



MATEMATIKA DASAR

Pertidaksamaan

Mifta Nur Farid

27 Juli 2023

Pertidaksamaan

- ▶ Salah satu bentuk pertidaksamaan:

$$2x + 3 \leq 9$$

- ▶ Beberapa nilai x yang memenuhi dan yang tidak memenuhi pertidaksamaan

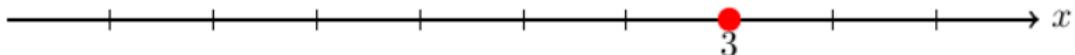
x	$2x + 3 \leq 9$	
0	$3 \leq 9$	Benar
1	$5 \leq 9$	Benar
2	$7 \leq 9$	Benar
3	$9 \leq 9$	Benar
4	$11 \leq 9$	Salah
5	$13 \leq 9$	Salah

Pertidaksamaan

- Dalam persamaan

$$2x + 3 = 9$$

memiliki solusi $x = 3$. Dalam garis bilangan:



- Dalam pertidaksamaan

$$2x + 3 \leq 9$$

memiliki solusi $x \leq 3$. Dalam garis bilangan:



- Dalam menyelesaikan pertidaksamaan dapat digunakan sifat-sifat berikut:

SIFAT PERTIDAKSAMAAN

Sifat

1. $A \leq B \iff A \pm C \leq B \pm C$
2. Jika $C > 0$ maka $A \leq B \iff CA \leq CB$
3. Jika $C < 0$ maka $A \leq B \iff CA \geq CB$
4. Jika $A, B > 0$ maka $A \leq B \iff \frac{1}{A} \geq \frac{1}{B}$
5. Jika $A \leq B$ dan $C \leq D$, maka
 $A + C \leq B + D$

Deskripsi

- Menambahkan atau mengurangi bilangan kedua ruas akan diperoleh pertidaksamaan yang ekivalen
- Mengalikan bilangan positif kedua buah ruas diperoleh pertidaksamaan yang ekivalen
- Mengalikan bilangan negatif kedua buah ruas diperoleh pertidaksamaan yang ekivalen ketika tanda dirubah
- Mengambil invers bilangan akan merubah tanda pertidaksamaan
- Pertidaksamaan dapat dijumlahkan.

Solusi Pertidaksamaan Linear

Contoh 1. Tentukan solusi dari pertidaksamaan $3x \leq 9x + 12$.

Solusi.

$$\begin{array}{rcl} 3x & \leq & 9x + 12 & \text{Pertidaksamaan awal} \\ 3x - 9x & \leq & (9x + 12) - 9x & \text{Kurangkan } 9x \\ -6x & \leq & 12 & \text{Sederhanakan} \\ -\frac{1}{6} \cdot -6x & \geq & -\frac{1}{6} \cdot 12 & \text{Kalikan dengan } -\frac{1}{6} \\ x & \geq & -2 & \text{Sederhanakan} \end{array}$$

Solusi dari pertidaksamaan diatas, adalah seluruh bilangan yang lebih dari sama dengan negatif dua atau dapat ditulis sebagai $x \geq -2$ atau himpunan solusinya dapat ditulis sebagai $[-2, \infty)$.



Solusi Pertidaksamaan Linear

Contoh 2. Tentukan solusi dari pertidaksamaan $4 \leq 3x - 2 < 13$.

Solusi. Himpunan solusi permasalahan di atas harus memenuhi kedua pertidaksamaan yaitu $4 \leq 3x - 2$ dan $3x - 2 < 13$, namun dapat dilakukan sekaligus

$$\begin{aligned}
 4 &\leq 3x - 2 &< 13 && \text{Pertidaksamaan awal} \\
 4 + 2 &\leq (3x - 2) + 2 &< 13 + 2 && \text{Tambahkan 2} \\
 6 &\leq 3x &< 15 && \text{Sederhanakan} \\
 \frac{1}{3} \cdot 6 &\leq \frac{1}{3} \cdot 3x &< \frac{1}{3} \cdot 15 && \text{Kalikan } \frac{1}{3} \\
 2 &\leq x &< 5 && \text{Sederhanakan}
 \end{aligned}$$

Sehingga solusinya adalah $2 \leq x < 5$ atau dapat ditulis sebagai $[2, 5)$



Solusi Pertidaksamaan Tak Linear

Contoh 3. Tentukan solusi dari pertidaksamaan $x^2 \leq 5x - 6$.

Solusi. Mengikuti langkah-langkah yang diberikan.

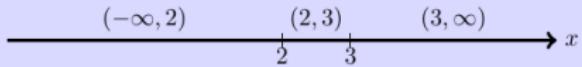
1. Pindahkan semua suku ke dalam ruas yang sama.

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0$$

2. Faktorkan.

$$(x - 2)(x - 3) \leq 0$$

3. Tentukan Interval. Faktor dari ruas kiri adalah $(x - 2)$ dan $(x - 3)$, yang bernilai nol masing-masing di $x = 2$ dan $x = 3$. Sehingga akan menjadi tiga daerah interval



Solusi Pertidaksamaan Tak Linear

4. **Buat tabel atau diagram.** Karena dari langkah sebelumnya terdapat tiga buah daerah, masing-masing dipilih titik uji. Untuk $(-\infty, 2)$ pilih titik uji $x = 0$, untuk $(2, 3)$ pilih titik uji $x = 2.5$, dan untuk $(3, \infty)$ pilih titik uji $x = 5$. Sehingga dapat dibuat tabel sebagai berikut

Selang	Titik Uji	Tanda $(x - 3)$	Tanda $(x - 2)$	Tanda $(x - 3)(x - 2)$
$(-\infty, 2)$	0	-	-	+
$(2, 3)$	2.5	-	+	-
$(3, \infty)$	5	+	+	+

Jika digambar, akan sebagai berikut



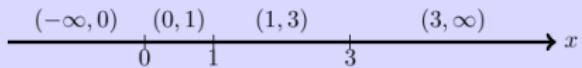
5. **Selesaikan.** Karena yang diinginkan adalah pertidaksamaan yang menghasilkan nilai 0 atau negatif, maka dari langkah sebelumnya dapat diperiksa bahwa solusinya adalah $2 \leq x \leq 3$ atau dapat ditulis sebagai $[2, 3]$.

Solusi Pertidaksamaan Tak Linear

Contoh 4. Tentukan solusi dari pertidaksamaan, $x(x - 1)^2(x - 3) < 0$

Solusi. Karena salah satu ruas sudah bernilai 0 dan ruas tak nol sudah difaktorkan, maka dapat langsung ke langkah ke-3.

3. **Tentukan Interval.** Ruas kiri bernilai 0 ketika nilai x bernilai $x = 0, 1, 3$. Sehingga akan membagi daerah-daerah sebagai berikut



Solusi Pertidaksamaan Tak Linear

4. **Buat tabel atau diagram.** Karena dari langkah sebelumnya terdapat empat buah daerah, masing-masing dipilih titik uji. Untuk $(-\infty, 0)$ pilih titik uji $x = -1$, untuk $(0, 1)$ pilih titik uji $x = 0.5$, untuk $(1, 3)$ pilih titik uji $x = 2$, dan untuk $(3, \infty)$ pilih titik uji $x = 5$. Sehingga dapat dibuat tabel sebagai berikut

Selang	Titik Uji	Tanda x	Tanda $(x - 1)^2$	Tanda $(x - 3)$	Tanda $x(x - 1)^2(x - 3)$
$(-\infty, 0)$	-1	-	+	-	+
$(0, 1)$	0.5	+	+	-	-
$(1, 3)$	2	+	+	-	-
$(3, \infty)$	5	+	+	+	+

Jika digambar, akan sebagai berikut



5. **Selesaikan.** Karena yang diinginkan adalah pertidaksamaan yang menghasilkan nilai negatif, maka dari langkah sebelumnya dapat diperiksa bahwa solusinya adalah $0 < x < 1$ dan $1 < x < 3$ atau dapat ditulis sebagai $(0, 1) \cup (1, 3)$

Solusi Pertidaksamaan Tak Linear

Contoh 5. Tentukan solusi dari pertidaksamaan $\frac{1+x}{1-x} \geq 1$.

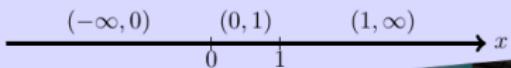
Solusi. Mengikuti langkah-langkah yang diberikan

1. Pindahkan semua suku ke dalam ruas yang sama.

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{1-x} &\geq 1 && \text{Pertidaksamaan yang diberikan} \\ \frac{1+x}{1-x} - 1 &\geq 0 && \text{Kurangkan 1} \\ \frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1-x} &\geq 0 && \text{Samakan Penyebut} \\ \frac{(1+x) - (1-x)}{1-x} &\geq 0 && \text{Operasikan Pecahan} \\ \frac{2x}{1-x} &\geq 0 && \text{Sederhanakan}\end{aligned}$$

2. **Faktorkan.** Bentuk sudah tidak dapat lagi difaktorkan.

3. **Tentukan Interval.** Faktor dari ruas kiri adalah $2x$ dan $(1-x)$. Pembuat nilai 0 nya adalah $x = 0$ dan $x = 1$. Sehingga akan membagi daerah-daerah sebagai berikut



Solusi Pertidaksamaan Tak Linear

4. **Buat tabel atau diagram.** Karena dari langkah sebelumnya terdapat tiga buah daerah, masing-masing dipilih titik uji. Untuk $(-\infty, 0)$ pilih titik uji $x = -1$, untuk $(0, 1)$ pilih titik uji $x = 0.5$, dan untuk $(1, \infty)$ pilih titik uji $x = 2$. Sehingga dapat dibuat tabel sebagai berikut

Selang	Titik Uji	Tanda $2x$	Tanda $1 - x$	Tanda $\frac{2x}{1-x}$
$(-\infty, 0)$	-1	-	+	-
$(0, 1)$	0.5	+	+	+
$(1, \infty)$	2	+	-	-

Jika digambar, akan sebagai berikut



5. **Selesaikan.** Karena yang diinginkan adalah pertidaksamaan yang menghasilkan nilai positif atau nol, maka dari langkah sebelumnya dapat diperiksa bahwa solusinya $0 \leq x < 1$ atau dapat ditulis sebagai $[0, 1)$

Solusi Pertidaksamaan Tak Linear

Contoh 6. Putra ingin menyewa sepeda motor ketika berada di Kota Yogyakarta. Setelah melakukan pencarian, Putra tertarik dengan dua buah penyewaan motor dengan harga sebagai berikut:

- Sewa A: Harga Sewa 30000 rupiah ditambah sewa per jam 5000 rupiah.
Sewa B: Harga Sewa 24000 rupiah ditambah sewa per jam 7500 rupiah.

Tentukan berapa jam Putra harus menyewa motor agar Sewa A lebih murah dari B.

Solusi Pertidaksamaan Tak Linear

Solusi.

- Identifikasi Variabel.** Diinginkan adalah banyak jam agar Sewa A lebih murah daripada Sewa B.
Sehingga dapat dimisalkan

$$x = \text{banyak jam sewa motor}$$

- Terjemahkan kata menjadi aljabar.** Ubah permasalahan dengan menggunakan variabel yang ada,
perhatikan tabel berikut

Kata	Dalam Variabel
Banyak jam sewa motor	x
Harga Sewa A	$30000 + 5000x$
Harga Sewa B	$24000 + 7000x$

Solusi Pertidaksamaan Tak Linear

3. **Bentuk Modelnya.** Karena yang diinginkan harga Sewa *A* lebih murah daripada Sewa *B*, maka dapat dibentuk pertidaksamaan

$$\begin{aligned}\text{Harga Sewa } A &< \text{ Harga Sewa } B \\ 30000 + 5000x &< 24000 + 7000x\end{aligned}$$

4. **Selesaikan Pertidaksamaan**

$$\begin{aligned}30000 + 5000x &< 24000 + 7000x \\ 6000 &< 2000x \\ 3 &< x\end{aligned}$$

Dengan demikian, jika ingin mendapatkan sewa *A* lebih murah maka Putra harus menyewa lebih dari 3 jam.

Solusi Pertidaksamaan Tak Linear

Contoh 7. Instruksi dalam botol obat, dianjurkan untuk menyimpan obat pada suhu diantara $5^{\circ}C$ dan $30^{\circ}C$. Jika galih hanya mempunyai termometer dalam Fahrenheit, tentukan suhu ruangan dalam skala fahrenheit untuk menyimpan obat tersebut.

(Petunjuk: $C = \frac{5}{9}(F - 32)$)

Solusi Pertidaksamaan Tak Linear

Solusi. Dengan menggunakan persamaan $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, serta pernyataan suhu berada diantara $5^\circ C$ dan $30^\circ C$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$5 < C < 30$$

Dengan demikian akan diperoleh

$5 < C < 30$	Pertidaksamaan Awal
$5 < \frac{5}{9}(F - 32) < 30$	Substitusi $C = \frac{5}{9}(F - 32)$
$\frac{9}{5} \cdot 5 < F - 32 < \frac{9}{5} \cdot 30$	Kalikan dengan $\frac{9}{5}$
$9 < F - 32 < 54$	Sederhanakan
$9 + 32 < F < 54 + 32$	Tambahkan 32
$41 < F < 86$	Sederhanakan

Sehingga obat harus disimpan dalam suhu skala Fahrenheit $41^\circ F < F < 86^\circ F$

Solusi Pertidaksamaan Tak Linear

1. Selesaikan pertidaksamaan linear berikut.

(a) $2x \leq 7$

(j) $6 - x \geq 2x + 9$

(r) $5 \leq 3x - 4 \leq 14$

(b) $-4x \geq 10$

(k) $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} > 2$

(s) $-1 < 2x - 5 < 7$

(c) $2x - 5 > 3$

(l) $\frac{2}{5}x + 1 < \frac{1}{5} - 2x$

(t) $1 < 3x + 4 \leq 16$

(d) $3x + 11 < 5$

(m) $\frac{1}{3}x + 2 < \frac{1}{6}x - 1$

(u) $-2 < 8 - 2x \leq -1$

(e) $7 - x \geq 5$

(n) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{6} + x$

(v) $-3 \leq 3x + 7 \leq \frac{1}{2}$

(f) $5 - 3x \leq -16$

(o) $4 - 3x \leq -1(1 + 8x)$

(w) $\frac{1}{6} \leq \frac{2x - 13}{12} \leq \frac{2}{3}$

(g) $2x + 1 < 0$

(p) $2(7x - 3) \leq 12x + 16$

(x) $-\frac{1}{2} \leq \frac{4 - 3x}{5} \leq \frac{1}{4}$

(h) $0 < 5 - 2x$

(q) $2 \leq x + 5 < 4$

(i) $3x + 11 \leq 6x + 8$

Solusi Pertidaksamaan Tak Linear

2. Tentukan solusi dari pertidaksamaan tak linear berikut.

- | | | |
|-----------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|
| (a) $(x + 2)(x - 3) < 0$ | (i) $3x^2 - 3x < 2x^2 + 4$ | (q) $(x - 4)(x + 2)^2 < 0$ |
| (b) $(x - 5)(x + 4) \geq 0$ | (j) $5x^2 + 3x \geq 3x^2 + 2$ | (r) $(x + 3)^2(x + 1) > 0$ |
| (c) $x(2x + 7) \geq 0$ | (k) $x^2 > 3(x + 6)$ | |
| (d) $x(2 - 3x) \leq 0$ | (l) $x^2 + 2x > 3$ | (s) $(x - 2)^2(x - 3)(x + 1) \leq 0$ |
| (e) $x^2 - 3x - 18 \leq 0$ | (m) $x^2 < 4$ | (t) $x^2(x^2 - 1) \geq 0$ |
| (f) $x^2 + 5x + 6 > 0$ | (n) $x^2 \geq 9$ | (u) $x^3 - 4x > 0$ |
| (g) $2x^2 + x \geq 1$ | (o) $(x + 2)(x - 1)(x - 3) \leq 0$ | |
| (h) $x^2 < x + 2$ | (p) $(x - 5)(x - 2)(x + 1) > 0$ | (v) $16x \leq x^3$ |

Solusi Pertidaksamaan Tak Linear

3. Tentukan solusi pertidaksamaan yang berkaitan dengan pecahan berikut.

(a) $\frac{x-3}{x+1} \geq 0$

(b) $\frac{2x+6}{x-2} < 0$

(c) $\frac{4x}{2x+3} > 2$

(d) $-2 < \frac{x+1}{x-3}$

(e) $\frac{2x+1}{x-5} \leq 3$

(f) $\frac{3+x}{3-x} \geq 1$

(g) $\frac{4}{x} < x$

(h) $\frac{x}{x+1} > 3x$

(i) $1 + \frac{2}{x+1} \leq \frac{2}{x}$

(j) $\frac{3}{x-1} - \frac{4}{x} \geq 1$

(k) $\frac{6}{x-1} - \frac{6}{x} \geq 1$

(l) $\frac{x}{2} \geq \frac{5}{x+1} + 4$

(m) $\frac{x+2}{x+3} < \frac{x-1}{x-2}$

(n) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} \leq 0$

Solusi Pertidaksamaan Tak Linear

4. Dengan menggunakan hubungan derajat Celsius dan Fahrenheit pada Contoh 7. Tentukan pertidaksamaan dalam F , jika $20 \leq C \leq 32$.
5. Dengan menggunakan hubungan derajat Celsius dan Fahrenheit pada Contoh 7. Tentukan pertidaksamaan dalam C , jika $50 \leq F \leq 95$.
6. Suatu perusahaan telepon selular memberikan dua paket *roaming*.

Paket A: 25000 ribu rupiah dan 500 per menit.

Paket B: 5000 ribu rupiah dan 1200 per menit.

Tentukan berapa banyak menit untuk melakukan *roaming* sehingga Paket B lebih murah daripada Paket A.

Solusi Pertidaksamaan Tak Linear

7. Suatu maskapai penerbangan menemukan fakta bahwa penerbangan akhir pekan untuk rute Balikpapan-Jakarta akan terjual 120 kursi dengan harga tiket satu juta rupiah. Namun, untuk setiap kenaikan sepuluh ribu rupiah, banyak kursi yang terjual berkurang 1.
 - (a) Tentukan suatu persamaan banyak kursi yang terjual, jika harga tiketnya adalah P ribu rupiah.
 - (b) Pada suatu waktu, tiket terjual pada pesawat akhir pekan rute Balikpapan-Jakarta diantara 90 dan 115. Tentukan interval harga tiket pesawat tersebut.
8. Gaya gravitasi F yang diberikan oleh bumi pada sebuah benda bermassa 100 kg dapat dinyatakan oleh persamaan

$$F = \frac{4.000.000}{d^2}$$

dengan d jarak dalam kilometer dari pusat inti bumi, dan F diukur dalam Newton (N). Tentukan berapa jarak yang diberikan oleh bumi pada benda sehingga gaya gravitasi bernilai diantara 0,0004 N dan 0,01 N .

Solusi Pertidaksamaan Tak Linear

9. Disekitar api unggun, temperatur T dalam celsius dengan jarak x meter dari pusat api diberikan oleh persamaan

$$T = \frac{600.000}{x^2 + 300}$$

Tentukan suatu interval jarak dari pusat api sehingga temperatur kurang dari $500^\circ C$.

10. Diberikan suatu persamaan gerak benda dari ketinggian h meter di atas permukaan tanah pada waktu t detik sebagai berikut:

$$h = 128 + 6t - 16t^2$$

Tentukan suatu selang dimana benda setidaknya berada 32 meter dari atas permukaan tanah.

Solusi Pertidaksamaan Tak Linear

11. Jika suatu manufaktur menjual x unit barang dari suatu produk, maka pendapatan R dan harga C (dalam dolar) adalah

$$\begin{aligned}R &= 20x \\C &= 2000 + 8x + 0.0025x^2\end{aligned}$$

Gunakan fakta bahwa

$$\text{Keuntungan} = \text{Pendapatan} - \text{Harga}$$

untuk menentukan berapa banyak unit harus terjual agar manufaktur mengalami keuntungan setidaknya 2400 dolar.

Solusi Pertidaksamaan Tak Linear

Disekitar api unggun, temperatur T dalam celsius dengan jarak x meter dari pusat api diberikan oleh persamaan

$$T(x) = \frac{600000}{x^2 + 300}$$

Tentukan suatu interval jarak dari pusat api sehingga temperatur kurang dari 500°C.

- a. $(-\infty, -30) \cup (30, \infty)$
- b. $[-\infty, -30] \cup [30, \infty]$
- c. $\setminus (-\infty, -30)$
- d. $(30, \infty)$

Solusi Pertidaksamaan Tak Linear

Jika suatu manufaktur menjual x unit barang dari suatu produk, maka pendapatan R dan harga C (dalam dolar) adalah

$$R(x) = 20x$$

$$C(x) = 2000 + 8x + 0.0025x^2$$

Gunakan fakta bahwa

$$\text{Keuntungan} = \text{Pendapatan} - \text{Harga}$$

untuk menentukan berapa banyak unit harus terjual agar manufaktur mengalami keuntungan setidaknya 2400 dolar!

- a. $[400, 4400]$
- b. $(400, 4400)$
- c. $[400, \infty)$
- d. $[4400, \infty)$