Daftar Isi

Bab 1

Operasi Bilangan Real

1.1 Bilangan Real

Akan dikonstruksi terlebih dahulu himpunan dari seluruh bilangan real. Ingat kembali bahwa himpunan bilangan asli terdiri dari

$$1, 2, 3, \ldots$$

Setelah itu, himpunan yang lebih besar yaitu himpunan bilangan bulat yang terdiri dari bilangan asli, negatif bilangan asli, dan bilangan 0 atau terdiri dari

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

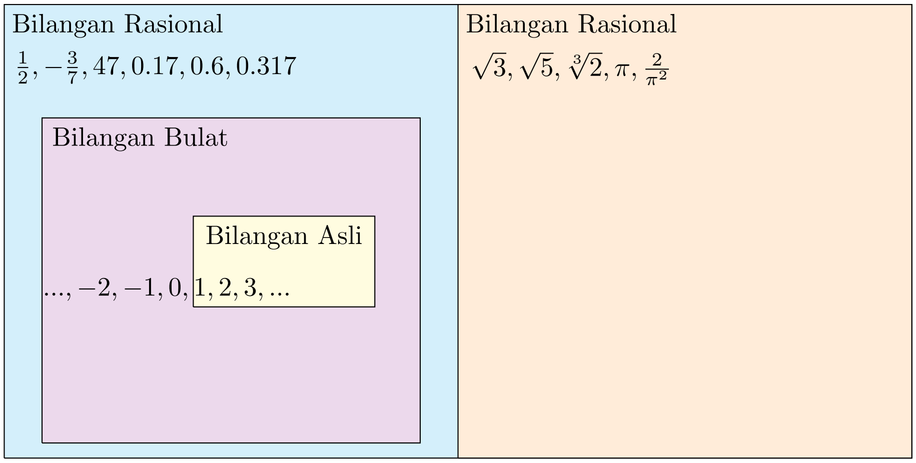
Selanjutnya, terdapat himpunan bilangan rasional yang dapat ditulis sebagai $r = \frac{m}{n}$ dengan m dan n merupakan bilangan bulat dengan $n \neq 0$. Bilangan m disebut pembilang, sedangkan bilangan n disebut penyebut. Contohnya adalah sebagai berikut

$$\frac{1}{2}, -\frac{3}{7}, 47 = \frac{47}{1}, 0.17, 0.6, 0.317$$

(Ingat bahwa dalam bilangan rasional, bagian penyebut tidak boleh bernilai 0) Terdapat juga bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai bentuk $r = \frac{m}{n}$, seperti $\sqrt{2}$. Himpunan bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai bentuk tersebut disebut himpunan bilangan irasional. Beberapa contoh lain dari bilangan irasional adalah sebagai berikut:

$$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{2}, \pi, \frac{2}{\pi^2}$$

Himpunan bilangan real didefinisikan sebagai kumpulan dari himpunan bilangan rasional dan irasional. Notasi dari bilangan real adalah $\mathbb{R}$. Diagram dari himpunan bilangan real dapat dilihat pada gambar berikut:



Setiap bilangan real dapat dinyatakan dalam bentuk desimal. Jika bilangan tersebut merupakan bilangan rasional, maka akan terdapat desimal yang berulang, sebagai contoh berikut

$$\begin{array}{ll} \dfrac{1}{2} = 0.500000\ldots = 0.5\bar{0} & \dfrac{2}{3} = 0.666666\ldots = 0.\bar{6} \\ \dfrac{157}{495} = 0.3171717\ldots = 0.31\overline{17} & \dfrac{9}{7} = 1.285714285714\ldots = 1.\overline{285714} \end{array}$$

(Bagaimana mendapatkan nilai tersebut?)

Sedangkan jika bilangan merupakan bilangan irasional, desimal bilangan tersebut tidak akan berulang, seperti

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots \qquad 3.141592653589793\ldots$$

Jika hanya dipotong sampai beberapa digit desimal, bilangan tersebut dinyatakan sebagai aproksimasi nilai tersebut. Sebagai contoh

$$\pi \approx 3.141592653589793$$

Dengan tanda $\approx$ menyatakan tanda aproksimasi. Semakin banyak digit yang muncul dalam desimal, nilainya akan semakin mendekati nilai sebenarnya.

1.1.1 Sifat Bilangan Real

Dapat diperiksa bahwa $2+3=3+2$, serta $5+7=7+5$, begitu pula $513+87=87+513$ dan lain-lainnya. Dalam aljabar dapat kita sederhanakan persamaan-persamaan sebelumnya menjadi

$$a+b=b+a$$

dengan a dan b dua buah bilangan real. Dengan kata lain pernyataan "$a+b=b+a$" sama dengan mengatakan bahwa "ketika menjumlahkan dua buah bilangan, urutan penjumlahannya tidak masalah". Fakta tersebut disebut sebagai sifat komutatif penjumlahan bilangan real. Sifat-sifat dari bilangan real berbentuk sebagai berikut:

SIFAT-SIFAT BILANGAN REAL

Sifat	**Contoh**	**Deskripsi**
Sifat Komutatif		
$a+b=b+a$	$7+3=3+7$	Urutan tidak mempengaruhi hasil penjumlahan
$a\cdot b=b\cdot a$	$7\cdot 3=3\cdot 7$	Urutan tidak mempengaruhi hasil perkalian
Sifat Asosiatif		
$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(2+4)+7=2+(4+7)$	Ketika menjumlahkan 3 bilangan, tidak masalah dalam pemilihan dua penjumlahan terlebih dahulu
$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$	$(2\cdot 5)\cdot 3=2\cdot(5\cdot 3)$	Ketika mengalikan 3 bilangan, tidak masalah dalam pemilihan dua perkalian terlebih dahulu
Sifat Distributif		
$a\cdot(b+c)+c=a\cdot b+a\cdot c$	$2\cdot(3+5)=2\cdot 3+2\cdot 5$	Ketika mengalikan suatu bilangan dengan jumlah dua bilangan, akan diperoleh hasil yang sama dengan mengalikan bilangannya dengan masing-masing suku kemudian ditambahkan.
$(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$	$(3+5)\cdot 2=3\cdot 2+5\cdot 2$	

Contoh 1. Penggunaan sifat distributif

1. $2(x+3)=2\cdot x+2\cdot 3=2x+6$
2. $(a+b)(x+y)=(a+b)x+(a+b)y=(ax+bx)+(ay+by)=ax+bx+ay+by$

1.1.2 Penjumlahan dan Pengurangan

Perhatikan bahwa, bilangan 0 merupakan bilangan yang spesial terhadap operasi penjumlahan, disebut sebagai **identitas penjumlahan** karena berlaku $a + 0 = a$ untuk setiap a bilangan real. Setiap bilangan real a, selalu mempunyai bilangan negatif $-a$ sehingga $a + (-a) = 0$. Menjumlahkan dengan nilai negatif dapat disebut juga sebagai operasi **pengurangan**. Secara definisi operasi pengurangan b terhadap a dapat ditulis sebagai

$$a - b = a + (-b)$$

Dalam mengkombinasikan tanda negatif dengan bilangan real, dapat menggunakan sifat-sifat berikut

SIFAT TANDA NEGATIF

Sifat	Contoh
1. $(-1)a = -a$	$(-1)5 = -5$
2. $-(-a) = a$	$-(-5) = 5$
3. $(-a)b = a(-b) = -ab$	$(-5)7 = 5(-7) = -(5 \cdot b)$
4. $(-a) \cdot (-b) = ab$	$(-4) \cdot (-3) = 12$
5. $-(a + b) = -a - b$	$-(3 + 5) = -3 - 5$
6. $-(a - b) = -a + b$	$-(5 - 8) = -5 + 8$

Sifat 6 memberikan informasi bahwa secara intuitif $a - b$ dan $b - a$ saling negatif. Untuk sifat ke 5 sering digunakan untuk lebih dari dua suku seperti

$$-(a + b + c) = -a - b - c$$

Contoh 2. Penggunaan sifat tanda negatif, untuk x, y, z bilangan real

1. $-(x + 2) = -x - 2$
2. $-(x + y - z) = -x - y + z$
3. $-5(y - z) = -5y - (-5z) = -5y + 5z$

1.1.3 Perkalian dan Pembagian

Bilangan 1 merupakan bilangan yang spesial untuk operasi perkalian. Disebut sebagai identitas perkalian, karena untuk setiap a bilangan real berlaku $a \cdot 1 = a$. Serta untuk setiap bilangan tak nol mempunyai balikan yaitu $1/a$ yang memenuhi $a \cdot (1/a) = 1$. Mengalikan dengan balikannya dapat disebut juga sebagai operasi **pembagian**. Secara definisi operasi pembagian a oleh b dapat ditulis sebagai perkalian a dengan $(1/b)$ atau

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$$

Operasi $a \cdot 1/b$ dapat disederhanakan menjadi a/b. Penulisan a/b dapat ditulis sebagai pecahan dengan a disebut sebagai pembilang dan b sebagai penyebut. Untuk mengkombinasikan bilangan sebagai pecahan gunakan sifat berikut.

SIFAT-SIFAT BILANGAN REAL

Sifat	**Contoh**	**Deskripsi**
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$	Ketika mengalikan pecahan, kalikan masing-masing pembilang dan penyebut.
$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$	$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$	Ketika membagi pecahan, balik pembaginya lalu kalikan.
$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$	$\frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{9}{5}$	Ketika menjumlahkan pecahan dengan **penyebut yang sama** tambahkan pembilangnya
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{35}$	Ketika menjumlahkan pecahan dengan **penyebut yang berbeda** tentukan penyebut yang sama terlebih dahulu kemudian tambahkan pembilangnya
$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$	$\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$	**Coret** bilangan yang merupakan faktor yang sama dalam pembilang dan penyebut.
Jika $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ maka $ad = bc$	$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, jadi $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$	Kali Silang.

Ketika menjumlahan dua pecahan dengan penyebut tidak sama, bisa juga menggunakan KPK dari penyebut, perhatikan cntoh berikut

Contoh 3. Hitung $\frac{5}{36} + \frac{7}{120}$

Solusi. Faktorkan terlebih dahulu masing-masing penyebut sebagai faktor prima

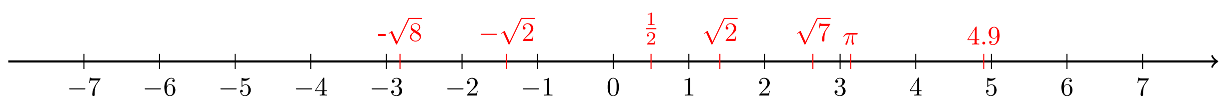
$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \qquad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Dapat diperiksa bahwa KPK dari penyebutnya yaitu $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$. Sehingga dapat diperoleh

$$\frac{5}{36} + \frac{7}{120} = \frac{5 \cdot 10}{36 \cdot 10} + \frac{7 \cdot 3}{120 \cdot 3} = \frac{50}{360} + \frac{21}{360} = \frac{71}{360}$$

1.1.4 Garis Bilangan

Bilangan real dapat dinyatakan sebagai titik dalam garis sebagai berikut



Dalam garis bilangan terdapat **titik asal** yang disini berkorespondensi dengan bilangan 0. Setiap bilangan positif x berada di sebelah kanan titik asal dan dapat diyatakan sebagai jarak titik x ke titik asal, dan untuk setiap bilangan negatif $-x$ berada pada kiri titik asal. Bilangan yang terkait dengan titik P disebut sebagai kordinat titik P, dan garis bilangan ini dapat juga disebut sebagai garis kordinat, garis bilangan real, atau garis real.

Bilangan real merupakan bilangan yang terurut. Jika a **kurang dari** b dapat ditulis sebagai $a < b$ jika $b - a$ merupakan bilangan positif. Secara geometris bilangan b berada lebih kanan daripada bilangan a pada garis bilangan. Pernyataan sebelumnya ekivalen dengan pernyataan b **lebih besar dari** a dan dapat ditulis sebagai $b > a$. Simbol $a \leq b$(atau $b \geq a$) berarti bahwa $a < b$ atau $a = b$ dan dapat dibaca sebagai ”a kurang dari atau sama dengan b” atau dapat disederhanakan menjadi ”a kurang dari sama dengan b”. Sebagai contoh, perhatikan garis bilangan sebelumnya, dapat diperoleh pertaksamaan

$$4.9 < 5 \qquad \sqrt{7} < 3 < \pi \qquad -2 < \sqrt{2} \qquad 2 \leq 2 \qquad -3 \leq -\sqrt{8}$$

1.1.5 Himpunan dan Interval

Suatu himpuan adalah koleksi dari objek, objeknya dari himpunan disebut sebagai anggota. Jika S adalah himpunan, notasi $a \in S$ berarti bahwa a merupakan anggota dari S, dan notsi $b \notin S$ berarti bahwa b bukan anggota dari S. Sebagai contoh himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$, maka $-3 \in \mathbb{Z}$, namun $\pi \notin \mathbb{Z}$.

Beberapa himpunan dapat ditulis dengan menuliskan seluruh anggotanya dalam kurung ””. Sebagai contoh perhatikan himpunan A terdiri dari bilangan bulat positif kurang dari 7, atau dapat ditulis sebagai

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Selain itu himpunan A juga dapat ditulis dalam notasi *builder*

$$A = \{x | x \text{ bilangan bulat dan } 0 < x < 7\}$$

dapat dibaca sebagai ”A merupakan himpunan seluruh x sehingga x berada diantara 0 dan 7”.

Jika S dan T merupakan himpunan, **gabungan** kedua himpunan tersebut $S \cup T$ adalah himpunan yang terdiri dari seluruh anggotanya di S *atau* T (atau keduanya). **Irisan** dari himpunan S dan T adalah himpunan $S \cap T$ yang terdiri dari seluruh anggota yang keduanya berada di S dan T. Dengan kata lain, $S \cap T$ terdiri dari anggota-anngota yang keduanya berada pada himpunan S dan T. **Himpunan kosong** yang dinyatakan sebagai $\emptyset$ merupakan himpunan yang tidak mempunyai anggota.

Contoh 4. Irisan dan Gabungan Himpunan
Jika $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{4, 5, 6, 7\}$, dan $V = \{6, 7, 8\}$. Tentukan himpunan $S \cup T$, $S \cap T$, dan $S \cap V$
Solusi.

- $S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $S \cap T = \{4, 5\}$
- $S \cap V = \emptyset$

Beberapa himpunan dari bilangan real dapat berupa suatu **interval** yang sering digunakan dalam permasalahan kalkulus. Jika $a < b$ maka interval buka terdiri dari bilangan diantara a dan b yang dinotasikan sebagai (a, b). Interval tutup dari a ke b terdiri dari bilangan diantara a dan b serta titik ujung a dan b dinotasikan dengan $[a, b]$. Dalam notasi *builder* dan garis bilangan dapat dilihat sebagai berikut

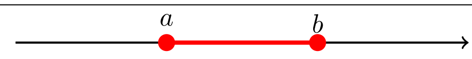
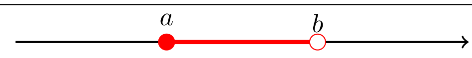
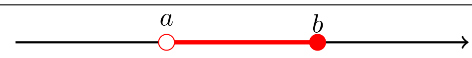
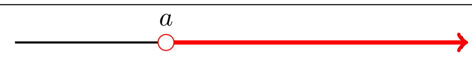
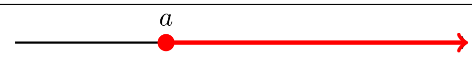
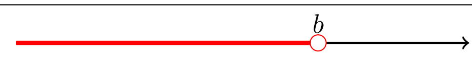
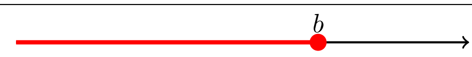
$$(a, b) = \{a < x < b\}$$

Sedangkan untuk interval tutup dalam notasi **builder** dan garis bilangan dapat dilihat sebagai berikut

$$[a, b] = \{a \leq x \leq b\}$$

Perhatikan bahwa tanda kurung () pada notasi interval dan lingkaran terbuka pada garis bilangan menyatakan bahwa titik ujungnya tidak masuk dalam himpunan tersebut. Sedangkan pada interval tutup tanda kurung [ ] pada notasi interval dan lingkaran tutup menyatakan bahwa titik ujungnya masuk pada himpunan tersebut. Pada interval ada kemungkinan bahwa salah satu titik ujung masuk sedangkan yang lain tidak.

Tabel berikut mendaftarkan seluruh kemungkinan bentuk interval

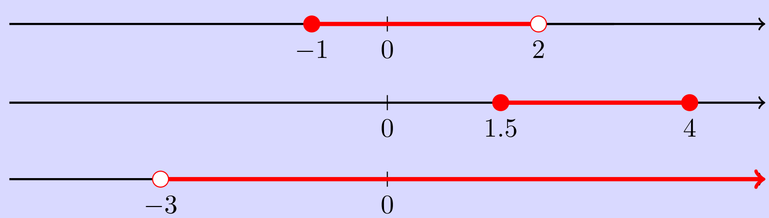
Notasi	Deskripsi Himpunan	Grafik
(a, b)	$\{x \| a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \| a \leq x \leq b\}$	
$[a, b)$	$\{x \| a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \| a < x \leq b\}$	
(a, ∞)	$\{x \| a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \| a \leq x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \| x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \| x \leq b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$	

Contoh 5. Nyatakan setiap interval pertidaksamaan berikut, lalu gambar garis bilangannya

a. $[-1, 2) = \{x \mid -1 \leq x < 2\}$

b. $[1.5, 4] = \{x \mid 1.5 \leq x \leq 4\}$

c. $(-3, \infty) = \{x \mid -3 < x\}$

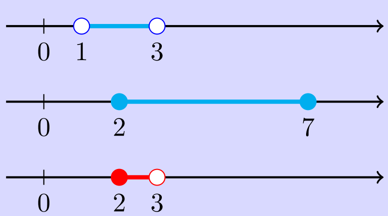


Contoh 6. Hasil dari irisan dan gabungan interval $(1, 3)$ dan $[2, 7]$

1. Irisan dari dua interval terdiri dari bilangan yang berada pada kedua interval tersebut

$$\begin{aligned}(1,3) \cap [2,7] &= \{x \mid 1 < x < 3 \text{ dan } 2 \leq x \leq 7\} \\ &= \{x \mid 2 \leq x < 3\} = [2,3)\end{aligned}$$

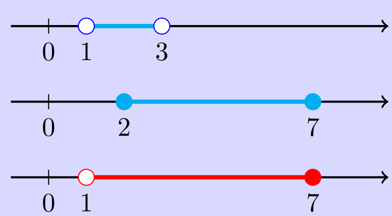
diilustrasikan sebagai garis bilangan berikut



2. Gabungan interval terdiri dari bilangan yang setidaknya berada pada salah satu interval

$$\begin{aligned}(1,3) \cup [2,7] &= \{x \mid 1 < x < 3 \text{ atau } 1 \leq x \leq 7\} \\ &= \{x \mid 1 < x \leq 7\} = (1,7]\end{aligned}$$

diilustrasikan sebagai garis bilangan berikut



1.2 Ekspresi bentuk Aljabar

Suatu variabel merupakan suatu huruf yang dapat direpresentasikan oleh sembarang bilangan pada suatu himpunan bilangan. Misalkan x, y, dan z dan beberapa bilangan real yang lain, dan dikombinasikan dengan penjumlahan, pengurangan, pembagiaan, dan lain sebagainya akan diperoleh seuatu bentuk ekspresi aljabar. Berikut beberapa contohnya

$$2x^2 - 3x + 4 \qquad \frac{y^2}{1+z} \qquad 3x + \sqrt{x} + y^3$$

Suatu **monomial** merupakan ekspresi aljabar dengan bentuk ax^k dengan a bilangan real dan k merupakan bilangan bulat tidak negatif. Secara umum, penjumlahan dari monomial disebut sebagai **polinomial**. Bentuk pertama dari contoh tersebut merupakan suatu polinomial, namun sisa-nya bukan.

POLINOMIAL
Suatu **polinomial** terhadap variabel x mempunyai ekspresi dengan berbentuk

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

dengan $a_0, a_1, \ldots, a_n$ merupakan bilangan real, dan n bilangan bulat tak negatif. Jika $a_n \neq 0$, maka polinomial mempunyai **derajat** n. Monomial berbentuk $a_k x^k$ disebut suku dari polinomial. Lebih jauh untuk suku $a_i x^i$, nilai a_i merupakan koefisien dari x^i dan a_0 merupakan konstanta.

Perhatikan bahwa derajat polinomial adalah pangkat tertinggi yang muncul dalam polinomial.

Berikut beberapa contoh polinomial dengan suku dan derajat tertingginya

Polinomial	Suku	Derajat
$2x^2 - 3x + 4$	$2x^2, -3x, 4$	2
$x^8 + 5x$	$x^8, 5x$	8
$3 - x + x^2 - \frac{1}{2}x^3$	$-\frac{1}{2}x^3, x^2, -x, 3$	3
$5x + 1$	$5x, 1$	1
$9x^5$	$9x^5$	5
6	6	0

1.2.1 Operasi Penjumlahan dan Pengurangan Polinomial

Dalam menjumlahkan dan mengurangi polinomial menggunakan sifat dari penjumlahan dan pengurangan bilangan real. Perbedaannya disini, hanya dijumlahkan dan dikurangi pada suku yang mempunyai derajat yang sama. Seperti contoh berikut

$$5x^7 + 3x^7 = (5 + 3)x^7 = 8x^7$$

Contoh 7. Operasikan kedua polinom berikut

1. Tentukan hasil penjumlahan $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$
2. Tentukan hasil pengurangan $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x)$

Solusi.

1. $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x) = (x^3 + x^3) + (-6x^2 + 5x^2) + (2x - 7x) + 4 = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$
2. $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x) = (x^3 - x^3) + (-6x^2 - 5x^2) + (2x - (-7x)) + 4 = -11x^2 + 9x + 4$

1.2.2 Operasi Perkalian pada Polinomial

Sedangkan untuk mengalikan dua buah polinomial atau ekspresi aljabar, dapat menggunakan sifat distributif dari perkalian bilangan real. Secara umum untuk A, B, C, dan D sebagai suatu ekspresi aljabar dapat diperoleh hasil perkalian

$$(A + B)(C + D) = A(C + D) + B(C + D) = AC + AD + BC + BD$$

Contoh 8.

1. Hasil perkalian dari

   $$(2x + 1)(3x - 5) = 2x(3x - 5) + 1(3x - 5) = 6x^2 - 10x + 3x - 5 = 6x^2 - 10x + 3x - 5 = 6x^2 - 7x - 5$$

2. Hasil perkalian dari

   $$\begin{aligned}(2x + 3)(x^2 - 5x + 4) &= 2x(x^2 - 5x + 4) + 3(x^2 - 5x + 4)\\ &= (2x \cdot x^2 - 2x \cdot -5x + 2x \cdot 4) + (3 \cdot x^2 - 3 \cdot 5x + 3 \cdot 4)\\ &= (2x^3 - 10x^2 + 8x) + (3x^2 - 15x + 12)\\ &= 2x^3 - 7x^2 - 7x + 12\end{aligned}$$

Beberapa bentuk perkalian khusus dari suatu ekspresi aljabar berikut sering muncul, sehingga lebih baik perlu dihafalkan

Jika A dan B merupakan suatu bilangan real atau ekspresi dari suatu aljabar, maka berlaku

1. $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$
2. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
3. $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
4. $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
5. $(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

Ide dari penggunaan persamaan diatas adalah dengan substitusi. Jika ingin diperoleh bentuks ekspansi dari $(x^2+y^3)^2$ dapat dengan memisalkan $A = x^2$ dan $B = y^3$ sehingga dapat diperoleh

$$(x^2+y^3)^2 = (x^2)^2 + 2(x^2)(y^3) + (y^3)^2 = x^4 + 2x^2y^3 + y^6$$

Contoh 9. Tentukan hasil dari

1. $(3x+5)^2$
2. $(x^2-2)^2$
3. $(2x-\sqrt{y})(2x+\sqrt{y})$

Solusi.

1. Dengan menggunakan $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ untuk $A = 3x$ dan $B = 5$ akan diperoleh
$$(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5) + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$$
2. Dengan menggunakan $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ dengan $A = x^2$ dan $B = 2$ akan diperoleh
$$(x^2-2)^2 = (x^2)^2 - 2(x^2)(2) + 2^2 = x^4 - 4x^2 + 4$$
3. Dengan menggunakan $(A-B)(A+B)$ untuk $A = 2x$ dan $B = \sqrt{y}$ akan diperoleh
$$(2x-\sqrt{y})(2x+\sqrt{y}) = (2x)^2 - (\sqrt{y})^2 = 4x^2 - y$$

1.2.3 Pemfaktoran

Dengan menggunakan hukum distributif dapat diperoleh hasil perkalian dua buah polinom. Namun, kadang-kadang perlu dilakukan langkah sebaliknya, langkah tersebut disebut sebagai langkah pemfaktoran. Perhatikan bahwa

$$(x-2)(x+2) = x^2 - 4$$

maka dapat disebut bahwa $(x-2)$ dan $(x+2)$ merupakan faktor dari x^2-4. Dalam pemfaktoran biasanya diperlukan menentukan FPB dari koefisien dan pangkat terendah dari suatu bentuk x^k, atau juga bisa melihat dari faktor yang sama.

Contoh 10. Faktorkan ekspresi aljabar berikut

1. $3x^2 - 6x$
2. $8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4$
3. $(2x+4)(x-3) - 5(x-3)$

Solusi.

1. FPB dari 6 dan 3 adalah 3, setiap suku terdiri dari variabel x dengan pangkat terkecilnya adalah x^1 atau x. Dengan demikian diperoleh
$$3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$
2. - Perhatikan bahwa FPB dari 8, 6, dan 2 adalah 2.
   - Setiap suku terdiri dari x dengan pangkat terkecilnya adalah x^1 atau x
   - Setiap suku terdiri dari y dengan pangkat terkecilnya adalah y^2.

   Dengan demikian, akan diperoleh
$$8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 = 2xy^2(x^3 + 3x^2y - y^2)$$
3. Kedua suku sama-sama mempunyai faktor yang sama yaitu $(x-3)$. Sehingga
$$\begin{aligned}(2x+4)(x-3) - 5(x-3) &= [(2x+4)-5](x-3) \\ &= (2x-1)(x-3)\end{aligned}$$

Dalam memfaktor bentuk ekspresi aljabar x^2+bx+c adalah dengan coba-coba. Misalkan faktor dari x^2+bx+c adalah $(x+r)$ dan $(x+s)$, sehingga

$$x^2 + bx + c = (x+r)(x+s) = x^2 + (r+s)x + rs$$

Atau dalam memfaktorkan x^2+bx+c dapat dicari dua buah bilangan real yang jika dijumlahkan menghasilkan b dan jika dikalikan menghasilkan c.

Contoh 11. Dalam memfaktorkan $x^2 + 7x + 12$ adalah mencari dua buah bilangan yang jika dijumlahkan adalah 7 dan jika dikalikan yaitu 12. Dengan mencoba-coba dapat diperoleh bilangan tersebut adalah 3 dan 4, sehingga dapat difaktorkan menjadi

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

Contoh 12. Dalam memfaktorkan $x^2 - 5x + 6$ adalah mencari dua buah bilangan yang jika dijumlahkan adalah -5 dan jika dikalikan yaitu 6. Dengan mencoba-coba dapat diperoleh bilangan tersebut adalah -2 dan -3, sehingga dapat difaktorkan menjadi

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Contoh 13. Dalam memfaktorkan $x^2 - x + 2$ adalah mencari dua buah bilangan yang jika dijumlahkan adalah 1 dan jika dikalikan yaitu -2. Dengan mencoba-coba dapat diperoleh bilangan tersebut adalah 1 dan -2, sehingga dapat difaktorkan menjadi

$$x^2 - x + 2 = (x + 1)(x - 2)$$

Dari ketiga contoh diatas, dapat dilihat bahwa faktor-faktornya merupakan faktor dari konstanta c. Jika konstanta c bernilai positif, maka bilangan-bilangan yang dicari akan mempunyai tanda yang sama (keduanya positif atau keduanya negatif). Jika konstanta c negatif, maka bilangan-bilangan tersebut akan berbeda tanda, seperti pada Contoh 13.

Sama seperti perkalian, dalam pemfaktoran terdapat ekspresi yang sering muncul. Lebih bagus jika dihafalkan

Jika A dan B merupakan suatu bilangan real atau ekspresi dari suatu aljabar, maka berlaku

1. $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$
2. $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$
3. $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$
4. $A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$
5. $A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3$

Berbeda dengan perkalian, untuk bagian pemfaktoran harus sedikit peka terhadap bentuk yang dapat difaktorkan.

Contoh 14. Pemfaktoran berbentuk $A^2 - B^2$

1. Dalam pemfaktoran $4x^2 - 25$ dapat ditulis menjadi $(2x)^2 - 5^2$, sehingga

$$4x^2 - 25 = (2x - 5)(2x + 5)$$

2. Dalam pemfaktoran $(x + y)^2 - z^2$ cukup jelas menjadi

$$(x + y)^2 - z^2 = (x + y - z)(x + y + z)$$

Contoh 15. Pemfaktoran berbentuk $A^3 - B^3$ atau $A^3 + B^3$

1. Dalam pemfaktoran $27x^3 - 1$ dapat ditulis menjadi $(3x)^3 - 1^3$, sehingga

$$\begin{aligned} 27x^3 - 1 = (3x)^3 - 1^3 &= (3x - 1)[(3x)^2 + (3x)(1) + 1^2] \\ &= (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) \end{aligned}$$

2. Dalam pemfaktoran $x^6 + 8$ dapat ditulis menjadi $(x^2)^3 + 2^3$, sehingga

$$\begin{aligned} x^6 + 8 = (x^2)^3 + 2^3 &= (x^2 + 2)[(x^2)^2 - (x^2)(2) + 2^2] \\ &= (x^2 + 2)(x^4 + 2x^2 + 4) \end{aligned}$$

1.3 Ekspresi Bentuk Rasional

Jika terdapat pecahan dengan bagian pembilang dan penyebut berbentuk polinom disebut sebagai bentuk polinomial. Sebagai contoh, berikut merupakan contoh fungsi rasional

$$\frac{2x}{x - 1} \qquad \frac{x}{x^2 + 1} \qquad \frac{x^3 - x}{x^2 - 5x + 6}$$

Dalam bagian ini akan dipelajari bagaimana melakukan operasi aljabar pada bentuk rasional.

1.3.1 Domain dari Ekspresi Aljabar

Secara umum, ekspresi aljabar mungkin tidak dapat didefinisikan untuk seluruh variabel. Domain atau daerah asal dari suatu ekspresi aljabar merupakan himpunan bilangan real dimana variabel diizinkan mendapat nilai. Tabel berikut memberikan bentuk dasar suatu ekspresi aljabar dan domainnya.

Ekspresi	Domain
$\frac{1}{x}$	$\{x \vert x \geq 0\}$
$\sqrt{x}$	$\{x \vert x \geq 0\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\{x \vert x > 0\}$

Contoh 16. Tentukan domain dari ekspresi aljabar berikut

1. $2x^2 + 3x - 1$
2. $\dfrac{x}{(x-2)(x-3)}$
3. $\dfrac{\sqrt{x}}{x-5}$

Solusi.

1. Polinom $2x^2 + 3x - 1$ terdefinisi untuk setiap x. Sehingga, domainnya adalah seluruh bilangan real.
2. Karena dalam penyebut tidak boleh bernilai 0, haruslah $(x-2)(x-3) \neq 0$ yang artinya $x \neq 2, 3$. Sehingga domainnya adalah $\{x|x \neq 2 \text{ dan } x \neq 3\}$
3. Agar pembilang terdefinisi, haruslah $x \geq 0$, serta agar penyebut terdefinisi haruslah $x - 5 \neq 0$ atau $x \neq 5$. Sehingga, domainnya adalah $\{x|x \geq 0 \text{ dan } x \neq 5\}$

1.3.2 Perkalian dan Pembagian Bentuk Ekspresi Rasional

Pertama-tama akan dipelajari terlebih dahulu dalam menyederhanakan bentuk rasional. Jika pembilang dan penyebut mempunyai faktor yang sama, maka dapat digunakan sifat berikut

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$$

yang berarti kita dapat mencoret faktor yang sama dari suatu bentuk rasional.

Contoh 17. Penyederhanaan bentuk $\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$.

Perhatikan bahwa pembilang dapat difaktorkan menjadi $(x-1)(x+1)$, sedangkan penyebut dapat difaktorkan menjadi $(x-1)(x+2)$. Dengan demikian

$$\frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+1}{x+2}$$

Dalam mengalikan bentuk rasional, pengerjaannya hampir serupa dengan mengalikan bilangan rasional, yaitu

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

Atau dapat dikatakan jika ingin mengalikan dua bentuk rasional kalikan masing-masing penyebut dan pembilang.

Contoh 18. Hasil perkalian dari $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+8x+16} \cdot \dfrac{3x+12}{x-1}$

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+2x-3}{x^2+8x+16} \cdot \frac{3x+12}{x-1} &= \frac{(x-1)(x+3)}{(x+4)^2} \cdot \frac{3(x+4)}{x-1} \\
&= \frac{3(x-1)(x+3)(x+4)}{(x-1)(x+4)^2} \\
&= \frac{3(x+3)}{x+4}
\end{aligned}$$

Untuk membagi bentuk rasional, sama seperti pada pecahan yaitu balik pembaginya lalu kalikan.

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

Contoh 19. Hasil dari $\dfrac{x-4}{x^2-4} \div \dfrac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6}$

$$\begin{aligned}
\frac{x-4}{x^2-4} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6} = \frac{x-4}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2-3x-4} &= \frac{(x-4)(x+2)(x+3)}{(x-2)(x+2)(x-4)(x+1)} \\
&= \frac{x+3}{(x-2)(x+1)}
\end{aligned}$$

1.3.3 Penjumlahan dan Perkalian Bentuk Ekspresi Rasional

Dalam operasi penjumlahan dan pengurangan bentuk rasional, sama seperti dalam bentuk pecahan bilangan. Jika penyebutnya mempunyai bentuk yang sama, dapat digunakan operasi berikut

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}$$

Jika penyebut berbeda, maka dapat digunakan operasi berikut

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+BC}{BD}$$

Secara umum dalam operasi bentuk rasional jika penyebut tidak sama, dapat disamakan terlebih dahulu dengan memfaktorkan penyebut-penyebutnya lalu lihat "KPK" dari keuda penyebutnya.

Contoh 19. Hasil dari $\dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{x}{1+x^2}$.

Karena penyebutnya sudah sama, maka akan diperoleh, $\dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1+x}{x^2+1}$

Contoh 20. Hasil dari $\dfrac{3}{x-2} - \dfrac{2x}{x+3}$.

Karena penyebutnya tidak sama, dengan penyebut hasil operasinya adalah $(x-2)(x+3)$, akan diperoleh

$$\frac{3}{x-2} + \frac{2x}{x+3} = \frac{3(x+3)}{(x-2)(x+3)} - \frac{2x(x-2)}{(x+3)(x-2)} = \frac{(3x+9)-(4x^2-4x)}{x^2-5x+6} = \frac{-4x^2+7x+9}{x^2-5x+6}$$

Contoh 21. Hasil dari $\dfrac{1}{x^2-4} + \dfrac{1}{x^2+5x+6}$

Perhatikan bahwa $x^2-4 = (x-2)(x+2)$, sedangkan $x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$, maka "KPK" untuk dijadikan penyebutnya adalah $(x-2)(x+2)(x+3)$. Akan diperoleh,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} &= \frac{(x+3)}{(x-2)(x+2)(x+3)} + \frac{x-2}{(x+2)(x+3)(x-2)} \\ &= \frac{2x+1}{(x-2)(x+2)(x-3)}\end{aligned}$$

1.3.4 Merasionalkan Bentuk Rasional

Jika dalam bentuk rasional mempunyai bentuk $A + B\sqrt{C}$, dapat dirasionalkan penyebut dalam rasional dengan mengalikan dengan bentuk sekawannya yaitu $A - B\sqrt{C}$ pada pembilang dan penyebut. Kenapa hal tersebut dapat dilakukan? karena

$$(A + B\sqrt{C})(A - B\sqrt{C}) = A^2 + B^2C$$

Contoh 22. Dalam merasionalkan $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$, kalikan dengan sekawannya pada pembilang dan penyebut yaitu $1 + \sqrt{2}$. Sehingga akan diperoleh

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-2} = -1-\sqrt{2}$$

Contoh 23. Dalam menyederhanakan $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$, dapat dikalikan dengan sekawannya pada pembilang dan penyebut yaitu $\sqrt{x} + \sqrt{y}$. Sehingga akan diperoleh

$$\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$$

Dalam penerapannya, dalam merasionalkan bentuk rasional tidak hanya bagian penyebutnya saja, namun bisa bagian pembilangnya. Ide pengerjaannya sama dengan cara merasionalkan penyebut.

Contoh 24. Merasionalkan bentuk $\frac{\sqrt{9+h}-3}{h}$, dapat dikalikan dengan sekawannya pada pembilang dan penyebut yaitu $\sqrt{9+h}+3$. Sehingga akan diperoleh

$$\frac{\sqrt{9+h}-3}{h} = \frac{\sqrt{9+h}-3}{h} \cdot \frac{\sqrt{9+h}+3}{\sqrt{9+h}+3} = \frac{(9+h)-9}{h(\sqrt{9+h}+3)} = \frac{h}{h(\sqrt{9+h}+9)} = \frac{1}{\sqrt{9+h}+9}$$

Berikut merupakan kesalahan-kesalahan yang sering dilakukan siswa/mahasiswa dalam mengerjakan soal yang berkaitan dengan operasi bilangan real baik secara bilangan maupun ekspresi aljabar. Terkadang sifat-sifat pada perkalian yang sudah benar akan diadopsi benar juga untuk operasi penjumlahan sebagai berikut

Sifat Perkalian yang BENAR	Kesalahan Dalam Penjumlahan
$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$	$(a+b)^2 = a^2 + b^2$
$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
$\sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b$	$\sqrt{a^2+b^2} = a+b$
$\frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$
$\frac{ab}{a} = b$	$\frac{a+b}{a} = b$

INGAT kembali bahwa, warna huruf yang diberi warna merah itu pernyataan yang SALAH. Untuk menghindari kesalahan seperti itu, gunakan substitusi kecil lalu substitusi di ruas kiri dan kanan. Sebagai contoh, pada baris ke empat kesalahan pada penjumlahan, substitusi $a = 2$ dan $b = 2$. Pada ruas kiri diperoleh

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Sedangkan pada ruas kanan diperoleh

$$\frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

Karena $1 \neq \frac{1}{4}$ penyataan tersebut akan bernilai salah.

1.4 Latihan Soal Operasi Bilangan Real

1. Operasikan dua bilangan real berikut

   (a) $\frac{3}{10} + \frac{4}{15}$
   (b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$
   (c) $\frac{2}{3} - \frac{3}{5}$
   (d) $1 + \frac{5}{8} - \frac{1}{6}$

2. Nyatakan pernyataan berikut benar atau salah

   (a) $-6 < -10$
   (b) $\dfrac{10}{11} < \dfrac{12}{13}$
   (c) $\sqrt{2} < 1.41$
   (d) $\pi < 3.14$

3. Nyatakan pertidaksamaan berikut dalam garis bilangan.

   (a) $x \leq 1$
   (b) $-2 < x \leq 1$
   (c) $x \geq 5$

4. Jika diberikan $A = \{x|x \geq 2\}$, $B = \{x|x < 4\}$, dan $C = \{x| -1 < x \leq 5\}$, tentukan hasil dari

   (a) $B \cup C$
   (b) $A \cup C$
   (c) $B \cap C$
   (d) $A \cap C$

5. Tentukan hasil penjumlahan atau pengurangan polinomial berikut

   (a) $(3x^2 + x + 1) + (2x^2 - 3x - 5)$
   (b) $(3x^2 + x + 1) - (2x^2 - 3x - 5)$
   (c) $8(2x + 5) - 7(x - 9)$
   (d) $2(2 - 5x) + x^2(x - 1) - (x^4 - 1)$

6. Tentukan hasil operasi perkalian atau kuadrat berikut.

   (a) $(3x - 2)(2x - 3)$
   (b) $(3x + 5)(7x + 9)$
   (c) $(2x + 3)^2$
   (d) $(x - 8)^2$
   (e) $(2x + 1)(2x - 1)$
   (f) $(5x + 2)(5x - 2)$

7. Faktorkan polinomial berikut

   (a) $-2x^3 + 16x$
   (b) $2x^4 + 4x^3 - 14x^2$
   (c) $x(x - 6) + 9(x - 6)$
   (d) $x^2 - 6x + 5$
   (e) $x^2 + 9x + 14$
   (f) $2x^2 - 18x + 40$
   (g) $9x^2 - 16$
   (h) $(x + 3)^2 - 4$
   (i) $x^3 - 1000$

8. Tentukan domain dari ekspresi aljabar berikut

   (a) $2x^5 - 7x + 2$
   (b) $\dfrac{2x - 1}{x + 1}$
   (c) $\sqrt{x + 2023}$
   (d) $\dfrac{x}{\sqrt{x - 1}}$
   (e) $\dfrac{\sqrt{x - 1}}{x^2 - 4}$

9. Sederhanakan bentuk rasional berikut

   (a) $\dfrac{4(x-1)}{9(x-1)(x+4)}$ (b) $\dfrac{x^2+6x+8}{x^2+5x+4}$ (c) $\dfrac{1-x^2}{x^3-1}$

10. Tentukan perkalian atau pembagian bentuk rasional berikut kemudian sederhanakan

   (a) $\dfrac{x-3}{x^2+9} \cdot \dfrac{x+3}{x^2-9}$ (b) $\dfrac{x+3}{x^2-9} \div \dfrac{x^2+7x+12}{x^2-10x+21}$

11. Tentukan penjumlahan dan pengurangan bentuk rasional berikut kemudian sederhanakan.

   (a) $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+3}$ (b) $2 + \dfrac{x}{x+3}$ (c) $\dfrac{x}{x-4} + \dfrac{3}{x+6}$ (d) $\dfrac{x}{x^2-4} + \dfrac{1}{x-2}$

12. Rasionalkan penyebut dari bentuk rasional berikut.

   (a) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ (b) $\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$ (c) $\dfrac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$ (d) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}}$

Bab 2

Persamaan Linear dan Kuadratik

2.1 Persamaan

Secara umum suatu persamaan adalah pernyataan dari dua buah ekspresi matematika yang bernilai sama. Sebagai contoh adalah

$$4 + 3 = 2 + 5$$

merupakan suatu persamaan, karena kedua ruas bernilai sama dengan 7. Dalam permasalahan yang akan dipelajari lebih lanjut akan mengandung suatu **variabel**, yang bisa dinyatakan dalam suatu simbol (biasanya dalam huruf) yang menyatakan suatu bilangan. Sebagai contoh, perhatikan persamaan berikut:

$$4x + 6 = 18$$

huruf x dari persamaan diatas merupakan suatu variabel. Terlihat bahwa nilai x sebagai nilai yang "tidak diketahui" pada persamaan tersebut, sehingga tujuan dari persamaan tersebut adalah menentukan bilangan x yang membuat persamaan benar. Nilai x yang memenuhi persamaan tersebut disebut **solusi** atau **akar** dari persamaan.

Dua buah persamaan dengan solusi yang sama disebut sebagai persamaan ekivalen. Untuk menyelesaikan persamaan, akan dicoba untuk menentukan bentuk sederhana dan ekivalen persamaan dengan variabel hanya berada pada satu ruas (kiri atau kanan) dari tanda "=". Dalam menyelesaikan persamaan dapat digunakan sifat-sifat berikut:
(Pada bagian sifat, A, B, C menyatakan sebarang ekspresi aljabar, dan simbol $\iff$ menyatakan "persamaan ekivalen dengan")

SIFAT PERSAMAAN

Sifat	Deskripsi
1. $A = B \iff A + C = B + C$	Menambahkan bilangan kedua ruas akan diperoleh persamaan yang ekivalen
2. $A = B \iff CA = CB$, $(C \neq 0)$	Mengalikan bilangan tak nol kedua buah ruas diperoleh persamaan yang ekivalen

Kedua sifat diatas memerlukan adil pada kedua buah ruas ketika ingin memperoleh persamaan yang ekivalen. Sebagai contoh perlakuan adil ketika kedua buah ruas ditambah oleh suatu bilangan

$$x = 3 \iff x + 3 = 3 + 3,$$

sedangkan contoh perlakuan adil ketika dikalikan kedua buah ruas dikalikan bilangan tidak 0.

$$x = 3 \iff 2 \cdot x = 2 \cdot 3$$

2.2 Solusi Persamaan Linear

Bentuk paling sederhana dari suatu persamaan adalah persamaan linear atau juga bisa disebut persamaan berderajat satu yaitu persamaan yang terdiri dari suatu bilangan konstan atau pengali tidak nol dari suatu variabel.

PERSAMAAN LINEAR

Suatu persamaan linear satu variabel merupakan persamaan dengan bentuk

$$ax + b = 0$$

dengan a dan b merupakan bilangan real dan x merupakan suatu variabel.

Berikut merupakan contoh yang mengilustrasikan perbedaan dari persamaan linear dan tak linear

Persamaan Linear	Persamaan Tidak Linear	
$4x - 5 = 3$	$x^2 + 2x = 8$	(Tidak Linear, terdiri dari variabel kuadrat)
$3x = 2x - 7$	$\sqrt{x} - 6x = 0$	(Tidak linear, terdiri dari akar variabel)
$x - 6 = \dfrac{x}{3}$	$\dfrac{3}{x} - 2x = 1$	(Tidak Linear, variabel terdapat pada penyebut suatu pecahan)

Berikut diberikan beberapa contoh dalam menyelesaikan persamaan linear.

Contoh 1. Tentukan solusi dari persamaan $7x - 4 = 3x + 8$
Solusi. Dalam menyelesaikan solusi persamaan linear tersebut kita ubah persamaan tersebut dengan penrsamaan ekivalen dengan sifat-sifat persamaan sebelumnya, sehingga hanya variabel x yang berada pada ruas kiri.

$$\begin{array}{rclll} 7x - 4 & = & 3x + 8 & & \text{Persamaan awal} \\ (7x-4) + 4 & = & (3x+8) + 4 & & \text{Jumlahkan } 4 \\ 7x & = & 3x + 12 & & \text{Sederhanakan} \\ 7x - 3x & = & (3x + 12) - 3x & & \text{Kurangi } 3x \\ 4x & = & 12 & & \text{Sederhanakan} \\ \frac{1}{4} \cdot 4x & = & \frac{1}{4} \cdot 12 & & \text{Kalikan dengan } \frac{1}{4} \\ x & = & 3 & & \text{Sederhanakan} \end{array}$$

Dapat diperiksa bahwa, jika disubstitusi nilai $x = 3$ ke ruas kiri persamaan awal akan dipeoleh $7 \cdot (3) - 4 = 17$, sedangkan jika disubstitusi ke ruas kanan persamaan awal akan diperoleh $3 \cdot (3) + 8 = 17$. Dengan demikian terbukti bahwa $x = 3$ merupakan solusi.

Beberapa persamaan dalam sains terdiri dari beberapa variabel, dan sering diperlukan untuk menyatakan suatu variabel dalam bentuk variabel lain. Sebagai contoh perhatikan kedua contoh berikut:

Contoh 2. Diberikan persamaan $F = G\frac{mM}{r^2}$, nyatakan variabel M dalam variabel lain.
Solusi. Langkah pertama dalam mengerjakan soal ini, isolasi terlebih dahulu variabel M sebagai berikut:

$$\begin{array}{rclll} F & = & \left(\frac{Gm}{r^2}\right) M & & \text{Isolasi variabel } M \\ \left(\frac{r^2}{Gm}\right) F & = & \left(\frac{r^2}{Gm}\right)\left(\frac{Gm}{r^2}\right) M & & \text{Kalikan dengan } \frac{Gm}{r^2} \\ \frac{r^2 F}{Gm} & = & M & & \text{Sederhanakan} \end{array}$$

Diperoleh solusi $M = \frac{r^2 F}{Gm}$.

Contoh 3. Diberikan luas permukaan suatu balok adalah A dengan panjang p, lebar ℓ, dan tinggi t akan memenuhi persamaan

$$A = 2p\ell + 2pt + 2\ell t$$

Nyatakan ℓ dalam bentuk variabel lain.
Solusi. Sama seperti sebelumnya, isoalasi terlebih dahulu variabel ℓ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
A &= (2p\ell + 2\ell t) + 2pt && \text{Kumpulkan komponen yang terdiri dari } \ell \\
A - 2pt &= 2p\ell + 2\ell t && \text{Kurangkan dengan } 2pt \\
A - 2pt &= (2p + 2t)\ell && \text{Isolasi atau faktorkan } \ell \\
\frac{A - 2pt}{2p + 2t} &= \ell && \text{Bagi dengan } 2p + 2t
\end{aligned}$$

Diperoleh solusi $\ell = \dfrac{A - 2pt}{2p + 2t}$

2.3 Solusi Persamaan Kuadratik

Persamaan linear merupakan persamaan berderajat satu seperti $2x + 1 = 5$ atau $4 - 3x = 2$. Sedangkan persamaan kuadratik merupakan persamaan berderajat dua seperti $x^2 + 2x - 3 = 0$ atau $2x^2 + 3 = 0$, atau dalam bentuk umumnya sebagai berikut

PERSAMAAN KUADRATIK
Persamaan kuadratik mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dengan a, b, c merupakan bilangan real dan $a \neq 0$.

2.3.1 Metode Faktor

Beberapa persamaan kuadratik dapat diselesaikan dengan memfaktorkan menjadi suku-suku linear serta dengan sifat dari bilanagn real, yaitu:

SIFAT PERKALIAN MENGHASILKAN NOL
Nilai $AB = 0$ jika dan hanya jika $A = 0$ atau $B = 0$

Artinya, jika persamaan kuadrat dapat memfaktorkan ruas kiri (kanan) dari persamaan, maka persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan mengatur faktor-faktornya bernilai 0. Metode ini dapat digunakan ketika ruas kanan (kiri) bernilai 0.

Contoh 4. Selesaikan persamaan $x^2 + 5x = 24$

Solusi. Jadikan salah satu ruas menjadi 0

$$\begin{array}{rcll} x^2 + 5x & = & 24 & \text{Persamaan Awal} \\ x^2 + 5x - 24 & = & 0 & \text{Kurangi 24} \\ (x-3)(x+8) & = & 0 & \text{Faktorisasi} \\ x - 3 = 0 & \text{atau} & x + 8 = 0 & \text{Sifat perkalian menghasilkan 0} \\ x = 3 & \text{atau} & x = -8 & \text{Selesaikan} \end{array}$$

Dalam persamaan kuadrat yang berbentun $x^2 - c = 0$ untuk bilangan c tak negatif, dapat difaktorkan menjadi $(x - \sqrt{c})(x + \sqrt{c}) = 0$. Dengan demikian akan diperoleh:

MENYELESAIKAN PERSAMAAN KUADRATIK SEDERHANA

Solusi dari persamaan $x^2 = c$ adalah $x = \sqrt{c}$ dan $x = -\sqrt{c}$.

Contoh 5. Tentukan solusi dari

a. $x^2 = 6$

b. $(x-4)^2 = 5$

Solusi. Dengan menggunakan solusi dari persamaan kuadratik sederhana akan diperoleh

a. Solusi dari $x^2 = 6$ adalah $x = \sqrt{6}$ dan $x = -\sqrt{6}$.

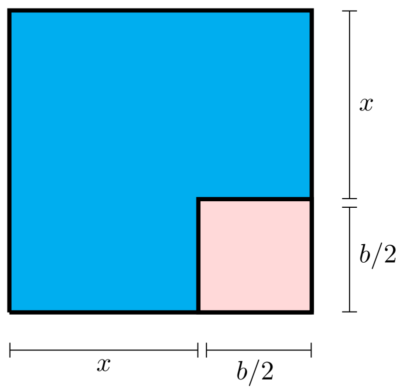
b. Sebelum menggunakan tersebut, akar-kan kedua ruas sehingga diperoleh

$$\begin{array}{rcll} (x-4)^2 & = & 5 & \text{Persamaan Awal} \\ x - 4 & = & \pm\sqrt{5} & \text{Akar-kan kedua ruas} \\ x & = & 4 \pm \sqrt{5} & \text{Tambahkan 4} \end{array}$$

Solusinya adalah $x = 4 + \sqrt{5}$ dan $x = 4 - \sqrt{5}$.

2.3.2 Melengkapi Kuadrat Sempurna

Dari contoh 5 dapat diperoleh bahwa untuk solusi persamaan kuadrat berbentuk $(x \pm a)^2 = c$ dapat diporeleh solusinya karena ruas kiri berbentuk kuadrat sempurna. Dengan menggunakan informasi yang sudah ada, akan dibentuk suatu kuadrat sempurna dari suatu persamaan kuadrat. Perhatikan ilustrasi dari persegi berikut



Luas dari persegi diatas haruslah bernilai

$$L = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)\left(x + \frac{b}{2}\right) = x^2 + bx + \frac{b^2}{4}$$

Sehingga, akan diperoleh suatu bentuk kuadrat sempurna dari persamaan kuadrat berbentuk

MELENGKAPI KUADRAT SEMPURNA

Persamaan kuadrat berbentuk $x^2 + bx + c$ dapat dibentuk menjadi kuadrat sempurna menjadi

$$x^2 + bx + c = x^2 + bx + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c$$

Jika bentuk kuadrat adalah $ax^2 + bx + c$ keluarkan a dari persamaan seperti berikut

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

kemudian gunakan cara yang sudah dijelaskan sebelumnya.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh-contoh berikut

Contoh 6. Ubah bentuk kuadrat berikut menjadi bentuk kuadrat sempurna.

1. $x^2 + 4x + 9$
2. $x^2 + 7x + 2$

Solusi. Dengan membagi dua pada koefisien dari x, akan diperoleh bentuk kuadrat sempurna sebagai berikut:

1. $x^2 + 4x + 9 = (x + 2)^2 - 2^2 + 9 = (x + 2)^2 + 5$
2. $x^2 + 7x + 2 = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{7^2}{2^2} + 2 = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{41}{4}$

Contoh 7. Ubah bentuk kuadrat berikut menjadi bentuk kuadrat sempurna.

1. $2x^2 + 8x + 6$
2. $3x^2 - 10x + 1$

Solusi. Dengan membuat koefisien x^2 menjadi 1 dan membagi dua pada koefisien dari x, akan diperoleh bentuk kuadrat sempurna sebagai berikut:

1. $2x^2 + 8x + 6 = 2(x^2 + 4x) + 6 = 2\left[(x + 2)^2 - 2^2\right] + 6 = 2(x + 2)^2 - 2$
2. $3x^2 - 10x + 1 = 3\left(x^2 - \frac{10}{3}x\right) + 1 = 3\left[\left(x - \frac{10}{6}\right)^2 - \frac{10^2}{6^2}\right] + 1 = 3\left(x - \frac{10}{6}\right)^2 - \frac{88}{12}$

Contoh-contoh selanjutnya merupakan contoh untuk menyelesaikan persamaan kuadrat dengan menggunakan metode melengkapi persamaan kuadrat.

Contoh 8. Tentukan solusi untuk persamaan kuadratik berikut.

1. $x^2 + 4x + 9 = 6$
2. $x^2 + 7x + 2 = 20$

Solusi. Berdasarkan contoh 6, akan diperoleh

1. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 9 &= 6 \\ (x + 2)^2 + 5 &= 6 \\ (x + 2)^2 &= 1 \\ x + 2 &= \pm 1 \\ x + 2 = 1 \text{ atau } x + 2 &= -1 \end{aligned}$$

Dengan demikian akan diperoleh $x = -1$ atau $x = -3$.

2. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
x^2+7x+2&=20\\
\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{41}{4}&=20\\
\left(x+\frac{7}{2}\right)^2&=\frac{121}{4}\\
x+\frac{7}{2}&=\pm\frac{11}{2}\\
x+\frac{7}{2}=\frac{11}{2} \text{ atau } x+\frac{7}{2}&=-\frac{11}{2}
\end{aligned}$$

Dengan demikian akan diperoleh $x=2$ atau $x=-9$.

Contoh 9. Tentukan solusi untuk persamaan kuadratik berikut.

1. $2x^2+8x+6=30$
2. $3x^2-10x+1=1$

Solusi. Berdasarkan contoh 7, akan diperoleh

1. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
2x^2+8x+6&=30\\
2(x+2)^2-2&=30\\
(x+2)^2&=16\\
x+2&=\pm4\\
x+2=4 \text{ atau } x+2&=-4
\end{aligned}$$

Dengan demikian akan diperoleh $x=-2$ atau $x=-6$.

2. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
3x^2-10x+1&=1\\
3\left(x-\frac{10}{6}\right)^2-\frac{88}{12}&=1\\
\left(x-\frac{10}{6}\right)^2&=\frac{100}{36}\\
x-\frac{10}{6}&=\pm\frac{10}{6}\\
x-\frac{10}{6}=\frac{10}{6} \text{ atau } x-\frac{10}{6}&=-\frac{10}{6}
\end{aligned}$$

Dengan demikian akan diperoleh $x=0$ atau $x=\frac{10}{3}$.

2.3.3 Rumus Persamaan Kuadrat

Dari contoh-contoh sebelumnya, dapat diperoleh akar atau solusi persamaan kuadrat dengan cara melengkapi kuadrat sempurna. Perhatikan bentuk umum persamaan kuadrat berbentuk

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Dengan melengkapi kuadrat sempurna akan diperoleh

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= 0 \\
a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] &= 0 \\
a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] &= 0 \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} &= 0 \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right) &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
x + \frac{b}{2a} &= \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan sebagai berikut:

RUMUS PERSAMAAN KUADRAT
Solusi dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ untuk $a \neq 0$ berbentuk

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Berikut merupakan contoh-contoh penerapan soal menentukan solusi persamaan kuadrat dengan menggunakan rumus persamaan kuadrat.

Contoh 10. Tentukan solusi (jika ada) dari persamaan kuadrat berikut:

1. $3x^2 - 5x - 1 = 0$
2. $4x^2 + 12x + 9 = 0$
3. $x^2 + 2x + 2 = 0$

Solusi. Perhatikan koefisien-koefisien dari x^2, x, dan konstanta, akan diperoleh.

1. Untuk $a = 3$, $b = -5$, dan $x = -1$ akan diperoleh solusi-nya adalah

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{6}$$

   Dengan demikian solusinya adalah $x = \dfrac{5 + \sqrt{37}}{6}$ dan $x = \dfrac{5 - \sqrt{37}}{6}$.

2. Untuk $a = 4$, $b = 12$, dan $c = 9$ akan diperoleh solusi-nya adalah

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4(4)(9)}}{2(4)} = \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{8}$$

   Dengan demikian akan diperoleh satu buah solusi yaitu $x = \dfrac{-12}{8} = \dfrac{-3}{2}$

3. Untuk $a = 1$, $b = 2$, dan $c = 2$ akan diperoleh solusi-nya adalah

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

   Karena $\sqrt{-4}$ bukan merupakan bilangan real, maka persamaan kuadrat tidak mempunyai solusi real.

Dari Contoh 10 tersebut dapat diperoleh beberapa kasus dimana solusi persamaan kuadrat mempunyai dua buah solusi, satu buah solusi, dan tidak ada solusi. Hal tersebut dapat dilihat ketika menghitung $\sqrt{b^2 - 4ac}$ dalam rumus persamaan kuadrat. Karena dalam nilai akar haruslah berisi nilai tak negatif. Nilai dari $b^2 - 4ac$ dapat disebut sebagai diskriminan, dengan sifat-sifat yang terkait solusi persamaan kuadrat sebagai berikut.

DISKRIMINAN

Diskriminan dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah $D = b^2 - 4ac$.

- Jika $D > 0$, maka persamaan kuadrat akan mempunyai dua buah solusi.
- Jika $D = 0$, maka persamaan kuadrat akan mempunyai satu buah solusi.
- Jika $D < 0$, maka persamaan kuadrat tidak mempunyai solusi real.

Dapat dilihat dari Contoh 10, bahwa untuk bagian pertama persamaan kuadrat mempunyai Diskriminan $37 > 0$ sehingga mepunyai dua buah solusi. Untuk persamaan kedua mempunyai Diskriminan bernilai nol, maka hanya akan mempunyai sebuah solusi. Terakhir untuk persamaan ketiga akan mempunyai Diskriminan $-4 < 0$ sehingga tidak akan mempunyai solusi real.

2.4 Permodelan Masalah dengan Persamaan

Dalam memodelkan masalah dengan menggunakan persamaan, dapat mengikuti pedoman berikut:

LANGKAH-LANGKAH DALAM MEMODELKAN PERSAMAAN.

1. **Identifikasi variabel**. Identifikasi nilai yang ditanyakan oleh soal untuk diperoleh solusinya. Nilai ini biasanya dapat ditentukan dengan membaca soal dengan cermat. Kemudian kenalkan suatu notasi untuk variabel(sebut saja x atau huruf lain).
2. **Terjemahkan kata menjadi aljabar**. Baca setiap kalimat dalam soal lagi, dan nyatakan semua nilai yang disebutkan dalam soal dalam bentuk variabel yang didefinisikan pada langkah 1.
3. **Siapkan Modelnya**. Temukan fakta penting dalam soal yang menghubungkan ekspresi-ekspresi yang diperoleh pada langkah 2.
4. **Tentukan solusi persamaan dan periksa jawaban.** Menentukan solusi pada langkah 3, serta periksa apakah solusi memenuhi permasalahan yang ada atau tidak.

Berikut merupakan contoh-contoh dalam menyelesaikan permasalahan sederhana dengan menggunakan persamaan linear ataupun kuadratik.

Contoh 11. Dalam suatu tempat parkir terdapat aturan bahwa biaya parkir untuk satu kendaraan 3000 rupiah, kemudian setiap jam, kendaraan dikenai biaya parkir tambahan sebesar 2000 rupiah per jam. Jika ketika keluar parkiran Adit membayar sebesar 15000 rupiah. Tentukan berapa lama Adit memarkir kendaraannya.

Solusi. Jika mengikuti langkah-langkah yang ada.

1. Ditanya adalah berapa lama Adit memarkir kendaraannya, sehingga dapat dimisalkan

$$x = \text{Waktu Adit memarkirkan kendaraan}$$

2. Ubah permasalahan dengan menggunakan variabel yang ada, perhatikan tabel berikut

Kata	Dalam Variabel
Lama waktu Adit Parkir	x
Harga Parkir	3000
Tambahan Biaya Parkir per jam	$2000 \cdot x$

3. Bentuk Modelnya, dengan total biaya parkir adalah harga parkir ditambah total tambahan biaya parkir

$$\text{Harga Parkir} \ + \ \text{Tambahan Biaya parkir} = \text{Total Biaya}$$
$$3000 + 2000x = 15000$$

4. Selesaikan persamaan tersebut

$$\begin{aligned} 3000 + 2000x &= 15000 \\ 2000x &= 12000 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Jadi Adit total memarkirkan kendaaraannya dengan total 6 jam.

Contoh 12. Suatu perusahaan telekomunikasi menjual jasa mengirim pesan SMS dengan aturan sebagai berikut. Setiap bulan pelanggan akan dikenai biaya dasar 27000 rupiah untuk pengeriman 100 pesan pertama, dan 1000 rupiah untuk setiap penambahan pesan yang dikirim. Jika Tya mendapat tagihan sebesar 42000 rupiah di akhir bulan. Tentukan banyak pesan yang dikirim Tya pada bulan tersebut.

Solusi. Mengikuti langkah-langkah yang ada.

1. Ditanya adalah, berapa lama Tya banyak pesan yang dikirim Tya dalam satu bulan, namun karena 100 pesan pertama bebas biaya maka dapat dimisalkan

$$x = \text{Banyak pesan Tya kirimkan yang mendapatkan tagihan}$$

2. Ubah permasalahan dengan menggunakan variabel yang ada, perhatikan tabel berikut

Kata	Dalam Variabel
Banyak pesan Tya kirimkan yang mendapatkan tagihan	x
Tambahan tagihan untuk Tya	$1000 \cdot x$
Biaya dasar	27000

3. Bentuk Modelnya, dengan total biaya tagihan adalah biaya dasar ditambah dengan tambahan tagihan

$$\text{Biaya Dasar} \ + \ \text{Tambahan Tagihan} = \text{Total Biaya}$$
$$27000 + 1000x = 42000$$

4. Selesaikan persamaan tersebut

$$\begin{aligned} 27000 + 1000x &= 42000 \\ 1000x &= 15000 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Jadi Tya mendapatkan tagihan biaya dari 15 pesan tambahan. Sehingga total pesan yang dikirimkan Tya adalah $100 + 15 = 115$.

Contoh 14. Suatu persegi panjang mempunyai lebar 8 m lebih panjang dari panjang persegi panjang tersebut. Jika luas persegi panjang adalah 48 m^2, tentukan panjang dan lebar persegi panjang tersebut.
Solusi. Mengikuti langkah yang ada

1. Dapat dimisalkan

$$x = \text{lebar dari persegi panjang}$$

2. Ubah kedalam bentuk variabel

Kata	Dalam Variabel
Lebar dari persegi panjang	x
Panjang dari persegi panjang	$x + 8$
Luas persegi panjang	48

3. Bentuk modelnya, luas dari persegi panjang adalah panjang dikali lebar, sehingga dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \text{Panjang} \cdot \text{Lebar} &= \text{Luas} \\ x \cdot (x + 8) &= 48 \end{aligned}$$

4. Selesaikan persamaan tersebut

$$\begin{aligned} x^2 + 8x &= 48 \\ x^2 + 8x - 48 &= 0 \\ (x + 12) \cdot (x - 4) &= 0 \\ x = -12 \text{ atau } x &= 4 \end{aligned}$$

Karena x menayatakan lebar, seharusnya nilai x haruslah positif. Sehingga lebar dari persegi panjang tersebut adalah 4, dengan panjangnya adalah $4 + 8 = 12$.

2.5 Latihan Soal Persamaan

1. Selesaikan persamaan linear berikut.

   (a) $2x + 7 = 31$

   (b) $5x - 3 = 4$

   (c) $\frac{1}{2}x - 1 = 9$

   (d) $3 + \frac{1}{3}x = 5$

   (e) $-7w = 15 - 2w$

   (f) $5t - 13 = 12 - 5t$

   (g) $\frac{1}{2}y - 2 = \frac{1}{3}y$

   (h) $\frac{z}{5} = \frac{3}{10}z + 7$

   (i) $2(1 - x) = 3(1 + 2x) + 5$

   (j) $\frac{2}{3}y + \frac{1}{2}(y - 3) = \frac{y + 1}{4}$

   (k) $x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x - 5 = 0$

   (l) $2x - \frac{x}{2} + \frac{x + 1}{4} = 6x$

2. Selesaikan persamaan untuk variabel yang diinginkan.

   (a) $PV = nRT$ untuk R.

   (b) $F = G\frac{mM}{r^2}$ untuk m.

   (c) $P = 2\ell + 2w$ untuk ℓ.

   (d) $a^2x + (a - 1) = (a + 1)x$ untuk x.

   (e) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ untuk r.

   (f) $a^2 + b^2 = c^2$ untuk b.

3. Selesaikan persamaan kuadratik berikut dengan cara memfaktorkan.

   (a) $x^2 + x - 12 = 0$

   (b) $x^2 + 3x - 4 = 0$

   (c) $x^2 - 7x + 10 = 0$

   (d) $x^2 + 8x + 12 = 0$

   (e) $4x^2 - 4x - 15 = 0$

   (f) $2y^2 + 7y + 3 = 0$

   (g) $3x^2 + 5x = 2$

   (h) $2x^2 = 8$

4. Selesaikan persamaan kuadratik berikut dengan cara melengkapi kuadrat sempurna.

   (a) $x^2 + 2x - 5 = 0$

   (b) $x^2 - 4x + 2 = 0$

   (c) $x^2 - 6x - 11 = 0$

   (d) $x^2 + 3x - \frac{7}{4} = 0$

   (e) $2x^2 + 8x + 1 = 0$

   (f) $3x^2 - 6x - 1 = 0$

   (g) $4x^2 - x = 0$

   (h) $x^2 = \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$

5. Tentukan seluruh solusi (jika ada) dari persamaan kuadratik berikut dengan rumus persamaan kuadratik.

   (a) $x^2 - 2x - 15 = 0$

   (b) $x^2 + 5x - 6 = 0$

   (c) $x^2 - 7x + 10 = 0$

   (d) $x^2 + 30x + 200 = 0$

   (e) $2x^2 + x - 3 = 0$

   (f) $3x^2 + 7x + 4 = 0$

   (g) $3x^2 + 6x - 5 = 0$

   (h) $x^2 - 6x + 1 = 0$

6. Gunakan Diskriminan untuk mengetahui berapa banyak solusi real dari persamaan kuadrat berikut

   (a) $x^2 - 6x + 1 = 0$
   (b) $3x^2 = 6x - 9$
   (c) $x^2 + 2.2x + 1.21 = 0$
   (d) $x^2 + 2.21x + 1.21 = 0$

7. Suatu bola dilemparkan sehingga setelah t detik dilemparkan, ketinggian bola atas permukaan tanah h mengikuti persamaan
$$h = -16t^2 + 288$$
   Tentukan kapan bola mencapai tanah.

8. Suatu bola dilemparkan sehingga setelah t detik dilemparkan, ketinggian bola atas permukaan tanah h mengikuti persamaan
$$h = -16t^2 + 40t$$
   Tentukan.

   (a) Kapan bola mencapai ketinggian 24 meter dari permukaan tanah.
   (b) Kapan bola mencapai ketinggian 48 meter dari permukaan tanah.
   (c) Kapan bola mencapai tanah.

9. Populasi ikan F dalam suatu danau mengikuti persamaan
$$F = 1000(30 + 17t - t^2)$$
   Dengan F menyatakan banyak ikan dalam waktu t dimana t dihitung dalam tahun sejak 1 Januari 2002 (ketika populasi pertama kali diestimasi)

   (a) Tentukan populasi ikan saat tanggal 1 Januari 2002
   (b) Tentukan waktu ketika populasi ikan sama dengan populasi awalnya.
   (c) Estimasi waktu populasi ikan pada danau tersebut akan punah.

10. Suatu persegi panjang mempunyai luas 150 m^2 dengan panjangnya adalah 25 m. Tentukan lebar dari persegi panjang tersebut.

11. Suatu peternak mempunyai lahan berbentuk persegi panjang yang dipagari oleh 200 meter pagar rotan. Tentukan lebar dan panjang lahan peternak tersebut, jika luas lahannya adalah 2400 m^2.

12. Suatu perusahaan sewa mobil memberikan beban biaya sewa mobil 150 ribu rupiah per hari dengan tambahan 15 ribu rupiah per kilometer. Jika Pratama menyewa mobil pada penyewaan tersebut, dan membayar 495 ribu rupiah. Tentukan jarak yang ditempuh oleh Pratama.

13. Tahun ini Adam 4 kali dari umur anaknya. Jika 6 tahun kemudian, umur Adam 3 kali umur anaknya. Tentukan umur anak Adam tahun ini.

Bab 3

Pertidaksamaan

3.1 Pertidaksamaan

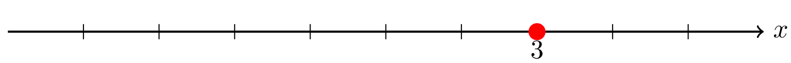
Beberapa masalah dalam kalkulus atau matematika akan bermain tidak hanya dalam bentuk persamaan, bisa saja ke dalam bentuk pertidaksamaan. Suatu pertidaksamaan terlihat serupa dengan persamaan, dengan cara mengganti tanda ”$=$” dengan mengganti salah satu dari simbol ”$<$”, ”$\leq$”, ”$>$”, and ”$\geq$”. Berikut merupakan salah satu bentuk pertidaksamaan

$$2x + 3 \leq 9$$

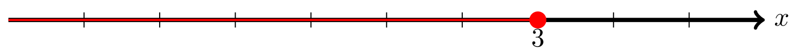
Perhatikan bahwa untuk beberapa nilai x berikut

x	$2x + 3 \leq 9$	
0	$3 \leq 9$	Benar
1	$5 \leq 9$	Benar
2	$7 \leq 9$	Benar
3	$9 \leq 9$	Benar
4	$11 \leq 9$	Salah
5	$13 \leq 9$	Salah

Dari tabel diatas dapat diperoleh beberapa nilai yang memenuhi pertidaksamaan $2x + 3 \leq 9$. Dalam menyelesaikan pertidaksamaan tidak hanya menentukan beberapa nilai saja yang memenuhi, namun akan ditentukan **semua** nilai yang memenuhi pertidaksamaan. Tidak seperti persamaan, dalam pertidaksamaan memungkinkan mempunyai solusi tak hingga banyaknya. Dalam persamaan $2x + 3 = 9$ akan mempunyai solusi $x = 3$, atau dalam garis bilangan sebagao berikut



Sedangkan untuk solusi dari $2x + 3 \leq 9$ adalah $x \leq 3$ yang mempunyai tak hingga solusi. Dalam garis bilangan akan terlihat sebagai berikut:



Dalam menyelesaikan pertidaksamaan dapat digunakan sifat-sifat berikut:
(Pada bagian sifat, A, B, C menyatakan sebarang ekspresi aljabar, dan simbol $\iff$ menyatakan "persamaan ekivalen dengan")

SIFAT PERTIDAKSAMAAN

Sifat	Deskripsi
1. $A \leq B \iff A \pm C \leq B \pm C$	Menambahkan atau mengurangi bilangan kedua ruas akan diperoleh pertidaksamaan yang ekivalen
2. Jika $C > 0$ maka $A \leq B \iff CA \leq CB$	Mengalikan bilangan positif kedua buah ruas diperoleh pertidaksamaan yang ekivalen
3. Jika $C < 0$ maka $A \leq B \iff CA \geq CB$	Mengalikan bilangan negatif kedua buah ruas diperoleh pertidaksamaan yang ekivalen ketika tanda dirubah
4. Jika $A, B > 0$ maka $A \leq B \iff \frac{1}{A} \geq \frac{1}{B}$	Mengambil invers bilangan akan merubah tanda pertidaksamaan
5. Jika $A \leq B$ dan $C \leq D$, maka $A + C \leq B + D$	Pertidaksamaan dapat dijumlahkan.

Dalam bagan di atas, walaupun pertidaksamaan yang digunakan dalam bentuk $\leq$, namun juga berlaku untuk pertidaksamaan dengan tanda $<$, $>$, dan $\geq$.

Perhatikan bahwa untuk nomor 2 dan 3, perkalian dengan positif dan negati akan merubah tanda pertidaksamaan. Untuk contohnya, perhatikan bahwa

$$2 < 4$$

Jika dikalikan dengan (+3) maka akan berlaku

$$6 < 12$$

Sedangkan jika dikalikan dengan negatif (pilih -2), akan berlaku

$$-4 > -8$$

3.2 Solusi Pertidaksamaan Linear

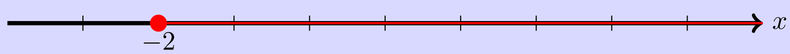
Dalam menyelesaikan pertidaksamaan berbentuk linear, ide utamanya adalah mengisolasi variabel dalam satu ruas yang berbeda dengan konstanta. Perhatikan contoh-contoh berikut

Contoh 1. Tentukan solusi dari pertidaksamaan $3x \leq 9x + 12$.

Solusi.

$$\begin{array}{rcll} 3x & \leq & 9x+12 & \text{Pertidaksamaan awal} \\ 3x - 9x & \leq & (9x+12) - 9x & \text{Kurangkan } 9x \\ -6x & \leq & 12 & \text{Sederhanakan} \\ -\frac{1}{6} \cdot -6x & \geq & -\frac{1}{6} \cdot 12 & \text{Kalikan dengan } -\frac{1}{6} \\ x & \geq & -2 & \text{Sederhanakan} \end{array}$$

Solusi dari pertidaksamaan diatas, adalah seluruh bilangan yang lebih dari sama dengan negatif dua atau dapat ditulis sebagai $x \geq -2$ atau himpunan solusinya dapat ditulis sebagai $[-2, \infty)$.

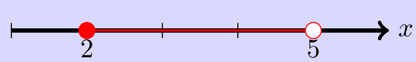


Contoh 2. Tentukan solusi dari pertidaksamaan $4 \leq 3x - 2 < 13$.

Solusi. Himpunan solusi permasalahan di atas harus memenuhi kedua pertidaksamaan yaitu $4 \leq 3x - 2$ dan $3x - 2 < 13$, namun dapat dilakukan sekaligus

$$\begin{array}{rcccll} 4 & \leq & 3x-2 & < & 13 & \text{Pertidaksamaan awal} \\ 4+2 & \leq & (3x-2)+2 & < & 13+2 & \text{Tambahkan } 2 \\ 6 & \leq & 3x & < & 15 & \text{Sederhanakan} \\ \frac{1}{3} \cdot 6 & \leq & \frac{1}{3} \cdot 3x & < & \frac{1}{3} \cdot 15 & \text{Kalikan } \frac{1}{3} \\ 2 & \leq & x & < & 5 & \text{Sederhanakan} \end{array}$$

Sehingga solusinya adalah $2 \leq x < 5$ atau dapat ditulis sebagai $[2, 5)$



3.3 Solusi Pertidaksamaan Tak Linear

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan yang tidak terkait dengan pangkat kuadrat atau yang lain, dapat diselesaikan dengan cara memfaktorkan, dan gunakan prinsip berikut:

TANDA PERKALIAN DAN PEMBAGIAN

1. Jika banyak faktor negatif dari perkalian atau pembagian berjumlah **genap**, maka akan bertanda **positif**.
2. Jika banyak faktor negatif dari perkalian atau pembagian berjumlah **ganjil**, maka akan bertanda **negatif**.

Sebagai contoh, jika ingin diperoleh solusi dari pertidaksamaan $x^2 - 5x \leq -6$, pindahkan -6 ke ruas kiri dan faktorkan. Sehingga akan diperoleh bentuk sebagai berikut

$$(x-2)(x-3) \leq 0$$

Bentuk dari pertidaksamaan tersebut perkalian dari $(x-2)$ dan $(x-3)$ haruslah 0 (Karena terdapat tanda "=") dan negatif. Sehingga untuk menyelesaikan pertidaksamaan tersebut dapat dicari kapan faktor berbeda tanda (karena perkalian dua buah faktor berbeda tanda akan menghasilkan nilai negatif).

Dalam menyelesaikan pertidaksamaan linear, dapat menggunakan langkah-langkah sebagai berikut.

LANGKAH-LANGKAH DALAM MENYELESAIKAN PERTIDAKSAMAAN LINEAR

1. **Pindahkan semua suku ke dalam ruas yang sama**. Pindahkan semua ruas sehingga salah satu ruas bernilai 0.
2. **Faktorkan**. Faktorkan suku dengan ruas tak nol.
3. **Tentukan Interval**. Tentukan nilai sehingga setiap faktor bernilai 0. Nilai-nilai tersebut akan membagi daerah-daerah solusi.
4. **Buat Tabel atau Diagram**. Pilih nilai uji yang sudah dibagi oleh daerah-daerah interval tersebut.
5. **Selesaikan**. Tentukan solusi dari pertidaksamaan. Jangan lupa untuk memeriksa terkait pertidaksamaan yang terdapat persamaan ($\leq$ atau $\geq$).

Contoh 3. Tentukan solusi dari pertidaksamaan $x^2 \leq 5x - 6$.
Solusi. Mengikuti langkah-langkah yang diberikan.

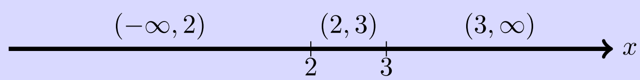
1. **Pindahkan semua suku ke dalam ruas yang sama.**

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0$$

2. **Faktorkan.**

$$(x-2)(x-3) \leq 0$$

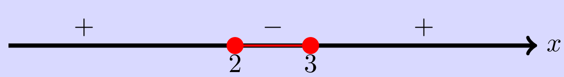
3. **Tentukan Interval**. Faktor dari ruas kiri adalah $(x-2)$ dan $(x-3)$, yang bernilai nol masing-masing di $x = 2$ dan $x = 3$. Sehingga akan menjadi tiga daerah interval



4. **Buat tabel atau diagram**. Karena dari langkah sebelumnya terdapat tiga buah daerah, masing-masing dipilih titik uji. Untuk $(-\infty, 2)$ pilih titik uji $x = 0$, untuk $(2, 3)$ pilih titik uji $x = 2.5$, dan untuk $(3, \infty)$ pilih titik uji $x = 5$. Sehingga dapat dibuat tabel sebagai berikut

Selang	Titik Uji	Tanda $(x-3)$	Tanda $(x-2)$	Tanda $(x-3)(x-2)$
$(-\infty, 2)$	0	$-$	$-$	$+$
$(2, 3)$	2.5	$-$	$+$	$-$
$(3, \infty)$	5	$+$	$+$	$+$

Jika digambar, akan sebagai berikut

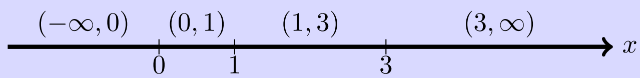


5. **Selesaikan**. Karena yang diinginkan adalah pertidaksamaan yang menghasilkan nilai 0 atau negatif, maka dari langkah sebelumnya dapat diperiksa bahwa solusinya adalah $2 \leq x \leq 3$ atau dapat ditulis sebagai $[2, 3]$.

Berikut merupakan contoh dari pengerjaan pertidaksamaan dengan faktor yang berulang:

Contoh 4. Tentukan solusi dari pertidaksamaan, $x(x-1)^2(x-3) < 0$
Solusi. Karena salah satu ruas sudah bernilai 0 dan ruas tak nol sudah difaktorkan, maka dapat langsung ke langkah ke-3.

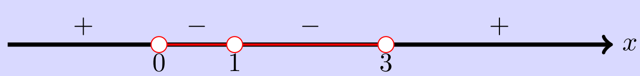
3. **Tentukan Interval.** Ruas kiri bernilai 0 ketika nilai x bernilai $x = 0, 1, 3$. Sehingga akan membagi daerah-daerah sebagai berikut



4. **Buat tabel atau diagram**. Karena dari langkah sebelumnya terdapat empat buah daerah, masing-masing dipilih titik uji. Untuk $(-\infty, 0)$ pilih titik uji $x = -1$, untuk $(0, 1)$ pilih titik uji $x = 0.5$, untuk $(1, 3)$ pilih titik uji $x = 2$, dan untuk $(3, \infty)$ pilih titik uji $x = 5$. Sehingga dapat dibuat tabel sebagai berikut

Selang	Titik Uji	Tanda x	Tanda $(x-1)^2$	Tanda $(x-3)$	Tanda $x(x-1)^2(x-3)$
$(-\infty, 0)$	-1	$-$	$+$	$-$	$+$
$(0, 1)$	0.5	$+$	$+$	$-$	$-$
$(1, 3)$	2	$+$	$+$	$-$	$-$
$(3, \infty)$	5	$+$	$+$	$+$	$+$

Jika digambar, akan sebagai berikut



5. **Selesaikan.** Karena yang diinginkan adalah pertidaksamaan yang menghasilkan nilai negatif, maka dari langkah sebelumnya dapat diperiksa bahwa solusinya adalah $0 < x < 1$ dan $1 < x < 3$ atau dapat ditulis sebagai $(0, 1) \cup (1, 3)$

Contoh selanjutnya merupakan permasalahan pertidaksamaan dengan fungsi pecahan.

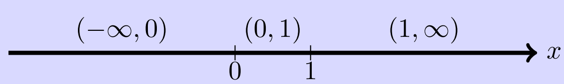
Contoh 5. Tentukan solusi dari pertidaksamaan $\dfrac{1+x}{1-x} \geq 1$.
Solusi. Mengikuti langkah-langkah yang diberikan

1. **Pindahkan semua suku ke dalam ruas yang sama.**

$$\begin{aligned}
\frac{1+x}{1-x} &\geq 1 && \text{Pertidaksamaan yang diberikan}\\
\frac{1+x}{1-x} - 1 &\geq 0 && \text{Kurangkan 1}\\
\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1-x} &\geq 0 && \text{Samakan Penyebut}\\
\frac{(1+x)-(1-x)}{1-x} &\geq 0 && \text{Operasikan Pecahan}\\
\frac{2x}{1-x} &\geq 0 && \text{Sederhanakan}
\end{aligned}$$

2. **Faktorkan.** Bentuk sudah tidak dapat lagi difaktorkan.

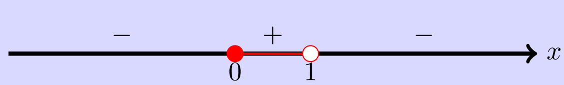
3. **Tentukan Interval**. Faktor dari ruas kiri adalah $2x$ dan $(1-x)$. Pembuat nilai 0 nya adalah $x=0$ dan $x=1$. Sehingga akan membagi daerah-daerah sebagai berikut



4. **Buat tabel atau diagram.** Karena dari langkah sebelumnya terdapat tiga buah daerah, masing-masing dipilih titik uji. Untuk $(-\infty, 0)$ pilih titik uji $x=-1$, untuk $(0,1)$ pilih titik uji $x=0.5$,dan untuk $(1,\infty)$ pilih titik uji $x=2$. Sehingga dapat dibuat tabel sebagai berikut

Selang	Titik Uji	Tanda $2x$	Tanda $1-x$	Tanda $\frac{2x}{1-x}$
$(-\infty, 0)$	-1	$-$	$+$	$-$
$(0, 1)$	0.5	$+$	$+$	$+$
$(1, \infty)$	2	$+$	$-$	$-$

Jika digambar, akan sebagai berikut



5. **Selesaikan.** Karena yang diinginkan adalah pertidaksamaan yang menghasilkan nilai positif atau nol, maka dari langkah sebelumnya dapat diperiksa bahwa solusinya $0 \leq x < 1$ atau dapat ditulis sebagai $[0, 1)$

3.4 Permodelan Masalah dengan Pertidaksamaan

Pertidaksamaan dapat digunakan untuk memodelkan masalah-masalah sehari-hari. Dalam menyelesaikan permodelan masalah pertidaksamaan serupa dengan permodelan masalah persamaan. Berikut merupakan contoh-contoh permodelan yang terkait dengan pertidaksamaan.

Contoh 6. Putra ingin menyewa sepeda motor ketika berada di Kota Yogyakarta. Setelah melakukan pencarian, Putra tertarik dengan dua buah penyewaan motor dengan harga sebagai berikut:

Sewa A:	Harga Sewa 30000 rupiah ditambah sewa per jam 5000 rupiah.
Sewa B:	Harga Sewa 24000 rupiah ditambah sewa per jam 7500 rupiah.

Tentukan berapa jam Putra harus menyewa motor agar Sewa A lebih murah dari B.
Solusi.

1. **Identifikasi Variabel.** Diinginkan adalah banyak jam agar Sewa A lebih murah daripada Sewa B. Sehingga dapat dimisalkan
$$x = \text{banyak jam sewa motor}$$

2. **Terjemahkan kata menjadi aljabar.** Ubah permasalahan dengan menggunakan variabel yang ada, perhatikan tabel berikut

Kata	Dalam Variabel
Banyak jam sewa motor	x
Harga Sewa A	$30000 + 5000x$
Harga Sewa B	$24000 + 7000x$

3. **Bentuk Modelnya.** Karena yang diinginkan harga Sewa A lebih murah daripada Sewa B, maka dapat dibentuk pertidaksamaan
$$\begin{aligned} \text{Harga Sewa } A &< \text{Harga Sewa } B \\ 30000 + 5000x &< 24000 + 7000x \end{aligned}$$

4. **Selesaikan Pertidaksamaan**
$$30000 + 5000x < 24000 + 7000x$$
$$6000 < 2000x$$
$$3 < x$$

Dengan demikian, jika ingin mendapatkan sewa A lebih murah maka Putra harus menyewa lebih dari 3 jam.

Contoh 7. Instruksi dalam botol obat, dianjurkan untuk menyimpan obat pada suhu diantara 5^oC dan 30^oC. Jika galih hanya mempunyai termometer dalam Fahrenheit, tentukan suhu ruangan dalam skala fahrenheit untuk menyimpan obat tersebut.
(Petunjuk: $C = \frac{5}{9}(F - 32)$)
Solusi. Dengan menggunakan persamaan $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, serta pernyataan suhu berada diantara 5^oC dan 30^oC dapat dituliskan sebagai berikut:

$$5 < C < 30$$

Dengan demikian akan diperoleh

$$\begin{array}{rcccll} 5 & < & C & < & 30 & \text{Pertidaksamaan Awal} \\ 5 & < & \frac{5}{9}(F-32) & < & 30 & \text{Substitusi } C = \frac{5}{9}(F-32) \\ \frac{9}{5}\cdot 5 & < & F-32 & < & \frac{9}{5}\cdot 30 & \text{Kalikan dengan } \frac{9}{5} \\ 9 & < & F-32 & < & 54 & \text{Sederhanakan} \\ 9+32 & < & F & < & 54+32 & \text{Tambahkan 32} \\ 41 & < & F & < & 86 & \text{Sederhanakan} \end{array}$$

Sehingga obat harus disimpan dalam suhu skala Fahrenheit $41^oF < F < 86^oF$

3.5 Latihan Soal Pertidaksamaan

1. Selesaikan pertidaksamaan linear berikut.

   (a) $2x \le 7$
   (b) $-4x \ge 10$
   (c) $2x - 5 > 3$
   (d) $3x + 11 < 5$
   (e) $7 - x \ge 5$
   (f) $5 - 3x \le -16$
   (g) $2x + 1 < 0$
   (h) $0 < 5 - 2x$
   (i) $3x + 11 \le 6x + 8$
   (j) $6 - x \ge 2x + 9$
   (k) $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} > 2$
   (l) $\frac{2}{5}x + 1 < \frac{1}{5} - 2x$
   (m) $\frac{1}{3}x + 2 < \frac{1}{6}x - 1$
   (n) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}x \ge \frac{1}{6} + x$
   (o) $4 - 3x \le -1(1 + 8x)$
   (p) $2(7x - 3) \le 12x + 16$
   (q) $2 \le x + 5 < 4$
   (r) $5 \le 3x - 4 \le 14$
   (s) $-1 < 2x - 5 < 7$
   (t) $1 < 3x + 4 \le 16$
   (u) $-2 < 8 - 2x \le -1$
   (v) $-3 \le 3x + 7 \le \frac{1}{2}$
   (w) $\frac{1}{6} \le \frac{2x - 13}{12} \le \frac{2}{3}$
   (x) $-\frac{1}{2} \le \frac{4 - 3x}{5} \le \frac{1}{4}$

2. Tentukan solusi dari pertidaksamaan tak linear berikut.

   (a) $(x + 2)(x - 3) < 0$
   (b) $(x - 5)(x + 4) \ge 0$
   (c) $x(2x + 7) \ge 0$
   (d) $x(2 - 3x) \le 0$
   (e) $x^2 - 3x - 18 \le 0$
   (f) $x^2 + 5x + 6 > 0$
   (g) $2x^2 + x \ge 1$
   (h) $x^2 < x + 2$
   (i) $3x^2 - 3x < 2x^2 + 4$
   (j) $5x^2 + 3x \ge 3x^2 + 2$
   (k) $x^2 > 3(x + 6)$
   (l) $x^2 + 2x > 3$
   (m) $x^2 < 4$
   (n) $x^2 \ge 9$
   (o) $(x + 2)(x - 1)(x - 3) \le 0$
   (p) $(x - 5)(x - 2)(x + 1) > 0$
   (q) $(x - 4)(x + 2)^2 < 0$
   (r) $(x + 3)^2(x + 1) > 0$
   (s) $(x - 2)^2(x - 3)(x + 1) \le 0$
   (t) $x^2(x^2 - 1) \ge 0$
   (u) $x^3 - 4x > 0$
   (v) $16x \le x^3$

3. Tentukan solusi pertidaksamaan yang berkaitan dengan pecahan berikut.

   (a) $\frac{x - 3}{x + 1} \ge 0$
   (b) $\frac{2x + 6}{x - 2} < 0$
   (c) $\frac{4x}{2x + 3} > 2$
   (d) $-2 < \frac{x + 1}{x - 3}$
   (e) $\frac{2x + 1}{x - 5} \le 3$
   (f) $\frac{3 + x}{3 - x} \ge 1$
   (g) $\frac{4}{x} < x$
   (h) $\frac{x}{x + 1} > 3x$
   (i) $1 + \frac{2}{x + 1} \le \frac{2}{x}$
   (j) $\frac{3}{x - 1} - \frac{4}{x} \ge 1$
   (k) $\frac{6}{x - 1} - \frac{6}{x} \ge 1$
   (l) $\frac{x}{2} \ge \frac{5}{x + 1} + 4$
   (m) $\frac{x + 2}{x + 3} < \frac{x - 1}{x - 2}$
   (n) $\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x + 2} \le 0$

4. Dengan menggunakan hubungan derajat Celsius dan Fahrenheit pada Contoh 7. Tentukan pertidaksamaan dalam F, jika $20 \le C \le 32$.

5. Dengan menggunakan hubungan derajat Celsius dan Fahrenheit pada Contoh 7. Tentukan pertidaksamaan dalam C, jika $50 \leq F \leq 95$.

6. Suatu perusahaan telepon selular memberikan dua paket *roaming*.

   Paket A: 25000 ribu rupiah dan 500 per menit.
   Paket B: 5000 ribu rupiah dan 1200 per menit.

   Tentukan berapa banyak menit untuk melakukan *roaming* sehingga Paket B lebih murah daripada Paket A.

7. Suatu maskapai penerbangan menemukan fakta bahwa penerbangan akhir pekan untuk rute Balikpapan-Jakarta akan terjual 120 kursi dengan harga tiket satu juta rupiah. Namun, untuk setiap kenaikan sepuluh ribu rupiah, banyak kursi yang terjual berkurang 1.

   (a) Tentukan suatu persamaan banyak kursi yang terjual, jika harga tiketnya adalah P ribu rupiah.

   (b) Pada suatu waktu, tiket terjual pada pesawat akhir pekan rute Balikpapan-Jakarta diantara 90 dan 115. Tentukan interval harga tiket pesawat tersebut.

8. Gaya gravitasi F yang diberika oleh bumi pada sebuah benda bermassa 100 kg dapat dinyatakan oleh persamaan
$$F = \frac{4.000.000}{d^2}$$
   demgan d jarak dalam kilometer dari pusat inti bumi, dan F diukur dalam Newton (N). Tentukan berapa jarak yang diberikan oleh bumi pada benda sehingga gaya gravitasi bernilai diantara $0,0004\ N$ dan $0,01\ N$.

9. Disekitar api unggun, temperatur T dalam celsius dengan jarak x meter dari pusat api diberikan oleh persamaan
$$T = \frac{600.000}{x^2 + 300}$$
   Tentukan suatu interval jarak dari pusat api sehingga temperatur kurang dari 500^oC.

10. Diberikan suatu persamaan gerak benda dari ketinggian h meter di atas permukaan tanah pada waktu t detik sebagai berikut:
$$h = 128 + 6t - 16t^2$$
    Tentukan suatu selang dimana benda setidaknya berada 32 meter dari atas permukaan tanah.

11. Jika suatu manufaktur menjual x unit barang dari suatu produk, maka pendapatan R dan harga C (dalam dolar) adalah
$$\begin{aligned} R &= 20x \\ C &= 2000 + 8x + 0.0025x^2 \end{aligned}$$
    Gunakan fakta bahwa
$$\text{Keuntungan} = \text{Pendapatan} - \text{Harga}$$
    untuk menentukan berapa banyak unit harus terjual agar manufaktur mengalami keuntungan setidaknya 2400 dolar.

Bab 4

Trigonometri

4.1 Pengukuran Sudut

Sudut merupakan besaran geometri yang mengukur seberapa jauh dua garis atau sisi berpisah. Pengukuran sudut biasanya dinyatakan dalam derajat atau radian. Sudut dalam derajat dinotasikan dengan simbol derajat ($^\circ$), sedangkan sudut dalam radian dinotasikan dengan simbol rad atau tidak perlu ditulis sama sekali. Sudut yang dibentuk oleh satu putaran penuh pada lingkaran bernilai 360 derajat atau 2π radian.

Berbeda dengan matematika yang biasa dipelajari di SMA, pada perkuliahan kalkulus kita akan lebih sering menggunakan sudut dalam satuan radian dibandingkan derajat.

Untuk mengkonversi sudut dari derajat ke radian atau sebaliknya, kita dapat menggunakan rumus berikut:

- Konversi dari derajat ke radian:

$$\text{Besar sudut dalam radian} = \frac{\text{Besar sudut dalam derajat} \times \pi}{180^\circ}$$

- Konversi dari radian ke derajat:

$$\text{Besar sudut dalam derajat} = \frac{\text{Besar sudut dalam radian} \times 180^\circ}{\pi}$$

Perhatikan contoh berikut.

Contoh 1. Konversi sudut 60° menjadi radian.

Solusi.

$$\text{Besar sudut dalam radian} = \frac{60^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3} \text{ radian}$$

Jadi, sudut 60° setara dengan $\frac{\pi}{3}$ radian.

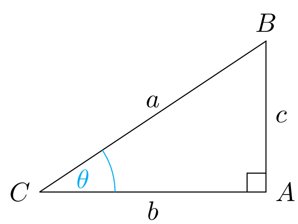
Contoh 2. Konversi sudut $\frac{3\pi}{4}$ radian menjadi derajat.

Solusi.

$$\text{Besar sudut dalam derajat} = \frac{\frac{3\pi}{4} \times 180^\circ}{\pi} = \frac{3 \times 180}{4} = 135^\circ$$

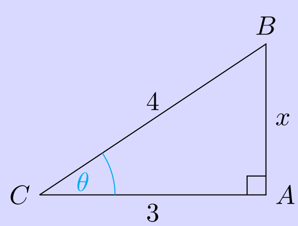
Jadi, sudut $\frac{3\pi}{4}$ radian setara dengan 135°.

4.2 Trigonometri Segitiga Siku-Siku



Perhatikan segitiga siku-siku di atas. Kita definisikan 'rasio-rasio' trigonometri sebagai berikut.

1. $\sin\theta = \frac{c}{a}$
2. $\cos\theta = \frac{b}{a}$
3. $\tan\theta = \frac{c}{b} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
4. $\csc\theta = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sin\theta}$
5. $\sec\theta = \frac{a}{b} = \frac{1}{\cos\theta}$
6. $\cot\theta = \frac{b}{c} = \frac{1}{\tan\theta}$



Contoh. Berdasarkan segitiga di samping, tentukan semua nilai rasio trigonometri terhadap sudut θ.

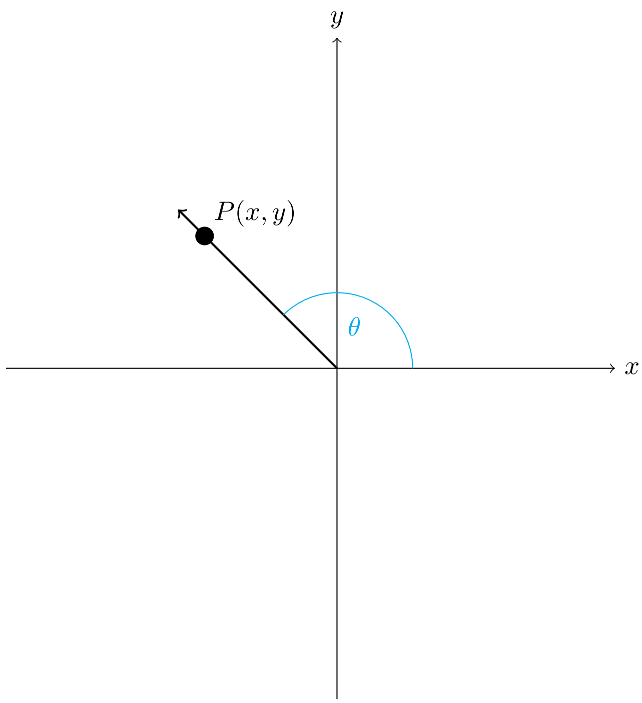
Solusi. Berdasarkan teorema Pythagoras, kita dapatkan bahwa nilai x adalah

$$x = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}.$$

Akibatnya nilai rasio-rasio trigonometri terhadap sudut θ adalah:

1. $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$
2. $\cos\theta = \dfrac{3}{4}$
3. $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$
4. $\csc\theta = \dfrac{4}{\sqrt{7}} = \dfrac{4}{7}\sqrt{7}$
5. $\sec\theta = \dfrac{4}{3}$
6. $\cot\theta = \dfrac{3}{\sqrt{7}} = \dfrac{3}{7}\sqrt{7}$

4.3 Trigonometri Sebagai Fungsi



Misalkan $P(x, y)$ menyatakan posisi suatu titik P di bidang xy dan θ merupakan sudut yang dibentuk oleh hasil putaran dari sumbu x menuju $P(x, y)$ berlawanan arah jarum jam. Jika $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ menyatakan jarak dari titik asal ke titik $P(x, y)$, kita definisikan

- $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$
- $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$
- $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}, \ (x \neq 0)$
- $\csc\theta = \dfrac{r}{y} = \dfrac{1}{\sin\theta}, \ (y \neq 0)$
- $\sec\theta = \dfrac{r}{x} = \dfrac{1}{\cos\theta}, \ (x \neq 0)$
- $\cot\theta = \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{\tan\theta}, \ (y \neq 0)$

Konsep ini bisa kita perluas untuk θ bernilai negatif yang berarti hasil putaran dari sumbu x menuju $P(x, y)$ searah jarum jam dan berlaku

$$\sin\theta = -\sin(-\theta) \text{ dan } \cos\theta = \cos(-\theta).$$

Selanjutnya, kita bisa meninjau nilai dari rasio-rasio trigonometri tersebut untuk beberapa sudut istimewa yang disajikan dalam tabel berikut.

Kuadran	Sudut	sin	cos	tan
I	$0°$	0	1	0
I	$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
I	$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
I	$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
I	$90°$	1	0	tidak terdefinisi
II	$90°$	1	0	tidak terdefinisi
II	$120°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
II	$135°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
II	$150°$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
II	$180°$	0	-1	0
III	$180°$	0	-1	0
III	$210°$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
III	$225°$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
III	$240°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
III	$270°$	-1	0	tidak terdefinisi
IV	$270°$	-1	0	tidak terdefinisi
IV	$300°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
IV	$315°$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
IV	$330°$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
IV	$360°$	0	1	0

Ada beberapa catatan yang perlu diperhatikan sebagai berikut.

1. Anda cukup mengetahui nilai sinus dari sudut istimewa dari $0°$ sampai $90°$.
2. Anda bisa mendapatkan nilai cosinus sudut istimewa dari $0°$ sampai $90°$ dengan memanfaatkan sifat $\cos\theta = \sin(90° - \theta)$. Artinya perubahan nilai cosinus dari $0°$ sampai $90°$ pada dasarnya sama dengan perubahan nilai sinus dari $90°$ sampai dengan $0°$.
3. Anda bisa mendapatkan nilai tangen, cosecan, secan, dan cotangen dari sudut-sudut istimewa tersebut berdasarkan nilai sinus dan cosinus yang sudah diketahui.
4. Perubahan nilai sinus di kuadran II dari $90°$ sampai dengan $180°$ sama dengan perubahan nilai sinus di kuadran I dari $90°$ sampai dengan $0°$. Secara matematis, $\sin\ (90° + \theta) = \sin(90° - \theta)$ dengan $\theta \in [0, 90°]$. Begitupun dengan cosinus, namun di kuadran II, tandanya bernilai negatif.

5. Perubahan nilai sinus di kuadran III sama dengan perubahan nilai sinus di kuadran I namun tandanya bernilai negatif. Perubahan nilai sinus di kuadran IV sama dengan perubahan nilai sinus di kuadran II namun tandanya bernilai negatif.

6. Perubahan nilai cosinus di kuadran III juga sama dengan perubahan nilai cosinus di kuadran I namun tandanya negatif. Perubahan nilai cosinus di kuadran IV juga sama dengan perubahan nilai cosinus di kuadran II namun tandanya positif.

7. Pada kuadran I, semua fungsi trigonometri memiliki tanda positif.

8. Pada kuadran II, hanya fungsi sinus dan cosecan yang memiliki tanda positif.

9. Pada kuadran III, hanya fungsi tangen dan cotangen yang memiliki tanda positif.

10. Pada kuadran IV, hanya fungsi cosinus dan secan yang memiliki tanda positif.

11. Semua fungsi trigonometri merupakan fungsi periodik dengan periode 2π atau $360°$. Khusus untuk fungsi tangen dan cotangen, periodenya adalah π atau $180°$.

12. Untuk sudut bernilai negatif, kita bisa menggunakan sifat

$$\sin\theta = -\sin(-\theta) \text{ dan } \cos\theta = \cos(-\theta).$$

Berikut merupakan contoh bagaimana menentukan nilai suatu fungsi trigonometri di suatu sudut dengan cukup memanfaatkan nilai sinus dan cosinus di kuadran I.

Contoh 1. Tentukan nilai dari $\sin 240°$ dan $\cot 495°$

Solusi. Perhatikan bahwa sudut $240°$ berada di kuadran III dan berlaku $240° = 180° + 60°$. Artinya nilai sinusnya akan sama dengan nilai sinus 60^0 namun bertanda negatif. Jadi $\sin 240° = -\sin 60^0 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Kemudian perhatikan bahwa $495° = 360° + 135°$. Jadi $\cot 495^0 = \cot 135°$ yang berada di kuadran II. Perhatikan bahwa $\sin 135° = \sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan $\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Akibatnya $\cot 135° = \frac{\cos 135°}{\sin 135°} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = -1$.

Contoh 2. Tentukan nilai dari $\sin\frac{16\pi}{3}$ dan $\sec\left(\frac{-\pi}{4}\right)$.

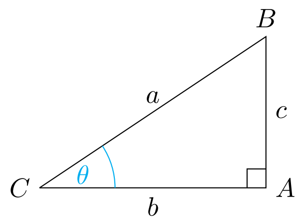
Solusi. Perhatikan bahwa $\frac{16\pi}{3} = 5\pi + \frac{\pi}{3}$ sehingga $\sin\frac{16\pi}{3} = \sin\left(4\pi + \pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{4\pi}{3}$. Tinjau pula bahwa $\frac{4\pi}{3}$ berada di kuadran III dan berlaku $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$. Akibatnya

$$\sin\frac{16\pi}{3} = \sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Perhatikan bahwa

$$\sec\left(\frac{-\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)}=\frac{1}{-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}=-\sqrt{2}.$$

4.4 Identitas Trigonometri



Tinjau segitiga di samping. Teorema Pythagoras memberikan kita bahwa $a^2 = b^2 + c^2$. Perhatikan bahwa

1. $\left(\frac{c}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{a}{a}\right)^2$ sehingga $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$
2. $\left(\frac{c}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{b}\right)^2=\left(\frac{a}{b}\right)^2$ sehingga $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$
3. $\left(\frac{c}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\left(\frac{a}{c}\right)^2$ sehingga $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$.

Ketiga identitas ini juga berlaku untuk semua nilai θ.

Kemudian, ada beberapa identitas lain trigonometri yang perlu diketahui sebagai berikut.

1. Aturan Penjumlahan

$$\begin{aligned}\sin(A+B)&=\sin A\cos B+\cos A\sin B\\ \cos(A+B)&=\cos A\cos B-\sin A\sin B\\ \tan(A+B)&=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\end{aligned}$$

2. Aturan Pengurangan

$$\begin{aligned}\sin(A-B)&=\sin A\cos B-\cos A\sin B\\ \cos(A-B)&=\cos A\cos B+\sin A\sin B\\ \tan(A-B)&=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}\end{aligned}$$

3. Sudut Ganda

$$\begin{aligned}\sin 2A&=2\sin A\cos A\\ \cos 2A&=\cos^2 A-\sin^2 A=2\cos^2 A-1=1-2\sin^2 A\\ \tan 2A&=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\end{aligned}$$

4. Sudut Setengah

$$\begin{aligned}
\sin\frac{A}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \\
\cos\frac{A}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \\
\tan\frac{A}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}
\end{aligned}$$

5. Aturan Penjumlahan Fungsi atau Aturan Perkalian

$$\begin{aligned}
\sin A + \sin B &= 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \\
\sin A - \sin B &= 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \\
\cos A + \cos B &= 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \\
\cos A - \cos B &= -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \\
\tan A + \tan B &= \frac{\sin A + \sin B}{\cos A \cos B} \\
\tan A - \tan B &= \frac{\sin A - \sin B}{\cos A \cos B}
\end{aligned}$$

6. Sudut tiga kali lipat

$$\begin{aligned}
\sin(3A) &= 3\sin A - 4\sin^3 A \\
\cos(3A) &= 4\cos^3 A - 3\cos A \\
\tan(3A) &= \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}
\end{aligned}$$

Contoh 1. Tentukan nilai dari $\sin 15°$

Solusi. Perhatikan bahwa kita dapat menggunakan identitas

$$\sin 15° = \sin(45° - \sin 30°) = \sin 45° \cos 30° - \sin 30° \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Contoh 2. Tentukan nilai dari $\cos 10° \cos 80° - \sin 10° \sin 80°$

Solusi. Perhatikan bahwa

$$\cos 10° \cos 80° - \sin 10° \sin 80° = \cos(10° + 80°) = \cos 90° = 0.$$

4.5 Persamaan Trigonometri

Perhatikan bahwa persamaan trigonometri

1. $$\sin x = \sin \theta$$

   memiliki solusi
   $$x = \theta + k \cdot 360^\circ \text{ atau } x = (180^\circ - \theta) + k \cdot 360^\circ$$
   dengan k bilangan bulat.

2. $$\cos x = \cos \theta$$

   memiliki solusi
   $$x = \theta + k \cdot 360^\circ \text{ atau } x = -\theta + k \cdot 360^\circ$$
   dengan k bilangan bulat.

3. $$\tan x = \tan \theta$$

   memiliki solusi
   $$x = \theta + k \cdot 180^\circ$$
   dengan k bilangan bulat.

Contoh 1. Tentukan solusi dari $\sin \theta = \frac{1}{2}$.

Solusi. Sinus merupakan fungsi berperiode 360° sehingga kita perlu mencari nilai θ yang memenuhi di suatu selang dengan panjang 2π. Perhatikan bahwa $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. Akibatnya, solusinya adalah

$$x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ atau } x = (180^\circ - 30^\circ) + k \cdot 360^\circ = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$$

dengan k bilangan bulat.

Contoh 2. Tentukan solusi dari $tan^2\theta - 3 = 0$.

Solusi. Perhatikan bahwa

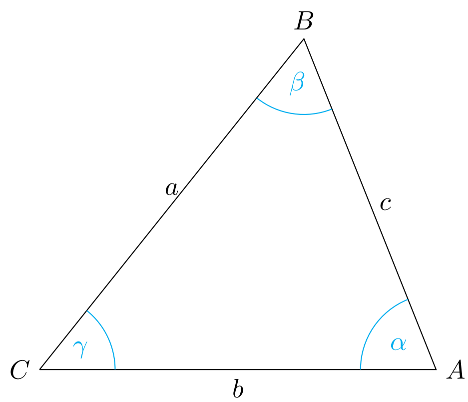
$$\begin{aligned} \tan^2 \theta - 3 &= 0 \\ \tan^2 \theta &= 3 \\ \tan \theta &= \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Karena tangen merupakan fungsi berperiode π sehingga pertama kita perlu mencari nilai yang memenuhi di suatu selang dengan panjang π. Pada interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ terdapat solusi berupa $\frac{\pi}{3}$ atau $-\frac{\pi}{3}$. Akibatnya solusinya adalah

$$x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 180^\circ \text{ atau } x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 180^\circ$$

dengan k bilangan bulat.

4.6 Aturan Sinus dan Cosinus



Aturan Sinus menyatakan bahwa

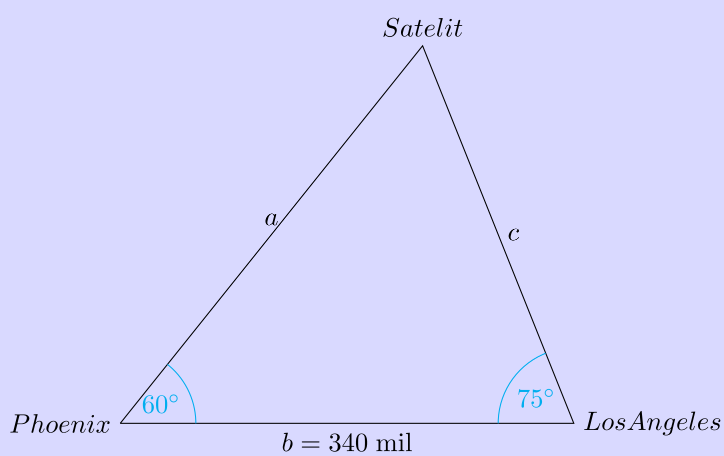
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

Aturan Cosinus menyatakan bahwa

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos\beta$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha$$

Contoh 1. Satelit yang mengorbit bumi melintasi di atas stasiun pengamatan di Phoenix dan Los Angeles, dengan jarak 340 mil di antara keduanya. Pada suatu saat ketika satelit berada di antara dua stasiun ini, sudut elevasinya secara bersamaan diamati menjadi 60° di Phoenix dan 75° di Los Angeles. Berapa jarak satelit dari Los Angeles?

Solusi. Perhatikan gambar berikut.



Misalkan jarak satelit dari Los Angeles dinyatakan oleh nilai c. Perhatikan bahwa sudut yang dibentuk oleh Phoenix, satelit, dan Los Angeles adalah $180° - (75° + 60°) = 45°$. Dengan memanfaatkan aturan sinus, berlaku

$$\begin{aligned}\frac{c}{\sin 60°} &= \frac{b}{\sin 45°} \\ c &= \frac{340}{\sqrt{2}/2}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 170\sqrt{6}\end{aligned}$$

Contoh 2. Sebuah segitiga memiliki panjang sisi-sisi sebagai berikut: $a = 10$ cm, $b = 12$ cm, dan $c = 15$ cm. Hitunglah besar sudut θ antara sisi a dan b.

Solusi. Aturan cosinus untuk segitiga dengan sisi-sisi a, b, dan c serta sudut θ yang merupakan sudut antara sisi a dan b adalah sebagai berikut:

$$\cos\theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Substitusi nilai panjang sisi-sisi segitiga:

$$\cos\theta = \frac{(10 \text{ cm})^2 + (12 \text{ cm})^2 - (15 \text{ cm})^2}{2 \times 10 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}}$$

$$\cos\theta = \frac{100 + 144 - 225}{240} = \frac{19}{240}$$

Jadi, besar sudut θ adalah:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{240}\right) \approx 87.56°$$