(t_1) \le x_1)$$

untuk sembarang bilangan real x_1. Dengan cara yang sama, fungsi distribusi joint untuk dua variabel stokastik adalah

$$F_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = P(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2)$$

Fungsi distribusi joint orde-*N* adalah

$$F_X(x_1,\cdots x_N;t_1,\cdots t_N) = P(X(t_1) \le x_1, \cdots X(t_N) \le x_N)$$

Sedangkan fungsi kepadatan joint diperoleh dari derivatif fungsi distribusi tersebut, yaitu

$$f_X(x_1;t_1) = dF_X(x_1;t_1)/dx_1$$

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = \partial^2 F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)/(\partial x_1\,\partial x_2)$$

$$f_X(x_1,\cdots,x_N;t_1,\cdots t_N) = \partial^N F_X(x_1,\cdots x_N;t_1,\cdots t_N)/(\partial x_1 \cdots \partial x_N)$$

Proses stokastik disebut stasioner bila seluruh sifat-sifat statistiknya tidak berubah terhadap waktu. Ada beberapa 'level' stasioneritas dari proses yang kesemuanya bergantung pada fungsi kepadatan variabel stokastik dari proses tersebut.

Proses stokastik disebut stasioner pada orde satu bila fungsi kepadatan orde-satu dari proses tidak berubah dengan adanya translasi waktu asal. Dengan kata lain

$$f_X(x_1;t_1) = f_X(x_1;t_1 + \Delta t)$$

Konsekuensinya adalah bahwa $f_X(x_1;t_1)$ independent terhadap t_1 dan nilai mean dari proses $E[X(t)]$ adalah konstan.

$$E[X(t)] = \mu_X = \overline{X} = \text{konstan}$$

Untuk membuktikan persamaan ini, dapatkan nilai mean dari variabel stokastik $X_1=X(t_1)$ dan $X_2=X(t_2)$. Nilai mean untuk $X(t_1)$

$$E[X_1] = E[X(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_X(x_1;t_1)\,dx_1$$

dan untuk X_2

$$E[X_2] = E[X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_X(x_1;t_2)\,dx_1$$

Misal $t_2=t_1+\Delta t$, diperoleh

$$E[X(t_1 + \Delta t)] = E[X(t_1)]$$

Jadi, nilai mean dari proses stokastik stasioner adalah konstan.

Proses disebut stasioner terhadap orde-dua bila fungsi kepadatan orde-dua dari proses memenuhi

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_X(x_1,x_2;t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t)$$

Jadi, fungsi kepadatan orde-dua dari proses tidak berubah terhadap waktu bila dilakukan translasi (pergeseran) waktu pengamatan.

Korelasi $E[X_1X_2]=E[X(t_1)X(t_2)]$ dari proses stokastik, secara umum, merupakan fungsi dari t_1 dan t_2. Fungsi ini dinotasikan dengan$R_{XX}(t_1,t_2)$ dan disebut fungsi otokorelasi dari proses stokastik$X(t)$

$$R_{XX}(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

Konsekuensi dari sifat orde-dua, fungsi otokorelasi dari proses ini merupakan fungsi dari beda waktu dan bukan waktu absolut.

Jika

$$\tau = t_2 - t_1$$

Maka fungsi otokorelasi $X(t)$ adalah

$$R_{XX}(t_1, t_1+\tau) = E[X(t_1)X(t_1+\tau)] = R_{XX}(\tau)$$

Jadi, bila proses stokastik stasioner pada orde duanya, maka fungsi otokorelasi proses tidak bergantung pada waktu tetapi merupakan fungsi dari beda waktu pengamatan.

Proses stokastik disebut wide-sense stationary (WSS) bila dua kondisi berikut terpenuhi, yaitu

1. $E[X(t)] = \mu_X = \overline{X} = \text{konstan}$
2. $E[X(t)X(t+\tau)] = R_{XX}(\tau)$

Kondisi yang pertama menyatakan bahwa nilai mean dari proses adalah konstan dan kondisi kedua dari proses menyatakan bahwa fungsi otokorelasi merupakan fungsi dari beda waktu pengamatan.

CONTOH

Proses stokastik $X(t)$ adalah

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$$

dengan A dan ω_0 adalah konstan dan θ terdistribusi uniform pada interval $(0, 2\pi)$.

Fungsi kepadatan probabilitas untuk variabel stokastik fase θ adalah

$$f_\theta(\theta) = \begin{cases} 1/(2\pi) & 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases}$$

Nilai ekspektasi dari fungsi cosinus adalah

$$E[\cos(\omega_0 t + \theta)] = \int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 t + \theta) \tfrac{1}{2\pi} d\theta$$

$$= \sin(\omega_0 t + \theta)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Nilai mean dari $X(t)$ adalah

$$E[X(t)] = E[g(\theta)] = \int_0^{2\pi} g(\theta) f_\theta(\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} A\cos(\omega_0 t+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta = 0$$

dan fungsi otokorelasi *X*(*t*)

$$R_{XX}(t,t+\tau) = E[A\cos(\omega_0 t+\theta)A\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau+\theta)]$$

$$= \frac{A^2}{2}E[\cos(\omega_0\tau)+\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau+2\theta)]$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)+\frac{A^2}{2}E[\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau+2\theta)]$$

Evaluasi suku kedua dapat diperoleh bahwa suku ini bernilai nol, sehingga

$$R_{XX}(t,t+\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau) = R_{XX}(\tau)$$

Karena proses stokastik*X*(*t*) memiliki nilai mean konstan dan fungsi otokorelasi bergantung pada τmaka proses stokastik*X*(*t*) adalah wide-sense stasioner (WSS).

RINGKASAN

Proses stokastik disebut stasioner orde satu bila fungsi kepadatan proses orde satu tidak berubah bila dilakukan translasi waktu pengamatan.

Proses stokastik disebut stasioner orde dua bila fungsi kepadatan orde dua tidak berubah bila dilakukan translasi waktu pengamatan.

Proses stokastik disebut wide-sense stasioner (WSS) bila proses memiliki nilai mean konstan dan fungsi otokorelasi yang tidak bergantung pada waktu.

LATIHAN

Proses stokastik *X*(*t*) adalah

$$X(t) = A\sin\omega_0 t$$

dengan $\omega_0$adalah konstan dan *A* merupakan variabel stokastik dengan distribusi uniform dalam interval (0, a_0)Apakah proses stokastiktersebut merupakan proses stokastik wide-sense stasioner? Buktikan.

5.3 Fungsi

5.3.1 Fungsi autokorelasi

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menganalisis korelasi proses stokastik terhadap dirinya.

PENGANTAR

Salah satu kegunaan dari fungsi autokorelasi adalah fungsi ini memberikan pengetahuan tentang bagaimana proses berubah terhadap waktu. Dalam bahasan ini akan dijelaskan cara memeroleh fungsi autokorelasi beserta sifat-sifat dari fungsi tersebut.

FUNGSI AUTOKORELASI

Fungsi autokorelasi dari proses stokastik$X(t)$ adalah korelasi $E[X_1X_2]$ dari dua variabel stokastik$X_1=X(t_1)$ dan $X_2=X(t_2)$ diperoleh dari proses pada waktu t_1 dan t_2. Secara matematis,

$$R_{XX}(t_1,t_2)=E[X(t_1,X(t_2)]$$

Untuk $t_1=t$ dan $t_2=t_1+\tau$ dengan τ adalah bilangan real, bentuk yang sesuai adalah

$$R_{XX}(t,t+\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]$$

Bila $X(t)$ adalah wide-sense stasioner, maka $R_{XX}(t,t+\tau)$ merupakan fungsi dari beda waktu $\tau=t_2-t_1$. Jadi, untuk proses stokastik wide-sense stasioner

$$R_{XX}(\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]$$

Untuk proses yang memiliki fungsi autokorelasi seperti di atas, fungsi tersebut memiliki sifat-sifat berikut:

1. $R_{XX}(\tau)=R_{XX}(-\tau)$
2. $R_{XX}(0)=E[X^2(t)]$
3. $|R_{XX}(\tau)|\le R_{XX}(0)$

Sifat yang pertama menunjukkan bahwa fungsi autokorelasi adalah fungsi genap, sedangkan sifat kedua menyatakan bahwa nilai ekspektasi $X(t)$ pada beda waktu $\tau=0$ merupakan nilai daya rata-rata dari proses. Sifat ketiga menyatakan bahwa untuk semua nilai autokorelasi selalu lebih kecil atau sama dengan daya rata-rata dari proses.

Sifat-sifat lain dari proses stokastik stasioner adalah

Bila $E[X(t)] \neq 0$ dan $X(t)$ tidak memiliki komponen periodik maka

$$\lim_{|\tau|\to\infty} R_{XX}(\tau) = \overline{X}^2$$

5. Bila $X(t)$ memiliki komponen periodik, maka $R_{XX}(t)$ akan memiliki komponen periodik dengan periode yang sama

6. Bila $X(t)$ memiliki mean nol dan tidak memiliki komponen periodik, maka

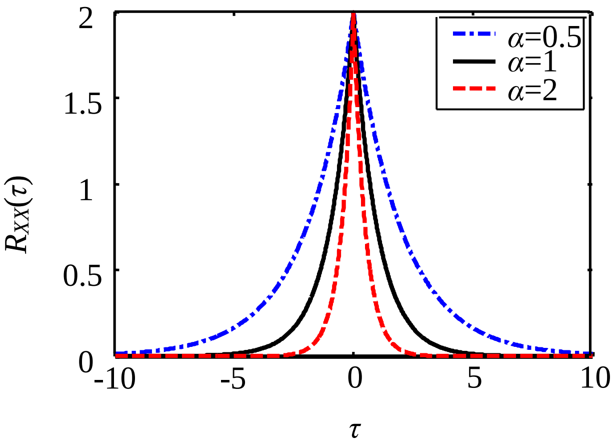
$$\lim_{|\tau|\to\infty} R_{XX}(\tau) = 0$$

CONTOH 1

Fungsi autokorelasi proses $X(t)$ dinyatakan dengan persamaan berikut:

$$R_{XX}(\tau) = 2e^{-\alpha|\tau|}$$

Plot fungsi autokorelasi untuk beberapa nilai α terdapat pada gambar.



Dari gambar ini dapat disimpulkan bahwa semakin besar nilai α dari fungsi autokorelasi, proses semakin cepat mengalami perubahan terhadap τ. Hal ini berarti juga bahwa fluktuasi dari proses stokastik tersebut semakin cepat terhadap waktu.

CONTOH 2

Fungsi autokorelasi proses stokastik$X(t)$ adalah

$$R_{XX}(\tau) = 25 + \frac{4}{1+6\tau^2}$$

Fungsi autokorelasi ini tidak memiliki komponen periodik.

Dari sifat ke-4, nilai mean dapat diperoleh

$$\lim_{|\tau|\to\infty} 25 + \frac{4}{1+6\tau^2} = \overline{X}^2$$

$$\overline{X} = \pm 5$$

Dari sifat ke-2, diperoleh daya rata-rata *X*

$$E[X^2(t)] = R_{XX}(0) = 25 + 4 = 29$$

Varians dari proses

$$\sigma_X^2 = E[X^2(t)] - (E[X(t)])^2 = 29 - 25 = 4$$

RINGKASAN

Fungsi autokorelasi dari proses stokastik wide-sense stasioner tidak bergantung pada waktu absolut tetapi bergantung pada beda waktu pengamatan

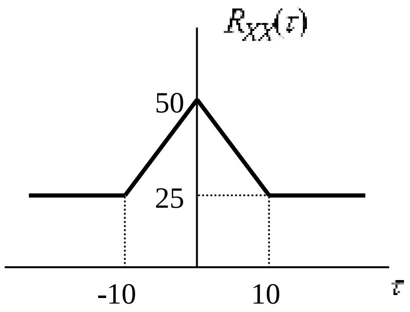
Fungsi autokorelasi adalah fungsi genap

Fungsi autokorelasi perodik pada periode yang sama dari proses.

Untuk fungsi autokorelasi yang tidak memiliki komponen periodik, nilai tak hingga dari fungsi autokorelasi sama dengan nilai mean kuadrat dari proses.

LATIHAN

Proses stokastik stasioner$X(t)$ memiliki fungsi autokorelasi seperti pada gambar. Dapatkan mean dan varians dari proses stokastiktersebut.



5.3.2 Fungsi Korelasi Silang

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menganalisis korelasi suatu proses stokastik terhadap proses stokastik lainnya.

PENGANTAR

Jika fungsi autokorelasi mendeskripsikan sifat-sifat dari satu proses stokastik, maka fungsi korelasi silang digunakan untuk mendeskripsikan hubungan antara dua proses stokastik. Salah satu aplikasi dari fungsi korelasi silang adalah untuk mendapatkan respons impulse dari sistem linear.

FUNGSI KORELASI SILANG

Fungsi korelasi silang dari dua proses stokastik *X*(*t*) dan *Y*(*t*) didefinisikan

$$R_{XY}(t,t+\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]$$

Jika *X*(*t*) dan *Y*(*t*) adalah wide-sense stasioner joint (joint WSS), $R_{XY}(t,t+\tau)$ adalah independen terhadap waktu absolut, jadi

$$R_{XY}(\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]$$

Jika

$$R_{XY}(t,t+\tau)=0$$

maka *X*(*t*) dan *Y*(*t*)disebut proses ortogonal. Bila dua proses adalah independen secara statistik, maka fungsi korelasi silangnya menjadi

$$R_{XY}(t,t+\tau)=E[X(t)]E[Y(t+\tau)]$$

Dan jika dua proses tersebut adalah wide-sense stasioner maka

$$R_{XY}(\tau)=\overline{X}\overline{Y}$$

Beberapa sifat dari korelasi silang untuk proses stokastik*X*(*t*) dan *Y*(*t*) wide-sense stasioner adalah

1. $R_{XY}(-\tau)=R_{YX}(\tau)$
2. $\left|R_{XY}(\tau)\right|\le\sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)}$

Proses stokastik*X*(*t*) dan *Y*(*t*) disebut wide-sense stasioner secara joint jika:

X(*t*) adalah proses stokastik wide-sense stasioner

Y(*t*) juga proses stokastik wide-sense stasioner

3. $R_{XY}(t,t+\tau)=R_{XY}(\tau)$

CONTOH 1

Dua proses stokastik *X*(*t*) dan *Y*(*t*) didefinisikan

$$X(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$$

$$Y(t)=B\cos(\omega_0 t)-A\sin(\omega_0 t)$$

dengan A dan B adalah variabel acak dan ω_0 konstan. Variabel acak A dan B tidak berkorelasi, memunyai mean nol dan varians sama. Proses stokastik$X(t)$ dan $Y(t)$ adalah wide-sense stasioner.

Fungsi korelasi silang proses stokastik $X(t)$ dan $Y(t)$ adalah

$$R_{XY}(t,t+\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]$$

$$=E[(A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t))(B\cos(\omega_0(t+\tau))-A\sin(\omega_0(t+\tau)))]$$

$$=E[AB\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau)+B^2\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau)$$

$$-A^2\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t+\omega_0\tau)-AB\sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t+\omega_0\tau)]$$

Karena A dan B tidak berkorelasi dan zero-mean maka $E[AB]=0$, dan karena A dan B mempunyai varians sama maka $E[A^2] = E[B^2] = \sigma^2$.

Sehingga

$$R_{XY}(t,t+\tau)=\sigma^2\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau)-\sigma^2\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t+\omega_0\tau)$$

$$=-\sigma^2\sin(\omega_0\tau)$$

Karena fungsi korelasi silang proses stokastik $X(t)$ dan $Y(t)$ bukan fungsi dari waktu absolut tetapi merupakan fungsi dari beda waktu maka $X(t)$ dan $Y(t)$ adalah wide-sense statasioner joint.

CONTOH 2

Identifikasi sistem merupakan salah satu aplikasi dari fungsi korelasi silang. Dengan menggunakan teknik korelasi silang pengukuran respon impulse dari sistem linear dapat dilakukan. Misalkan input pada sistem adalah proses stokastik $X(t)$ dan output sistem adalah $Y(t)$ serta respon impulse dari sistem adalah $h(t)$.

Fungsi korelasi silang antara input dan output adalah

$$R_{XY}(\tau)=E[X(t-\tau)Y(t)]=E\left[X(t-\tau)\int_{-\infty}^{\infty}X(u)h(t-u)\,du\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}E[X(t-\tau)X(u)]\,h(t-u)\,du$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}R_{XX}(u-t+\tau)\,h(t-u)\,du$$

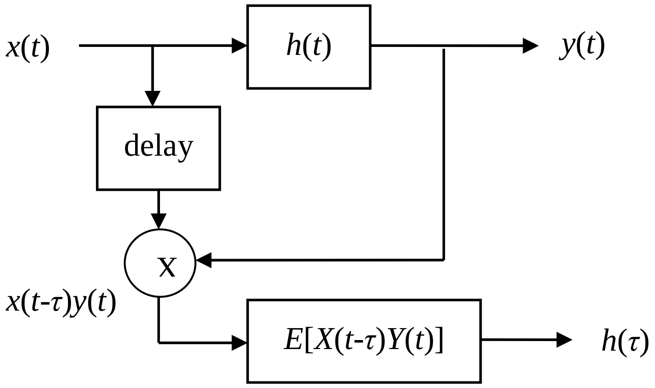
Misal input $X(t)$ berupa white noise, jadi

$$R_{XX}(u-t+\tau)=\delta(u-t+\tau)$$

maka

$$R_{XY}(\tau) = h(\tau)$$

Gambar berikut merupakan ilustrasi dari aplikasi korelasi silang tersebut, dengan τ adalah delay time, dan $x(t)$ merupakan proses white noise.



RINGKASAN

Dua proses stokastik$X(t)$ dan $Y(t)$ memiliki fungsi korelasi silang

Bila proses stokastik $X(t)$ dan $Y(t)$ adalah independen maka fungsi korelasi silang dari proses tersebut sama dengan perkalian dari nilai mean masing-masing proses.

Jika proses stokastik$X(t)$ dan $Y(t)$ adalah wide-sense stasioner, maka fungsi korelasi silang proses tersebut tidak bergantung pada waktu absolut tetapi merupakan fungsi dari beda waktu.

LATIHAN

Dua proses stokastik $X(t)$ dan $Y(t)$ didefinisikan

$$X(t) = \sin(\omega t + \theta)$$

$$Y(t) = \cos(\omega t + \theta)$$

dengan ϑ adalah variabel acak terdistribusi uniform dalam interval $(-\pi,\ \pi)$. Dapatkan fungsi korelasi silang antara $X(t)$ dan $Y(t)$.

5.3.3 Fungsi Kovarians

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menganalisis kovarians proses stokastik terhadap dirinya dan proses lain.

PENGANTAR

Fungsi kovarians digunakan untuk mendeskripsikan hubungan dari proses stokastik terhadap dirinya dan hubungan dengan proses stokastik yang lain. Fungsi ini adalah varians dari dua variabel acak yang diperoleh dari satu atau dua proses stokastik pada dua waktu pengamatan yang beda.

FUNGSI KOVARIANS

Konsep kovarians dari dua variabel acak dikembangkan untuk kasus proses stokastik. Fungsi autokovarians dari proses stokastik *X*(*t*) didefinisikan

$$C_{XX}(t,t+\tau)=E[\{X(t)-E[X(t)]\}\{X(t+\tau)-E[X(t+\tau)]\}]$$

atau ditulis dalam bentuk

$$C_{XX}(t,t+\tau)=R_{XX}(t,t+\tau)-E[X(t)]E[X(t+\tau)]$$

Fungsi kovarians silang untuk dua proses stokastik *X*(*t*) dan *Y*(*t*) didefinisikan

$$C_{XY}(t,t+\tau)=E[\{X(t)-E[X(t)]\}\{Y(t+\tau)-E[Y(t+\tau)]\}]$$

atau

$$C_{XY}(t,t+\tau)=R_{XY}(t,t+\tau)-E[X(t)]E[Y(t+\tau)]$$

Jika *X*(*t*) dan *Y*(*t*) adalah wide-sense stasioner joint, maka

$$C_{XX}(\tau)=R_{XX}(\tau)-\overline{X}^2$$

$$C_{XY}(\tau)=R_{XY}(\tau)-\overline{X}\overline{Y}$$

Untuk dua proses stokastik *X*(*t*) dan *Y*(*t*), jika

$$C_{XY}(t,t+\tau)=0$$

maka proses tersebut tidak berkorelasi. Hal ini berarti bahwa

$$R_{XY}(t,t+\tau)=E[X(t)]E[Y(t+\tau)]$$

Persamaan ini menunjukkan bahwa proses tersebut adalah independen. Jadi, proses yang independen adalah tidak berkorelasi.

CONTOH

Proses stokastik $X(t)$ adalah

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$$

dengan A dan ω_0 adalah konstan dan ϑ terdistribusi uniform pada interval $(0,2\pi)$.

Nilai mean dari $X(t)$ adalah

$$E[X(t)] = \int_0^{2\pi} A\cos(\omega_0 t + \theta)\frac{1}{2\pi}d\theta = 0$$

dan fungsi autokorelasi $X(t)$

$$R_{XX}(t,t+\tau) = E[A\cos(\omega_0 t + \Theta)A\cos(\omega_0 t + \omega_0\tau + \theta)]$$

$$= \frac{A^2}{2}E[\cos(\omega_0\tau) + \cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau + 2\theta)]$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau) + \frac{A^2}{2}E[\cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau + 2\theta)]$$

Evaluasi suku kedua dapat diperoleh bahwa suku ini bernilai nol, sehingga

$$R_{XX}(t,t+\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau) = R_{XX}(\tau)$$

Karena proses stokastik$X(t)$ adalah wide-sense stasioner, maka fungsi autokovarians dari $X(t)$ dapat dihitung sebagai berikut

$$C_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau) - \overline{X}^2$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau) - 0 = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

Jadi, fungsi autokovarians $X(t)$ padacontoh ini sama dengan fungsi autokorelasinya.

RINGKASAN

Fungsi kovarians proses stokastik$X(t)$ adalah fungsi korelasi proses dikurangi dengan perkalian dua fungsi mean dari proses yang diperoleh pada t dan $t+\tau$.

Fungsi kovarians silang dari proses stokastik wide-sense stasioner $X(t)$ dan $Y(t)$ sama dengan fungsi korelasi silang $X(t)$ dan $Y(t)$ dikurangi dengan perkalian mean dari masing-masing proses.

Untuk proses stokastik $X(t)$ dan $Y(t)$ yang independent secara statistik maka proses tersebut tidak berkorelasi dengan fungsi kovarians sama dengan nol.

LATIHAN

Proses stokastik $X(t)$ adalah

$$X(t) = A\sin\omega_0 t$$

dengan ω_0 adalah konstan dan A merupakan variabel acak dengan distribusi uniform dalam interval $(0, a_0)$. Dapatkan fungsi autokovarians dari $X(t)$.

5.4 Sekuen Acak

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menganalisis sekuen acak dalam fungsi korelasinya.

PENGANTAR

Sekuen acak didefinisikan sebagai proses stokastik dengan waktu diskrit. Sifat-sifat untuk sekuen acak ini adalah analog dengan proses stokastik kontinu. Dalam bahasan ini, sekuen acak dideskripsikan sebagai sekuen terurut dari variabel acak. Nilai mean dan fungsi autokorelasi dari sekuen tersebut, dan fungsi korelasi silang dari dua sekuen dibahas dalam bahasan ini.

SEKUEN STOKASTIK

Proses stokastik $X(t)$ adalah proses waktu diskrit bila $X(t)$ didefinisikan hanya untuk sekumpulan waktu tertentu, $t_n = nT$, dengan T adalah konstan dan n adalah integer.

Fungsi sampel dari proses waktu diskrit secara lengkap dideskripsikan oleh sekuen terurut dari variabel acak $X_n = X(nT)$.

Jadi, sekuen acak X_n adalah sekuen terurut dari variabel acak $X_0, X_1, \ldots, X_k, \ldots$.

Nilai ekspektasi atau mean dari sekuen acak X_n

$$\overline{X}_n = E[X_n]$$

Fungsi autokorelasi sekuen X_n adalah

$$R_{XX}[m,k] = E[X_m X_{m+k}]$$

dan fungsi autokovarians X_n adalah

$$C_{XX}[m,k] = R_{XX}[m,k] - \overline{X}_m \overline{X}_{m+k}$$

Sekuen acak stasioner X_n disebut wide-sense stasioner jika dan hanya jika untuk semua n memenuhi kondisi berikut:

$$E[X_n] = \overline{X}$$

dan

$$R_{XX}[n,k] = R_{XX}[0,k] = R_{XX}[k]$$

Untuk sekuen acak wide-sense stasioner X_n, fungsi autokorelasi $R_{XX}[k]$ memiliki beberapa sifat berikut:

1. $R_{XX}[0] \geq 0$
2. $R_{XX}[k] = R_{XX}[-k]$
3. $R_{XX}[0] \geq |R_{XX}[k]|$

Fungsi korelasi silang sekuen acak X_n dan Y_n adalah

$$R_{XY}[m,k] = E[X_m Y_{m+k}]$$

Sekuen acak X_n dan Y_n adalah wide-sense stasioner joint jika X_n dan Y_n keduanya adalah wide-sense stasioner dan korelasi silang sekuen tersebut bergantung hanya pada beda waktu (indeks) antara dua variabel acak, jadi

$$R_{XY}[m,k] = R_{XY}[k]$$

CONTOH

Input pada filter digital adalah sekuen acak iid $\cdots, X_{-1}, X_0, X_1, \cdots$ dengan $E[X_i]=0$ dan $\mathrm{var}[X_i] = \sigma_X^2$. Output filter adalah sekuen acak yang dinyatakan dalam bentuk

$$Y_n = X_n + b_1 X_{n-1} \text{ untuk semua } n \text{ integer}$$

Karena $Y_i=X_i+b_1X_{i-1}$ dan X_n adalah sekuen iid dengan $E[X_n]=0$ dan $\mathrm{var}[X_n] = \sigma_X^2$

maka fungsi autokovarians X_n adalah

$$C_{XX}[n,k] = R_{XX}[n,k] - \overline{X}_n \overline{X}_{n+k} = R_{XX}[n,k]$$

Untuk $k = 0$

$$R_{XX}[n,k] = E[X_n X_n] = E[X_n^{\ 2}] = \mathrm{var}[X_n] - (\overline{X}_n)^2 = \mathrm{var}[X_n] = \sigma_X^2$$

dan untuk $k \neq 0$

$$R_{XX}[n,k] = E[X_n X_{n+k}] = 0$$

Jadi,

$$C_{XX}[n,k] = R_{XX}[n,k] = \begin{cases} \sigma_X^2 & k = 0 \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases}$$

Nilai ekspektasi sekuen Y_n adalah

$$E[Y_i] = E[X_i] + E[b_1 X_{i-1}] = 0$$

dan fungsi autokovarians Y_n adalah

$$C_{YY}[n,k] = R_{YY}[n,k] - \overline{Y}_n \overline{Y}_{n+k} = R_{YY}[n,k]$$

Fungsi autokorelasi X_n untuk k = 0

$$R_{YY}[0] = E[Y_n Y_n] = E[(X_n + b_1 X_{n-1})(X_n + b_1 X_{n-1})]$$

$$= E[X_n X_n] + b_1 E[X_n X_{n-1}] + b_1 E[X_{n-1} X_n] + b_1{}^2 E[X_{n-1} X_{n-1}]$$

$$= \sigma_X^2 + 0 + 0 + b_1{}^2 \sigma_X^2 = (1 + b_1{}^2)\, \sigma_X^2$$

dan untuk $k \neq 0$

$$R_{YY}[k] = E[Y_n Y_{n+k}] = E[(X_n + b_1 X_{n-1})(X_{n+k} + b_1 X_{n-1+k})]$$

$$= E[X_n X_{n+k}] + b_1 \cdot E[X_n X_{n-1+k}] + b_1 \cdot E[X_{n-1} X_{n+k}] + b_1{}^2 \cdot E[X_{n-1} X_{n-1+k}]$$

Untuk $k = 1$

$$R_{YY}[1] = b_1 E[X_n X_n] = b_1 \sigma_X^2$$

dan untuk $k = -1$

$$R_{YY}[-1] = b_1 E[X_{n-1} X_{n-1}] = b_1 \sigma_X^2$$

Jadi, fungsi autokorelasi Y_n adalah

$$R_{YY}[k] = \begin{cases} (1 + b_1{}^2)\sigma_X^2 & k = 0 \\ b_1 \sigma_X^2 & k = \pm 1 \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases}$$

atau fungsi autokovarians Y_n

$$C_{YY}[k] = \begin{cases} (1 + b_1{}^2)\sigma_X^2 & k = 0 \\ b_1 \sigma_X^2 & k = \pm 1 \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases}$$

RINGKASAN

Sekuen acak adalah proses stokastik dengan waktu diskrit.

Sekuen acak disebut wide-sense stasioner jika memiliki nilai mean konstan dan fungsi autokorelasi bergantung pada indeks dan bukan pada waktu absolut.

Dua sekuen acak disebut wide-sense stasioner joint jika kedua sekuen tersebut adalah wide-sense stasioner dan fungsi korelasi silangnya merupakan fungsi indeks saja.

LATIHAN

X_n adalah sekuen acak wide-sense stasioner dengan fungsi autokorelasi $R_{XX}[k]$. Sekuen acak Y_n diperoleh dari X_n dengan hubungan sebagai berikut:

$$Y_n = -1^n X_n$$

Dapatkan fungsi autokorelasi dari Y_n dan korelasi silang dari X_n dan Y_n. Apakah sekuen X_n dan Y_n adalah wide-sense stasioner joint?

5.5 Fungsi

5.5.1 PSD Proses Stokastik

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menganalisis kepadatan spektral daya proses stokastik.

PENGANTAR

Fungsi autokorelasi dari proses stokastik mendeskripsikan proses dalam domain waktu sedangkan fungsi kepadatan spektral daya dari proses mendeskripsikan distribusi daya dari proses dalam domain frekuensi. Dalam bahasan ini, fungsi kepadatan spektral daya didefinisikan sebagai transformasi Fourier dari fungsi autokorelasi suatu proses.

FUNGSI KEPADATAN SPEKTRAL DAYA

Fungsi kepadatan spektral daya (*power spectral density* – PSD) untuk proses stokastik wide-sense stasioner $X(t)$ didefinisikan sebagai transformasi Fourier dari fungsi autokorelasi proses stokastik, yaitu

$$S_{XX}(\omega) = S_{XX}(2\pi f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

atau

$$R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f)\, e^{j\omega\tau}\, df = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega$$

Beberapa sifat kepadatan spektral daya adalah

1. $S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) \cos\omega\tau\, d\tau$

Untuk proses stokastik bernilai real, $S_{XX}(\omega)$ adalah fungsi real dari ω.

Bukti:

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)(\cos\omega\tau - j\sin\omega\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau - j\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau$$

2. $S_{XX}(\omega) \ge 0$
3. $S_{XX}(\omega) = S_{XX}(-\omega)$ fungsi genap
4. $P_{XX} = E[X^2(t)] = R_{XX}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)\, d\omega \ge 0$

Daya rata-rata dari proses stokastik adalah integral dari fungsi kepadatan spektral daya pada seluruh frekuensi. Jadi unit (satuan) dari $S_{XX}(\omega)$ adalah daya per hertz, yang merupakan kepadatan spektral daya.

Bukti:

$$E[X^2(t)] = E[X(t)X(t)] = R_{XX}(0) = R_{XX}(\tau)\Big|_{\tau=0}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)\, e^{-j\omega\tau}\, d\omega\Big|_{\tau=0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)\, d\omega$$

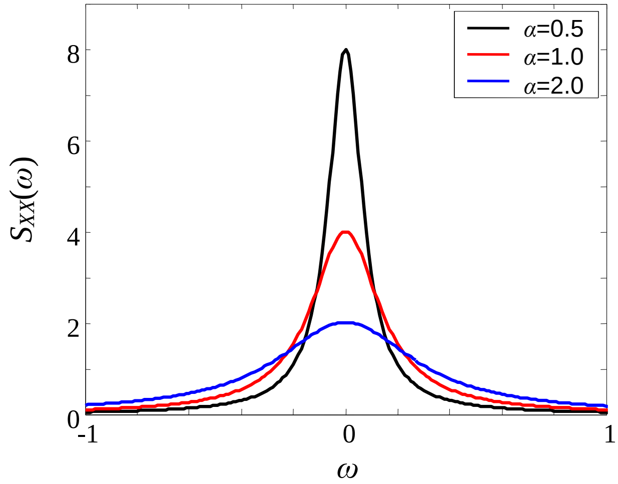
Fungsi kepadatan spektral daya dikenal juga dengan beberapa nama seperti kepadatan spektral, spektrum dan spektrum daya.

CONTOH 1

Fungsi kepadatan spektral daya dari proses $X(t)$ dinyatakan dengan persamaan berikut:

$$S_{XX}(\omega) = \frac{4\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}$$

Plot fungsi psd dari $X(t)$ untuk beberapa nilai α terdapat pada gambar.

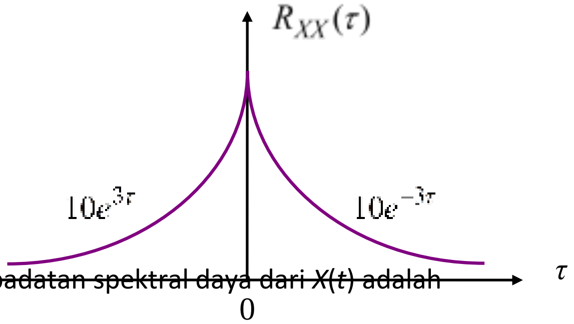


CONTOH 2

Proses stokastik$X(t)$ memiliki fungsi autokorelasi

$$R_{XX}(\tau) = 10e^{-3|\tau|}$$

Gambar berikut adalah sket fungsi autokorelasi dari proses stokastik$X(t)$.



Fungsi kepadatan spektral daya dari $X(t)$ adalah

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

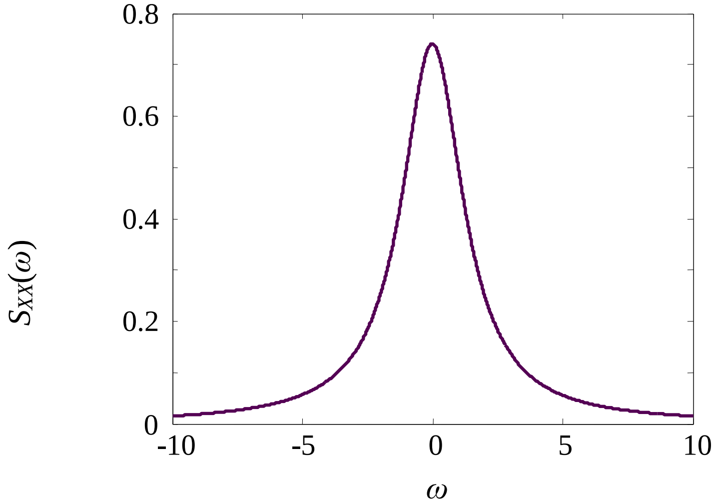
$$= \int_{-\infty}^{0} 10e^{3\tau} e^{-j\omega\tau}\, d\tau + \int_{0}^{\infty} 10e^{-3\tau} e^{-j\omega t}\, d\tau$$

$$=10\int_{-\infty}^{0} e^{(3-j\omega)\tau}\,d\tau+10\int_{0}^{\infty} e^{(-3-j\omega t)}\,d\tau$$

$$=10\left[\frac{1}{3-j\omega}\,e^{(3-j\omega)\tau}\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{1}{-3-j\omega}\,e^{(-3-j\omega\tau)}\Big|_{0}^{\infty}\right]$$

$$=10\left[\frac{1}{3-j\omega}-\frac{1}{-3-j\omega}\right]=\frac{60}{9+\omega^2}$$

Plot fungsi kepadatan spektral daya dari *X*(*t*) tersebut adalah



Uji validasi fungsi kepadatan spektral daya $S_{XX}(\omega)$ yang telah diperoleh

1. $S_{XX}(\omega)\geq 0$

$$\frac{60}{9+\omega^2}\geq 0$$

2. $S_{XX}(\omega)=S_{XX}(-\omega)$

$$\frac{60}{9+\omega^2}=\frac{60}{9+(-\omega)^2}$$

3. $S_{XX}(\omega)$ merupakan fungsi real

$$\frac{60}{9+\omega^2}\;\rightarrow\;\text{real}$$

Daya rata-rata proses stokastik*X*(*t*) adalah

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{60}{9+\omega^2}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{20}{1+(\omega/3)^2}\, d(\omega/3) \;\rightarrow\; (\omega/3) = x$$

$$= \frac{10}{\pi}\tan^{-1} x\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{10}{\pi}(\tan^{-1}\infty - \tan^{-1} - \infty) = 10$$

dengan cara lain, daya rata-rata proses

$$P_{XX} = E[X^2(t)] = R_{XX}(0)$$

$$= 10e^{-3(0)} = 10$$

RINGKASAN

Fungsi kepadatan spektral daya dari proses stokastik real adalah fungsi genap, real dan positif dari frekuensi ω.

Daya rata-rata dari proses stokastik adalah integral dari fungsi kepadatan spektral daya pada seluruh frekuensi.

LATIHAN

Proses stokastik$X(t)$ didefinisikan

$$X(t) = a\sin(\omega_0 t + \theta)$$

dengan a dan ω adalah konstan, dan ϑ adalah variabel acak terdistribusi uniform dalam interval $(0,2\pi)$.

Dapatkan:

Fungsi kepadatan spektral daya dari $X(t)$.

Daya rata-rata dari $X(t)$.

5.5.2 Fungsi Kepadatan Spektral Silang

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menganalisis kepadatan spektral silang suatu proses stokastik terhadap proses lain.

PENGANTAR

Fungsi kepadatan spektral silang dari dua proses stokastik mendeskripsikan distribusi daya dari proses tersebut dalam domain frekuensi. Fungsi kepadatan spektral silang ini dinyatakan sebagai transformasi Fourier dari fungsi korelasi silang untuk kedua proses tersebut.

FUNGSI KEPADATAN SPEKTRAL SILANG

Proses stokastik $W(t)$ diberikan sebagai jumlah dari dua proses riil $X(t)$ dan $Y(t)$, yaitu

$$W(t) = X(t) + Y(t)$$

Fungsi autokorelasi dari $W(t)$ adalah

$$R_{WW}(t,t+\tau) = E[W(t)W(t+\tau)]$$

$$= E[(X(t)+Y(t))(X(t+\tau)+Y(t+\tau))]$$

$$= R_{XX}(t,t+\tau) + R_{YY}(t,t+\tau) + R_{XY}(t,t+\tau) + R_{YX}(t,t+\tau)$$

Jika proses stokastik $X(t)$ dan $Y(t)$ adalah wide-sense stasioner joint, maka $W(t)$ adalah wide-sense stasioner dan

$$R_{WW}(\tau) = R_{XX}(\tau) + R_{YY}(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau)$$

Transformasi Fourier dari korelasi silang $R_{XY}(\tau)$ didefinisikan sebagai fungsi kepadatan spektral-silang

$$S_{XY}(f) = S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

dan

$$R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(f)\, e^{j\omega\tau}\, d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\tau$$

dengan cara yang sama untuk $S_{YX}(\omega)$.

Beberapa sifat kepadatan spektral silang dari proses stokastik $X(t)$ dan $Y(t)$ adalah

1. $S_{XY}(\omega) = S^{*}_{YX}(\omega) = S_{YX}(-\omega)$

Bukti:

$$S_{YX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(\tau) e^{-j\omega\tau} \, d\tau$$

$$S_{YX}^{*}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(\tau) e^{j\omega\tau} \, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(\tau) e^{-j(-\omega)\tau} \, d\tau = S_{YX}(-\omega)$$

2. Re ($S_{XY}(\omega)$) merupakan fungsi genap

Im ($S_{XY}(\omega)$) merupakan fungsi ganjil

CONTOH

Proses stokastik $X(t)$ dibentuk dari jumlah sinyal plus noise, yaitu

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) + N(t)$$

dengan A dan ω_0 adalah konstan, dan ϑ adalah variabel acak terdistribusi uniform dalam interval $(0, 2\pi)$. Noise adalah independen terhadap ϑ dengan mean nol dan merupakan wide-sense stasioner dengan fungsi autokorelasi $R_{NN}(\tau)$. Dapatkan spektral daya dari $X(t)$.

Fungsi autokorelasi dari $X(t)$ adalah

$$R_{XX}(t, t+\tau) = E[(A\cos(\omega_0 t + \theta) + N(t))(A\cos(\omega_0(t+\tau) + \theta) + N(t+\tau))]$$

Misalkan

$$s_1 = A\cos(\omega_0 t + \theta),\ N_1 = N(t),\ s_2 = A\cos(\omega_0(t+\tau) + \theta) \text{ dan } N_2 = N(t+\tau)$$

maka dalam notasi singkat, fungsi autokorelasi dari $X(t)$ adalah

$$R_{XX}(t, t+\tau) = E[s_1 s_2] + E[s_1 N_2] + E[s_2 N_1] + E[N_1 N_2]$$

Karena sinyal dan noise adalah independen, maka

$$R_{XX}(t, t+\tau) = E[s_1 s_2] + E[s_1]E[N_2] + E[s_2]E[N_1] + E[N_1 N_2]$$

diperoleh

$$R_{XX}(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau + R_{NN}(\tau)$$

Kepadatan spektral daya adalah transformasi Fourier dari fungsi autokorelasi di atas, yaitu

$$S_{XX}(f) = \frac{A^2}{4}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] + S_{NN}(f)$$

dengan $S_{NN}(f)$ adalah kepadatan spektral daya dari noise.

RINGKASAN

Fungsi kepadatan spektral silang proses stokastik $X(t)$ dan $Y(t)$ adalah transformasi Fourier dari fungsi korelasi silang dari proses tersebut.

Fungsi kepadatan spektral silang proses stokastik $X(t)$ dan $Y(t)$ tidak perlu fungsi genap atau real.

LATIHAN

Proses stokastik $Y(t)$ didefinisikan sebagai

$$Y(t) = X(t - d)$$

dengan d adalah konstanta delay dan $X(t)$ merupakan proses stokastik wide-sense stasioner. Dapatkan $R_{YX}(\tau)$, $S_{YX}(f)$, $R_{YY}(\tau)$ dan $S_{YY}(f)$.

5.5.3 Kepadatan Spektral Daya Sekuen Acak

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menganalisis kepadatan spektral daya sekuen acak.

PENGANTAR

Kepadatan spektral daya dari sekuen acak mendeskripsikan distribusi daya dari sekuen tersebut dalam domain frekuensi. Kepadatan spektral daya dari sekuen acak dinyatakan sebagai transformasi Fourier dari fungsi autokorelasi sekuen acak tersebut. Sedangkan sifat-sifat dari kepadatan spektral daya dan kepadatan spektral silang sekuen acak ini adalah mirip dengan kepadatan spektral daya dan spektral silang dari proses stokastik kontinu.

KEPADATAN SPEKTRAL DAYA UNTUK SEKUEN ACAK

Fungsi kepadatan spektral daya sekuen acak X_n didefinisikan sebagai transformasi Fourier dari fungsi autokorelasi dari sekuen acak tersebut, yaitu

$$S_{XX}(\omega) = S_{XX}(2\pi f) = \sum_{-\infty}^{\infty} R_{XX}[k]\, e^{-j\omega k}$$

atau

$$R_{XX}[k] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f)\, e^{j\omega k}\, df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)\, e^{j\omega k}\, d\omega$$

Jika X_n dan Y_n adalah sekuen acak wide-sense stasioner secara joint dengan autokorelasi $R_{XX}[k]$ dan $R_{YY}[k]$, dan korelasi silang $R_{XY}[k]$ dan $R_{YX}[k]$, maka transformasi Fourier dari korelasi silang didefinisikan sebagai fungsi kepadatan spektral silang, jadi

$$S_{XY}(f) = S_{XY}(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} R_{XY}[k]\, e^{-j\omega k}$$

dan

$$R_{XY}[k] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(f)\, e^{j\omega k}\, df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega)\, e^{j\omega k}\, d\omega$$

Sifat-sifat untuk kepadatan spektral daya dan kepadatan spektral silang untuk sekuen acak adalah mirip dengan proses stokastik kontinu.

CONTOH

Input pada filter digital adalah sekuen acak iid (independent, identically distributed) $\cdots, X_{-1}, X_0, X_1, \cdots$ dengan $E[X_i]=0$ dan $\text{var}[X_i] = \sigma_X^2$. Output filter adalah sekuen acak yang dinyatakan dalam bentuk

$$Y_n = X_n + b_1 X_{n-1} \quad \text{untuk semua } n \text{ integer}$$

Dapatkan fungsi autokorelasi, autokovarians dan fungsi kepadatan spektral daya sekuen acak Y_n.

Karena X_n adalah sekuen iid dengan $E[X_n]=0$ dan $\text{var}[X_n] = \sigma_X^2$, maka fungsi autokovarians X_n adalah

$$C_{XX}[n,k] = R_{XX}[n,k] - \overline{X}_n \overline{X}_{n+k} = R_{XX}[n,k]$$

Jadi, fungsi autokovarians X_n sama dengan fungsi autokorelasinya.

Fungsi autokorelasi X_n untuk $k = 0$

$$R_{XX}[n,k] = E[X_n X_n] = E[X_n{}^2] = \text{var}[X_n] - (\overline{X}_n)^2 = \text{var}[X_n] = \sigma_X^2$$

dan untuk $k \neq 0$

$$R_{XX}[n,k] = E[X_n X_{n+k}] = 0$$

ditulis dalam bentuk persamaan

$$C_{XX}[n,k] = R_{XX}[n,k] = \begin{cases} \sigma_X^2 & k = 0 \\ 0 & \text{yanglain} \end{cases}$$

Nilai ekspektasi sekuen Y_n adalah

$$E[Y_i] = E[X_i] + E[b_1 X_{i-1}] = 0$$

dan fungsi autokorelasi Y_n adalah

$$R_{YY}[n,k] = E[Y_n Y_{n+k}]$$

Untuk k = 0

$$R_{YY}[0] = E[Y_n Y_n] = E[(X_n + b_1 X_{n-1})(X_n + b_1 X_{n-1})]$$

$$= E[X_n X_n] + b_1 E[X_n X_{n-1}] + b_1 E[X_{n-1} X_n] + b_1{}^2 E[X_{n-1} X_{n-1}]$$

$$= \sigma_X^2 + 0 + 0 + b_1{}^2 \sigma_X^2 = (1 + b_1{}^2)\, \sigma_X^2$$

dan untuk $k \neq 0$

$$R_{YY}[k] = E[Y_n Y_{n+k}] = E[(X_n + b_1 X_{n-1})(X_{n+k} + b_1 X_{n-1+k})]$$

$$= E[X_n X_{n+k}] + b_1 \cdot E[X_n X_{n-1+k}] + b_1 \cdot E[X_{n-1} X_{n+k}] + b_1{}^2 \cdot E[X_{n-1} X_{n-1+k}]$$

jika k =1

$$R_{YY}[1] = b_1 E[X_n X_n] = b_1 \sigma_X^2$$

dan k = -1 diperoleh

$$R_{YY}[-1] = b_1 E[X_{n-1} X_{n-1}] = b_1 \sigma_X^2$$

jadi,

$$R_{YY}[k] = \begin{cases} (1 + b_1{}^2)\sigma_X^2 & k = 0 \\ b_1 \sigma_X^2 & k = \pm 1 \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases}$$

Fungsi kepadatan spektral daya adalah

$$S_{YY}(\omega) = \sum_{k=-1}^{1} R_{YY}[k]\, e^{-j\omega k}$$

$$=b_1\sigma_X^2 e^{j\omega} + (1+b_1{}^2)\sigma_X^2 + b_1\sigma_X^2 e^{-j\omega}$$

$$=(1+b_1{}^2)\sigma_X^2 + 2b_1\sigma_X^2 \cos\omega = ((1+b_1{}^2) + 2b_1 \cos\omega)\sigma_X^2$$

Catatan:

$$\cos\omega = \frac{1}{2}(e^{j\omega} + e^{-j\omega})$$

RINGKASAN

Fungsi kepadatan spektral daya sekuen acak X_n didefinisikan sebagai transformasi Fourier dari fungsi autokorelasi dari sekuen acak tersebut.

Sekuen acak X_n adalah sekuen iid dengan mean nol memiliki fungsi autokovarians sama dengan fungsi autokorelasinya sehingga kepadatan spektral daya dari sekuen X_n dapat diperoleh dari transformasi Fourier dari salah satu fungsi tersebut.

LATIHAN

Model data untuk prediksi linear adalah

$$X_n = -aX_{n-1} + e_n \qquad |a| < 1$$

dengan e_n adalah error yang merupakan white noise dengan mean nol (zero-mean) dan var(e_n)=σ_N^2. Dapatkan fungsi kepadatan daya dari X_n.

5.6 Model Noise

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu membedakan jenis noise berdasarkan fungsi korelasi dan spektral daya.

PENGANTAR

Pada bahasan ini, akan dijelaskan beberapa model proses stokastik noise dalam fungsi korelasi dan kepadatan spektral dayanya serta deskripsi secara grafis dari fungsi-fungsi tersebut. Proses stokastik noise tersebut adalah white noise, band-limited white noise dan colored noise.

WHITE NOISE

Fungsi sampel $n(t)$ dari proses stokastik noise wide-sense stasioner $N(t)$ disebut white noise bila kepadatan spektral daya dari $N(t)$ adalah konstan pada seluruh frekuensi. Jadi,

$$S_{NN}(\omega) = N_0/2$$

dengan N_0 adalah konstanta positif. Melalui transformasi Fourier balik diperoleh fungsi autokorelasi dari $N(t)$ adalah

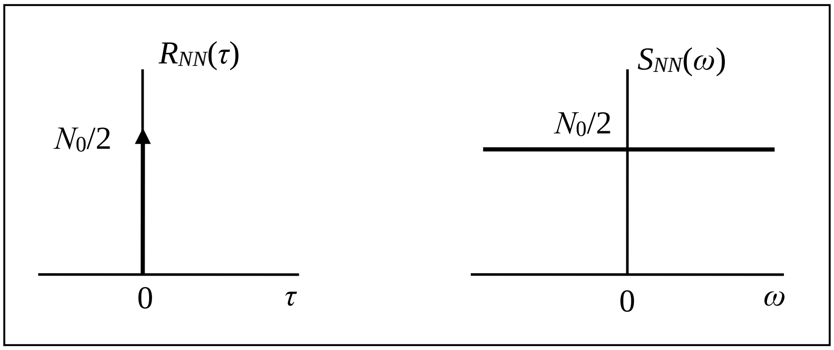
$$R_{NN}(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau)$$

Nama white noise diturunkan dari analogi dengan cahaya putih yang berisi seluruh frekuensi cahaya yang dapat dilihat dalam spektrum-nya.

White noise adalah tidak dapat direalisasikan, seperti yang terlihat dari daya rata-rata dari noise ini adalah

$$P_{NN} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{NN}(\omega)d\omega = \infty$$

Gambar berikut merupakan fungsi autokorelasi dan kepadatan spektral daya dari white noise.



BANDLIMITED WHITE NOISE

Noise yang memiliki kepadatan spektral daya tak nol dan konstan pada pita (band) frekuensi terbatas dan nol untuk frekuensi yang lainnya disebut dengan band-limited white noise.

Fungsi kepadatan spektral daya dan autokorelasi berikut merupakan lowpass band-limited white noise

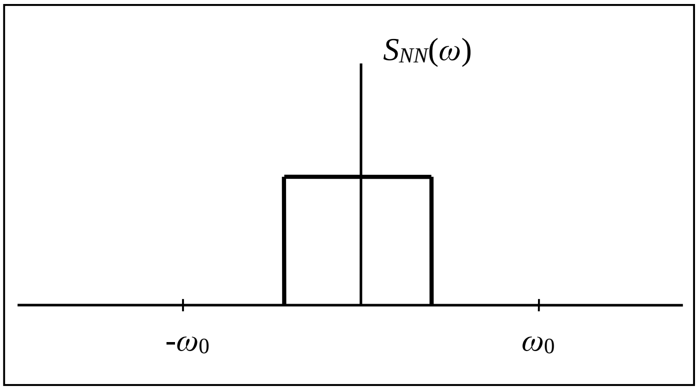
$$S_{NN}(\omega) = \begin{cases} P\pi/W & -W < \omega < W \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases}$$

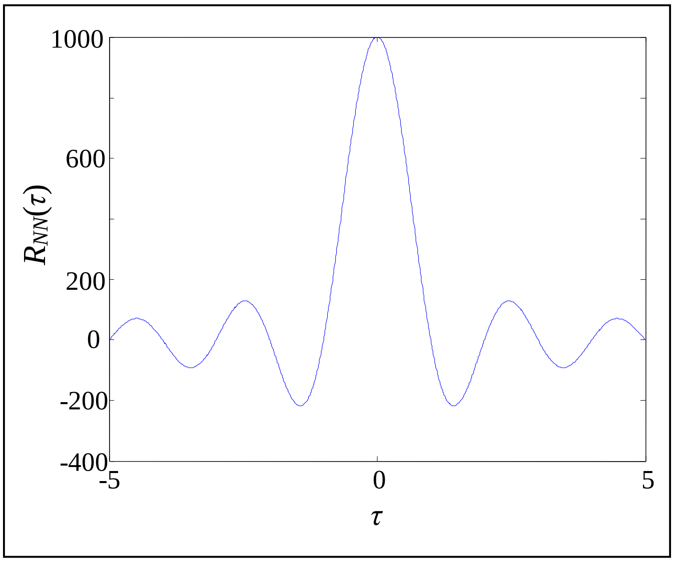
dan fungsi autokorelasi

$$R_{NN}(\tau) = P\frac{\sin(W\tau)}{W\tau}$$

dengan *P* sama dengan daya dalam noise tersebut.

Gambar berikut merupakan fungsi kepadatan spektral daya dan autokorelasi dari lowpass band-limited white noise.





Band-limited white noise dapat berupa bandpass dengan fungsi kepadatan spektral daya dan autokorelasi adalah

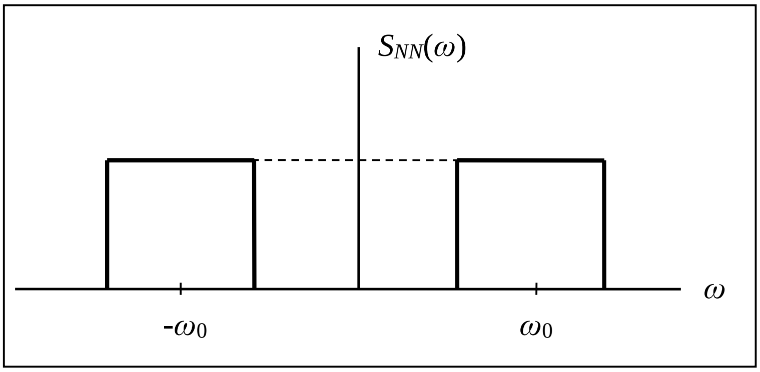
$$S_{NN}(\omega) = \begin{cases} P\pi/W & \omega_0 - (W/2) < |\omega| < \omega_0 + (W/2) \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases}$$

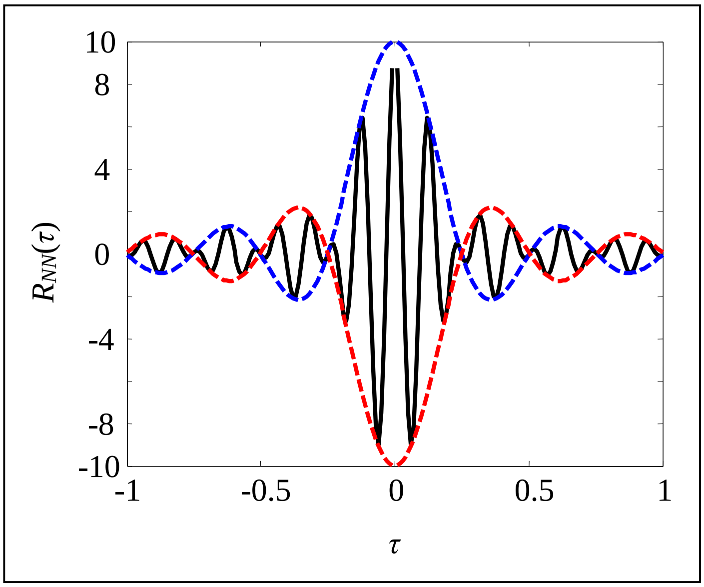
dan

$$R_{NN}(\tau) = P\frac{\sin(W\tau/2)}{(W\tau/2)}\cos(\omega_0\tau)$$

dengan ω_0 dan W adalah konstan dan P merupakan daya dalam noise.

Gambar berikut merupakan fungsi kepadatan spektral daya dan autokorelasi dari bandpass band-limited white noise.





COLORED NOISE

Analogi dengan cahaya berwarna, yang hanya memiliki frekuensi cahaya tampak (visible) dalam spektrum-nya, maka colored noise adalah noise yang bukan white. Fungsi autokorelasi dari colored noise adalah

$$R_{NN}(\tau) = Pe^{-\alpha|\tau|}$$

dengan α merupakan komponen decay (pengurang) semakin besar mendekati tak hingga maka colored noise mendekati prilaku white noise. Fungsi kepadatan spektral daya dari colored noise adalah

$$S_{NN}(\omega) = \frac{2P\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}$$

CONTOH

Colored noise $N(t)$ memiliki fungsi autokorelasi

$$R_{NN}(\tau) = 2e^{-2|\tau|}$$

Dapatkan fungsi kepadatan spektral daya (PSD) dari noise tersebut.

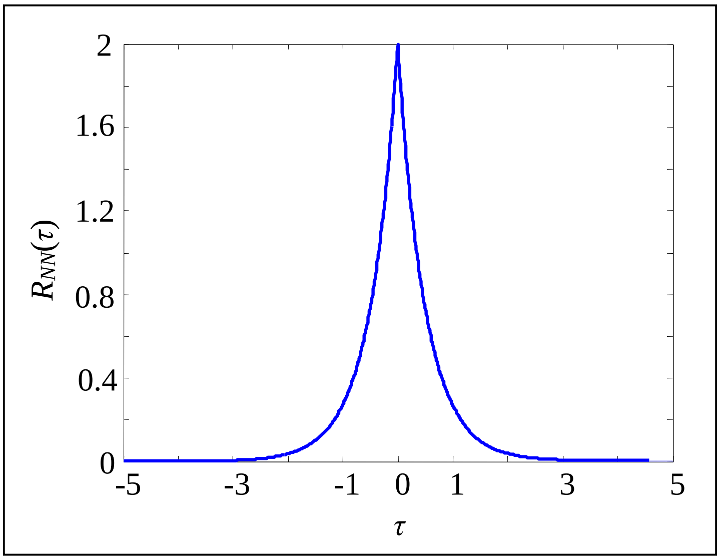
Fungsi kepadatan spektral daya (PSD) dari noise $N(t)$ adalah

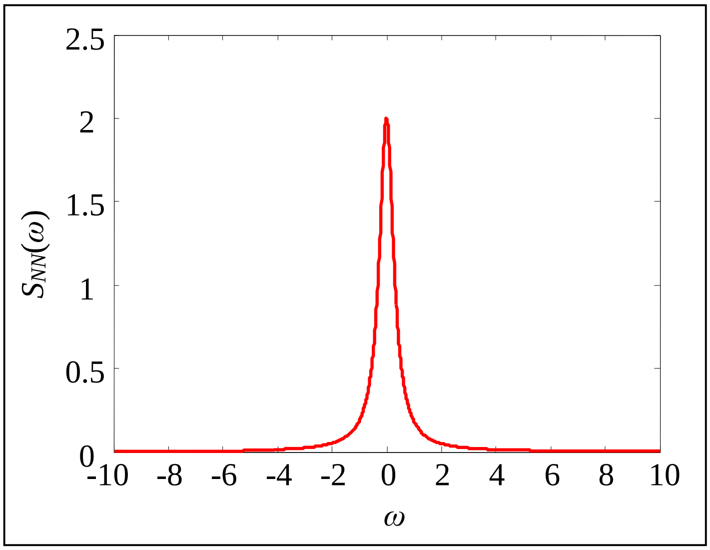
$$S_{NN}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-2|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} e^{-(2+j\omega)\tau} d\tau + 2\int_{-\infty}^{0} e^{(2-j\omega)\tau} d\tau$$

$$S_{NN}(\omega) = \frac{2}{2+j\omega} + \frac{2}{2-j\omega} = \frac{8}{2^2 + \omega^2}$$

Gambar berikut merupakan fungsi autokorelasi dan PSD dari colored noise untuk contoh ini.


2
1.6
1.2
0.8
0.4
0
-5
-3
-1
0
1
3
5
$R_{NN}(\tau)$
τ


2.5
2
1.5
1
0.5
0
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
$S_{NN}(\omega)$
ω

RINGKASAN

White noise merupakan noise dengan kepadatan spektral daya konstan pada semua frekuensi

Band-limited white noise adalah white noise pada pita (band) frekuensi tertentu

Colored noise merupakan noise yang bukan white.

LATIHAN

PSD dari white noise Gauss dengan mean nol adalah

$$S_{NN}(f) = \begin{cases} 1 & |f| < 500\ \text{Hz} \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases}$$

Dapatkan $R_{NN}(\tau)$ dan tunjukkan bahwa $N(t)$ dan $N(t+1\text{ms})$ adalah tidak berkorelasi.

6 Respon Sistem

6.1 Respon Sistem Linear Kontinu dengan Input Stokastik

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menganalisis respons sistem LTI kontinu bila diberi input stokastik.

PENGANTAR

Dalam bahasan tentang respon sistem linear kontinu dengan input stokastik ini akan dikembangkan suatu metode untuk mendeskripsikan respon dari sistem linear bila input sinyal yang diberikan adalah acak (stokastik). Respon impulse sistem dalam bahasan ini diasumsikan merupakan fungsi real dan karakteristik respon dari sistem dibatasi pada nilai mean, fungsi autokorelasi dan fungsi kepadatan spektral daya.

RESPON SISTEM LINIER KONTINYU DENGAN INPUT STOKASTIK

Bila *x*(*t*) adalah sinyal stokastik, respon sistem linear *y*(*t*) diberikan oleh integral konvolusi

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\, h(t-u)\, du$$

atau

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\, x(t-u)\, du$$

dengan *h*(*t*) adalah respon impulse dari sistem.

Operasi pada persamaan di atas dapat dipandang sebagai proses stokastik *X*(*t*) menghasilkan proses stokastik baru *Y*(*t*). Jadi, proses stokastik *Y*(*t*)

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) X(t-u)\, du$$

Bila *X*(*t*) adalah wide-sense stasioner,

$$E[Y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u) X(t-u)\, du\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(u) E[X(t-u)]\, du$$

$$= \overline{X} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\, du = \overline{Y}$$

Ekspresi ini menunjukkan bahwa nilai mean dari *Y*(*t*) sama dengan nilai mean dari *X*(*t*) dikalikan dengan luas dibawah respon impuls jika *X*(*t*) adalah wide-sense stasioner (WSS).

Jika *X*(*t*) merupakan WSS, fungsi autokorelasi dari respon *Y*(*t*) adalah

$$R_{YY}(t, t+\tau) = E[Y(t)Y(t+\tau)]$$

$$= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u) X(t-u)\, du \int_{-\infty}^{\infty} h(v) X(t+\tau-v)\, dv \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[X(t-u)X(t+\tau-v)]\, h(u)h(v)\, du\, dv$$

yang direduksi menjadi

$$R_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau + u - v)\, h(u)h(v)\, du\, dv$$

$$R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-\tau) * h(\tau)$$

Fungsi korelasi silang dari input-output *X*(*t*) dan *Y*(*t*) adalah

$$R_{XY}(t, t+\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)] = E\left[X(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(u) X(t+\tau-u)\, du \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E[X(t)Y(t+\tau-u)]\, h(u)\, du$$

Bila *X*(*t*) adalah WSS, maka korelasi silang dari *X*(*t*) dan *Y*(*t*)

$$R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau-u)\, h(u)\, du$$

yang merupakan konvolusi $R_{XX}(\tau)$ dengan *h*(τ)

$$R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(\tau)$$

Fungsi kepadatan spektral daya $S_{YY}(\omega)$ dari respon sistem linear time-invariant (LTI) dengan fungsi transfer *H*(*ω*) diberikan oleh

$$S_{YY}(\omega) = S_{XX}(\omega)|H(\omega)|^2$$

dengan $S_{XX}(\omega)$ merupakan spektral daya dari proses $X(t)$ dan $|H(\omega)|^2$ merupakan fungsi transfer daya dari sistem.

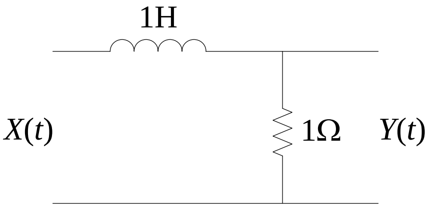
Daya rata-rata P_{YY} dari respon

$$P_{YY} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)|H(\omega)|^2\, d\omega$$

CONTOH

Untuk rangkaian RL seri seperti pada gambar, diketahui bahwa input $X(t)$ adalah proses stokastik wide sense stationer dengan fungsi autokorelasi:

$$R_{XX}(\tau) = 10e^{-2|\tau|}$$



Karena fungsi autokorelasi input tidak memiliki komponen periodik, maka nilai mean dari input $X(t)$ adalah

$$\lim_{\tau\to\infty} R_{XX}(\tau) = \overline{X}^2$$

$$\lim_{\tau\to\infty} 10e^{-2|\tau|} = 0$$

Jadi, mean dari input $\overline{X} = 0$.

Nilai daya rata-rata dan varians dari input

$$P_{XX} = R_{XX}(0) = 10e^0 = 10$$

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - \overline{X}^2 = 10 - 0 = 10$$

Fungsi kepadatan spektral daya input adalah

$$S_{XX}(\omega) = \Im[R_{XX}(\tau)]$$

$$= \frac{10(2)(2)}{\omega^2 + 2^2} = \frac{40}{\omega^2 + 4}$$

Fungsi transfer dari sistem

$$H(\omega) = \frac{R}{R + j\omega L}$$

$$= \frac{1}{1 + j\omega} = \frac{1}{1 + j\omega}\frac{1 - j\omega}{1 - j\omega} = \frac{1 - j\omega}{1 + \omega^2}$$

$$= \frac{1}{1 + \omega^2} - \frac{j\omega}{1 + \omega^2}$$

Konjugasi dari fungsi transfer adalah

$$H^*(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2} + \frac{j\omega}{1 + \omega^2}$$

Magnitud dari fungsi transfer (fungsi transfer daya) diperoleh

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega) \cdot H^*(\omega) = \left[\frac{1}{1+\omega^2}\right]^2 + \left[\frac{\omega}{1+\omega^2}\right]^2$$

$$= \frac{1+\omega^2}{\left[1+\omega^2\right]^2} = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

Mean dari sinyal output *Y*(*t*)

$$\overline{Y} = H(0)\overline{X} = 1(0) = 0$$

Kepadatan spektral daya output

$$S_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega)$$

$$= \frac{1}{1 + \omega^2}\frac{40}{\omega^2 + 4} = \frac{40}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 4)}$$

Daya rata-rata output

$$P_{YY} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{YY}(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{40}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 4)}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{40/3}{\omega^2 + 1} + \frac{-40/3}{\omega^2 + 4} \right) d\omega$$

$$= \frac{20}{3\pi} \left[\tan^{-1}\omega - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(\omega/2)}{(\omega/2)^2 + 1} \right]$$

$$= \frac{20}{3\pi} \left[\tan^{-1}\omega - \frac{1}{2}\tan^{-1}(\omega/2) \Big|_{-\infty}^{\infty} \right]$$

$$= \frac{20}{3\pi} \left[(\pi/2) - \frac{1}{2}(\pi/2) - (-\pi/2) + \frac{1}{2}(-\pi/2) \right]$$

$$= \frac{20}{3\pi} \left[\pi - (\pi/2) \right] = \frac{10}{3}$$

Varians dari sinyal output

$$\sigma_{Y(t)}{}^2 = E[Y^2(t)] - \bar{Y}^2 = P_{YY} - \bar{Y}^2$$

$$= \frac{10}{3} - 0 = \frac{10}{3}$$

Fungsi autokorelasi sinyal output

$$R_{YY}(\tau) = \Im^{-1}[S_{YY}(\omega)] = \Im^{-1}\left[\frac{40}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 4)} \right]$$

$$= \Im^{-1}\left[\frac{40/3}{\omega^2 + 1} + \frac{-40/3}{\omega^2 + 4} = \Im^{-1}\left[\frac{40/3}{\omega^2 + 1} \right] - \Im^{-1}\left[\frac{40/3}{\omega^2 + 4} \right] \right]$$

$$= \frac{20}{3} e^{-|\tau|} - \frac{10}{3} e^{-2|\tau|}$$

RINGKASAN

Respon sistem linear diberikan oleh integral konvolusi dari input stokastik dan respon impulse dari sistem.

Bila input $X(t)$ pada sistem linear adalah wide-sense stasioner, maka nilai mean dari output $Y(t)$ sama dengan nilai mean dari $X(t)$ dikalikan dengan luas dibawah respon impulse $h(t)$.

Jika input $X(t)$ merupakan WSS, fungsi autokorelasi dari respon $Y(t)$ adalah konvolusi dari fungsi autokorelasi input dengan $h(\tau)$ dan $h(-\tau)$.

Fungsi kepadatan spektral daya $S_{YY}(\omega)$ dari respon sistem linear time-invariant dengan fungsi transfer $H(\omega)$ sama dengan perkalian dari spektral daya dari proses $X(t)$, $S_{XX}(\omega)$, dengan fungsi transfer daya dari sistem.

LATIHAN

Proses stokastik $X(t)$ wide-sense stasioner dengan fungsi autokorelasi

$$R_{XX}(\tau) = e^{-b|\tau|}$$

merupakan input pada filter RC dengan respon impulse

$$h(t) = \begin{cases} (1/RC)e^{-t/RC} & t \geq 0 \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases}$$

Asumsikan $b>0$ dan $b \neq 1/RC$.

Dapatkan:

a) Fungsi kepadatan spektral daya (PSD) output.

b) Daya rata-rata output.

6.2 Respon Sistem Linear Diskrit dengan Input Stokastik

CAPAIAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa mampu menganalisis respons sistem LTI diskrit bila diberi input stokastik.

PENGANTAR

Adanya tren yang kuat dalam elektronika praktis, khususnya dalam penggunaan mikrokomputer seperti digital signal processor (DSP) untuk melakukan operasi pemrosesan sinyal menyebabkan permasahan konversi sinyal informasi analog ke dalam bentuk digital dapat dilakukan secara mudah. DSP mengubah sinyal input $x(t)$ ke dalam sekuen sampel $x(nT)$ dengan $n = \cdots,-1, 0, 1, \cdots$ dan $1/T$ Hz adalah frekuensi sampling. Bila sinyal waktu-kontinu merupakan fungsi sampel dari proses stokastik, $X(t)$, maka input sekuen sampel pada DSP adalah fungsi sampel dari sekuen acak $X_n=X(nT)$.

RESPON SISTEM LINIER DISKRIT DENGAN INPUT STOKASTIK

Sekuen acak X_n diperoleh dari *sampling* proses waktu-kontinu pada frekuensi $1/T_s$ Hz. Bila $X(t)$ adalah wide-sense stasioner dengan nilai ekspektasi (mean) $E[X(t)]=\mu_X$ dan fungsi autokorelasi $R_{XX}(\tau)$, maka X_n adalah sekuen acak wide-sense stasioner dengan mean $E[X_n]=\mu_X$ dan fungsi autokorelasi $R_{XX}[k]=R_{XX}(kTs)$. Hal ini disebabkan karena frekuensi sampling adalah $1/T_s$ sampel per detik, variabel acak dalam X_n adalah variabel acak dalam $X(t)$ yang terjadi pada interval T_s detik. Jadi, $X_n=X(nT_s)$. Oleh karena itu,

$$E[X_n]=E[X(nT_s)]=\mu_X=\overline{X}$$

dan

$$R_{XX}[k]=E[X_nX_{n+k}]=E[X(nT_s)X([n+k]T_s)]=R_{XX}(kT_s)$$

Bila input pada sistem LTI waktu diskrit dengan respon impuls h_n adalah sekuen acak wide-sense stasioner X_n, maka output Y_n memiliki beberapa sifat berikut:

a) Y_n adalah sekuen acak wide-sense stasioner dengan nilai ekspektasi (mean)

$$\overline{Y}=E[Y_n]=\overline{X}\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_n$$

Fungsi autokorelasi output

$$R_{YY}[n]=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}h_ih_jR_{XX}[n+i-j]$$

b) Y_n dan X_n adalah wide-sense stasioner secara joint dengan korelasi silang input-output

$$R_{XY}[n]=\sum_{i=-\infty}^{\infty}h_iR_{XX}[n-i]$$

Autokorelasi output

$$R_{YY}[n]=\sum_{i=-\infty}^{\infty}h_{-i}R_{XY}[n-i]$$

CONTOH 1.

Sekuen acak wide-sense stasioner X_n dengan $\overline{X} = 1$ dan fungsi autokorelasi $R_{XX}[n]$ adalah input pada filter moving-average waktu diskrit h_n dengan

$$h_n = \begin{cases} 1/2 & n = 0,1 \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases}$$

dan

$$R_{XX}[n] = \begin{cases} 4 & n = 0 \\ 2 & n = \pm 1 \\ 0 & |n| \geq 2 \end{cases}$$

Mean dari output

$$\overline{Y} = \overline{X}(h_0 + h_1) = \overline{X} = 1$$

Fungsi autokorelasi output

$$R_{YY}[n] = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} (0.25) R_{XX}[n + i - j]$$

$$= (0.5) R_{XX}[n] + (0.25) R_{XX}[n-1] + (0.25) R_{XX}[n+1]$$

$$R_{YY}[n] = \begin{cases} 3 & n = 0 \\ 2 & |n| = 1 \\ 0.5 & |n| = 2 \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases}$$

Daya rata-rata output

$$E[Y_n{}^2] = R_{YY}[0] = 3$$

dan varians output

$$\text{var}[Y_n] = E[Y_n{}^2] - \overline{Y}^2 = 2$$

CONTOH 2.

Sekuen acak X_n memunyai kepadatan spektral daya

$$S_{XX}(\phi) = 2 + 2\cos(2\pi\phi)$$

Sekuen tersebut sebagai input pada filter dengan respon impuls

$$h_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -1 & n = -1, 1 \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases}$$

Transformasi Fourier diskrit dari h_n

$$H(\phi) = 1 - e^{j2\pi\phi} - e^{-j2\pi\phi} = 1 - 2\cos(2\pi\phi)$$

Fungsi kepadatan spektral daya

$$S_{YY}(\phi) = |H(\phi)|^2 S_{XX}(\phi) = [1 - 2\cos(2\pi\phi)]^2 [2 + 2\cos(2\pi\phi)]$$

$$= 2 - 6\cos(2\pi\phi) + 8\cos^3(2\pi\phi)$$

Dengan menggunakan identitas $\cos^3(x) = 0.75\cos(x) + 0.25\cos(3x)$ diperoleh

$$S_{YY}(\phi) = 2 + 2\cos(6\pi\phi)$$

RINGKASAN

Untuk proses stokastik $X(t)$ adalah wide-sense stasioner dengan nilai ekspektasi (mean) $E[X(t)]=\mu_X$ dan fungsi autokorelasi $R_{XX}(\tau)$, maka X_n adalah sekuen acak wide-sense stasioner dengan mean $E[X_n]=\mu_X$ dan fungsi autokorelasi $R_{XX}[k]=R_{XX}(kTs)$.

Bila input pada sistem LTI waktu diskrit dengan respon impuls h_n adalah sekuen acak wide-sense stasioner X_n, maka output Y_n memiliki dengan nilai ekspektasi (mean)

$$\overline{Y} = E[Y_n] = \overline{X} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n$$

dan fungsi autokorelasi

$$R_{YY}[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_i h_j R_{XX}[n + i - j].$$

LATIHAN

Integrator diskrit orde satu dengan sekuen input wide-sense stasioner X_n memiliki output

$$Y_n = X_n + 0.8Y_{n-1}$$

Sekuen input X_n memiliki nilai mean μ_X=0 dan

$$R_{XX}[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0.5 & |n| = 1 \\ 0 & |n| \geq 2 \end{cases}$$

Dapatkan

Respon impulse filter h_n.

Moment kedua dari output Y_n.