MATRIKULASI

MATEMATIKA DASAR

Mifta Nur Farid

ELEKTRO ITK
Institut Teknologi Kalimantan

Pokok Bahasan

1. Pertidaksamaan Linier
   - Interval
   - Penyelesaian Pertidaksamaan
2. Fungsi dan Limit
   - Fungsi
   - Limit
3. Trigonometri
4. Turunan
5. Integral
   - Integral Tak Tentu
   - Integral dengan Substitusi
   - Integral Tentu

Pertidaksamaan

- Pertidaksamaan:

$$5x - 4 > 2x + 3 \tag{1}$$

- Persamaan menggunakan simbol $=$
- Pertidaksamaan menggunakan simbol

Simbol	Arti	Contoh
$>$	Lebih dari	$x > 1$: x lebih dari 1
$\geq$	Lebih dari sama dengan	$x \geq -12$: x lebih dari sama dengan -12
$<$	Kurang dari	$x < 5$: x kurang dari 5
$\leq$	Kurang dari sama dengan	$x < 13$: x kurang dari sama dengan 13

Pertidaksamaan

- Penyelesaian persamaan

$$\begin{aligned} 5x - 4 &= 2x + 3 \\ 5x - 2x &= 3 + 4 \\ 3x &= 7 \\ x &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

- Penyelesaian pertidaksamaan: rentang atau nilai variabel yang tidak diketahui yang memenuhi pertidaksamaan

Interval

- Himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan dinyatakan dalam notasi himpunan atau bentuk selang atau *interval*
- Jenis-jenis selang
    1. Selang berhingga dan tertutup
    2. Selang berhingga dan terbuka
    3. Selang berhingga dan setengah terbuka atau setengah tertutup
    4. Selang tak hingga dan tertutup
    5. Selang tak hingga dan terbuka
    6. Selang tak hingga, terbuka, dan tertutup

Selang berhingga dan tertutup

- Notasi: $[a, b]$
- Dinyatakan dalam notasi himpunan:

$$\{x : a \leq x \leq b\} \tag{2}$$

- Grafik selang:

Gambar 1: Grafik selang $[a, b]$

Selang berhingga dan terbuka

- Notasi: (a, b)
- Dinyatakan dalam notasi himpunan:

$$\{x : a < x < b\} \tag{3}$$

- Grafik selang:

Gambar 2: Grafik selang (a, b)

Selang berhingga dan setengah terbuka atau setengah tertutup

- Notasi: $(a, b]$ atau $[a, b)$
- Notasi himpunan:

  Jika notasi $(a, b]$, maka notasi himpunan $\{x : a < x \leq b\}$
  Jika notasi $[a, b)$, maka notasi himpunan $\{x : a \leq x < b\}$

- Grafik selang:

Gambar 3: Grafik selang $(a, b]$

Gambar 4: Grafik selang $[a, b)$

Selang tak hingga dan tertutup

- Notasi: $[a, +\infty)$ atau $(-\infty, b]$
- Notasi himpunan:

$$\text{Jika notasi } [a, +\infty)\text{, maka notasi himpunan } \{x : x \geq a\}$$
$$\text{Jika notasi } (-\infty, b]\text{, maka notasi himpunan } \{x : x \leq b\}$$

- Grafik selang:

Gambar 5: Grafik selang $[a, +\infty)$

Gambar 6: Grafik selang $(-\infty, b]$

Selang tak hingga dan terbuka

- Notasi: $(a, +\infty)$ atau $(-\infty, b)$
- Notasi himpunan:

$$\text{Jika notasi } (a, +\infty), \text{ maka notasi himpunan } \{x : x > a\}$$
$$\text{Jika notasi } (-\infty, b), \text{ maka notasi himpunan } \{x : x < b\}$$

- Grafik selang:

Gambar 7: Grafik selang $(a, +\infty)$

Gambar 8: Grafik selang $(-\infty, b)$

Selang tak hingga

- Notasi: $(-\infty, +\infty)$
- Notasi himpunan:

$$\{x : x \in \mathcal{R}\}$$

- Grafik selang:

Gambar 9: Grafik selang $(-\infty, +\infty)$

Penyelesaian pertidaksamaan

Hal-hal yang perlu diperhatikan dalam menyelesaikan suatu pertidaksamaan

1. Prosedur menyelesaikan pertidaksamaan adalah mengubah pertidaksamaan satu langkah demi satu langkah hingga diperoleh himpunan penyelesaiannya jelas.
2. Dapat dilakukan operasi-operasi tertentu (tambah, kurang, kali, bagi, akar, pangkat) pada kedua ruas pada suatu pertidaksamaan. Perlakuan pada kedua ruas harus sama, contohnya:
    2.1 Kedua ruas ditambah atau dikurangi dengan suatu bilangan;
    2.2 Kedua ruas dikali atau dibagi dengan suatu bilangan positif;
    2.3 Jika kedua ruas dikali atau dibagi dengan bilangan negatif, tanda pertidaksamaan harus berbalik arah.

Contoh 1

Selesaikan pertidaksamaan

$$-5x - 10 < 15$$

dan tunjukkan garis bilangan himpunan penyelesaiannya.

Jawaban Contoh 1

$$
\begin{aligned}
-5x - 10 &< 15 \\
-5x - 10 + 10 &< 15 + 10 && \text{(kedua ruas ditambah 10)} \\
-5x &< 25 \\
\frac{-5x}{-5} &> \frac{25}{-5} && \text{(kedua ruas dikali dengan } -\tfrac{1}{5}\text{)} \\
x &> -5
\end{aligned}
$$

Jawaban Contoh 1

- Himpunan penyelesaiannya adalah $\{x : x > -5\}$, atau
- Dalam bentuk selang $(-5, +\infty)$.
- Berikut $(-5, +\infty)$ diinterpretasikan dalam bentuk garis bilangan.

Gambar 10: Grafik selang $(-5, +\infty)$

Contoh 2

Selesaikan pertidaksamaan

$$-5 \leq 2x + 6 < 4$$

dan tunjukkan garis bilangan himpunan penyelesaiannya.

Jawaban Contoh 2

$$
\begin{array}{rclll}
-5 & \leq & 2x+6 & < & 4 \\
-5-6 & \leq & 2x+6-6 & < & 4-6 \quad \text{(dikurangin 6)} \\
-11 & \leq & 2x & < & -2 \\
-11/2 & \leq & 2x/2 & < & -2/2 \quad \text{(dibagi 2 atau dikali } \tfrac{1}{2}\text{)} \\
-11/2 & \leq & x & < & -1
\end{array}
$$

Jawaban Contoh 2

Himpunan penyelesaiannya adalah

$$\left\{x : -\frac{11}{2} \leq x < -1\right\}$$

atau ditulis dalam bentuk selang $\left[-\frac{11}{2}, -1\right)$ atau dengan garis bilangan

Gambar 11: Grafik selang $\left[-\frac{11}{2}, -1\right)$

Contoh 3

Selesaikan pertidaksamaan

$$x^2 - x < 6$$

Jawaban Contoh 3

$$
\begin{aligned}
x^2 - x &< 6 \\
x^2 - x - 6 &< 6 - 6 && \text{(dikurangi 6)} \\
(x+2)(x-3) &< 0 && \text{(difaktorkan)}
\end{aligned}
$$

- Dapat dilihat bahwa $x = -2$ dan $x = 3$ membagi garis bilangan kedalam tiga selang terbuka yaitu $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$, dan $(3, +\infty)$.
- Selanjutnya kita harus mengecek setiap tanda diselang dengan cara diambil satu titik yang berada di tiga selang tersebut.

Jawaban Contoh 3

- $x = -3$ mewakili titik yang berada pada selang $(-\infty, -2)$
- $x = 0$ mewakili titik yang berada pada selang $(-2, 3)$
- $x = 5$ mewakili titik yang berada pada selang $(3, +\infty)$

Test Point	**Tanda**		
(x)	$(x+2)$	$(x-3)$	$(x+2)(x-3)$
-3	$-$	$-$	$+$
0	$+$	$-$	$-$
5	$+$	$+$	$+$

- Daerah yang memenuhi $(x+2)(x-3) < 0$ adalah selang $(-2, 3)$

Jawaban Contoh 3

Himpunan penyelesaiannya adalah

$$\{x : -2 < x < 3\}$$

atau dalam bentuk selang $(-2, 3)$ atau dengan garis bilangan

Gambar 12: Grafik selang $(-2, 3)$ dan tanda di masing-masing daerahnya

Contoh 4

Selesaikan pertidaksamaan

$$3x^2 - x - 2 \geq 0$$

Jawaban Contoh 4

$$
\begin{aligned}
3x^2 - x - 2 &\geq 0 \\
(x-1)(3x+2) &\geq 0 && \text{(difaktorkan)}
\end{aligned}
$$

- Dapat dilihat bahwa $x = -\frac{2}{3}$ dan $x = 1$ membagi garis bilangan ke dalam tiga selang tertutup yaitu $(-\infty, -\frac{2}{3}]$, $[-\frac{2}{3}, 1]$, dan $[1, +\infty)$.

Jawaban Contoh 4

- Uji tanda

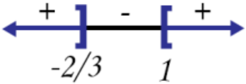
Test Point (x)	Tanda		
	$(x-1)$	$(3x+2)$	$(x-1)(3x+2)$
-1	$-$	$-$	$+$
0	$-$	$+$	$-$
2	$+$	$+$	$+$

Jawaban Contoh 4

Himpunan penyelesaiannya adalah

$$\{x : x \leq -\frac{2}{3} \cup x \geq 1\}$$

atau dalam bentuk selang $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup [1, +\infty)$ atau dengan garis bilangan



Gambar 13: Grafik selang $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup [1, +\infty)$ dan tanda di masing-masing daerahnya

Contoh 5

Selesaikan pertidaksamaan

$$\frac{x-1}{x+2} \geq 0$$

Jawaban Contoh 5

- Perhatikan masing-masing persamaan yang menjadi pembilang dan penyebut saat sama dengan nol.
  - Nilai $x - 1 = 0$ jika $x = 1$
  - Nilai $x + 2 = 0$ jika $x = -2$
- $x = 1$ dan $x = -2$ menghasilkan 3 selang yaitu $(-\infty, -2)$, $(-2, 1]$, dan $[1, +\infty)$
  - Selang $(-\infty, -2)$ tidak tertutup di $x = -2$ karena apabila disubstitusikan $x = -2$ ke persamaan $\frac{x-1}{x+2}$ akan membuat penyebutnya bernilai nol.
- Selanjutnya dilakukan uji tanda

Jawaban Contoh 5

- Uji tanda

Test Point	Tanda		
(x)	$(x+2)$	$(x-1)$	$\frac{x-1}{x+2}$
-3	$-$	$-$	$+$
0	$+$	$-$	$-$
2	$+$	$+$	$+$

Jawaban Contoh 5

Himpunan penyelesaiannya adalah

$$\{x : x \leq -2 \cup x \geq 1\}$$

atau dalam bentuk selang $(-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$ atau dengan garis bilangan

Gambar 14: Grafik selang $(-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$ dan tanda di masing-masing daerahnya

Latihan Soal

Selesaikan pertidaksamaan dibawah ini dan sketsakan himpunan penyelesaiannya pada garis koordinat:

1. $3x - 5 > -7x - 4$
2. $2(x+3) < x + 1$
3. $1 \leq 2 - 3x < 8$
4. $2x^2 + 3x - 2 \leq 0$
5. $\frac{2}{x-5} \geq \frac{1}{x+1}$

Fungsi

- Sebuah fungsi f adalah suatu aturan korespondensi yang menghubungkan setiap objek x dalam satu himpunan yang disebut daerah asal/*domain*, dengan sebuah nilai tunggal $f(x)$ dari suatu himpunan kedua (kodomain).
- Himpunan nilai yang diperoleh dari $f(x)$ disebut daerah hasil/*range*.
- Umumnya, fungsi dinotasikan sebagai $y = f(x)$ dengan x adalah peubah (variabel) bebas dari f yang merupakan domain, sedangkan y merupakan peubah (variabel) tak bebas dari y.
  - Berarti nilai y yang dihasilkan bergantung pada nilai x yang diberikan.
- Nilai-nilai x merupakan anggota dari domain fungsi f dan y merupakan anggota dari *range* fungsi f.

Fungsi

- Jika didefinisikan fungsi $y = f(x)$, maka domain (daerah asal) dari f merupakan himpunan nilai – nilai dari himpunan bebas (variabel) x yang dinotasikan sebagai D_f.
- Sedangkan *range* merupakan semua nilai $f(x)$ untuk setiap x pada domain f. *Range* dari fungsi f dinotasikan sebagai R_f .

Fungsi

- Diberikan dua buah fungsi f dan g, maka rumus-rumus untuk jumlah $f+g$, selisih $f-g$, hasil kali $f \cdot g$, dan hasil bagi $\frac{f}{g}$ didefinisikan sebagai

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x)+g(x) \\
(f-g)(x) &= f(x)-g(x) \\
(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}, \; g(x) \neq 0
\end{aligned}
$$

- Komposisi fungsi f dan g dinyatakan sebagai berikut

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

atau dinotasikan $f \circ g$

Contoh 1

Diberikan suatu fungsi $f(x) = x^2 - 2x$, tentukan dan sederhanakan nilai dari

1. $f(x)$
2. $f(4 + h)$
3. $\frac{f(4+h) - f(4)}{h}$

Jawaban Contoh 1

1. $f(4) = (4)^2 - 2(4) = 8$
2. $f(4+h) = (4+h)^2 - 2(4+h) = 16+8h+h^2-8-2h = 8+6h+h^2$
3. $\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \frac{8+6h+h^2-8}{h} = \frac{6h+h^2}{h} = 6+h$

Contoh 2

Selidiki domain dan *range* dari $g(x) = 1 + \sqrt{x}$

Jawaban Contoh 2

Domain dari fungsi $g(x)$ adalah $[0, +\infty)$. Ketika nilai - nilai pada domain $[0, +\infty)$ disubstitusikan ke dalam $1 + \sqrt{x}$, maka diperoleh range dari g yaitu $[1, +\infty)$.

Soal Latihan

1. Diberikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 8, & \text{jika } x \leq 3 \\ \sqrt{x-3}, & \text{jika } x > 3 \end{cases}$$

   1.1 $f(4)$
   1.2 $f(\frac{1}{2})$
   1.3 $f(3 - t^2)$

2. Selidiki domain dan range dari fungsi - fungsi berikut:
   2.1 $f(x) = \frac{1}{x}$
   2.2 $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$
   2.3 $h(x) = \sqrt{2x-1}$
   2.4 $i(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}$

Soal Latihan

3. Diberikan fungsi $f(x) = x - 1$. Tentukan rumus fungsi dan domain dari:
    3.1 $f(2x) + f(\sqrt{x})$
    3.2 $f(x^2) - f(-x)$
    3.3 $f(1-t) + 2f^2(t)$
4. Selidiki komposisi fungsi f terhadap g dan domainnya jika diberikan fungsi f dan g sebagai berikut:
    4.1 $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = \frac{1}{x}$
    4.2 $f(x) = x^2 + x - 1$ dan $g(x) = 1 - \sqrt{x}$

Limit

- Limit fungsi adalah perilaku suatu fungsi mendekati suatu nilai tertentu.
- Limit terbagi menjadi dua yaitu limit kiri dan limit kanan dari suatu fungsi.
- Limit kiri dari suatu fungsi $f(x)$ mendekati suatu nilai x_0 dinotasikan sebagai

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

- Limit kanan dari suatu fungsi $f(x)$ mendekati suatu nilai x_0 dinotasikan sebagai

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Limit

- Limit dua sisi dari suatu fungsi $f(x)$ dinotasikan dengan

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

- Jika nilai dari limit kanan dan limit kiri dari suatu fungsi f sama, maka dapat disimpulkan bahwa fungsi f memiliki limit dan nilai limitnya adalah L.
- **Perlu diperhatikan dalam mengerjakan soal limit, nilai fungsi $f(x)$ harus terdefinisi di $x = x_0$ atau $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq \frac{0}{0}$**
- Apabila bertemu dengan fungsi yang seperti ini, maka fungsi $f(x)$ harus diserderhanakan terlebih dahulu untuk mendapatkan nilai limitnya. Salah satu caranya adalah dengan pemfaktoran.

Aturan dasar limit meliputi

$$\lim_{x \to c} k = k$$
$$\lim_{x \to -\infty} k = k$$
$$\lim_{x \to +\infty} k = k$$
$$\lim_{x \to c} x = c$$
$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

dengan k dan c konstanta.

Limit

Jika didefinisikan dua buah fungsi, f dan g yang memiliki limit masing-masing, yaitu L_1 dan L_2 maka:

- $\lim[f(x) + g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x) = L_1 + L_2$
- $\lim[f(x) - g(x)] = \lim f(x) - \lim g(x) = L_1 - L_2$
- $\lim[f(x)g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = L_1 L_2$
- $\lim \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, jika $L_2 \neq 0$
- $\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$ untuk $L_1 \geq 0$ jika n genap
- $\lim\,[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$
- $\lim kf(x) = \lim k \cdot \lim f(x) = k \cdot \lim f(x)$

Notasi lim dapat menyatakan $\lim\limits_{x\to c}$, $\lim\limits_{x\to c^-}$, $\lim\limits_{x\to c^+}$, $\lim\limits_{x\to -\infty}$, dan $\lim\limits_{x\to +\infty}$

Contoh 3

Tentukan

$$\lim_{x \to 2} \left(x^3 - 2\sqrt{x} - 3 \right)$$

Jawaban Contoh 3

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\left(x^3 - 2\sqrt{x} - 3\right) &= \lim_{x\to 2} x^3 - \lim_{x\to 2} 2\sqrt{x} - \lim_{x\to 2} 3 \\
&= \left[\lim_{x\to 2} x^3\right] - 2\lim_{x\to 2}\sqrt{x} - \lim_{x\to 2} 3 \\
&= \left[\lim_{x\to 2} x^3\right] - 2\sqrt{\lim_{x\to 2} x} - \lim_{x\to 2} 3 \\
&= [2]^3 - 2\sqrt{2} - 3 \\
&= 5 - 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Contoh 4

Tentukan

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} \right)$$

Jawaban Contoh 4

Dalam dilihat bahwa $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} \right) = \frac{0}{0}$. Oleh karena itu, fungsi rasional tersebut harus disederhanakan dengan metode pemfaktoran untuk mengetahui nilai limitnya

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} \right) &= \lim_{x \to 3} \left(\frac{(x-3)(x-2)}{x-3} \right) \\
&= \lim_{x \to 3} (x - 2) \\
&= 3 - 2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Soal Latihan

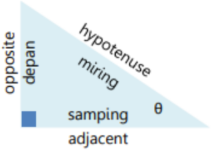
1. Tentukan nilai limit dari:
   1.1 $\lim_{x \to 3} \left(x^2 - 20\right)$
   1.2 $\lim_{x \to -1} \left(4x^2 + 3x + 1\right)$
   1.3 $\lim_{x \to -2} \left(\frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 4}\right)$
   1.4 $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 4}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}\right)$
   1.5 $\lim_{x \to 2} \left(\frac{3 - \sqrt{x + 7}}{x^2 + x - 6}\right)$
2. Diketahui $f(x) = \begin{cases} x^2; & x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 1 + x, & x > 1 \end{cases}$, tentukan apakah $\lim_{x \to 0} f(x)$ dan $\lim_{x \to 1} f(x)$ (jika ada)!

Trigonometri

- Trigonometri berasal dari bahasa Yunani.
- Trigonometri berasal dari dua kata, yaitu *trigono* berarti segitiga dan *metri* berarti ilmu ukur.
- Trigonometri adalah ilmu matematika yang mempelajari tentang segitiga siku-siku.
- Pada segitiga siku-siku berlaku teorema Phytagoras dan nilai perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku.
- Nilai perbandingan trigonometri adalah nilai perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku.

Trigonometri

- Macam definisi dari nilai perbandingan trigonometri:

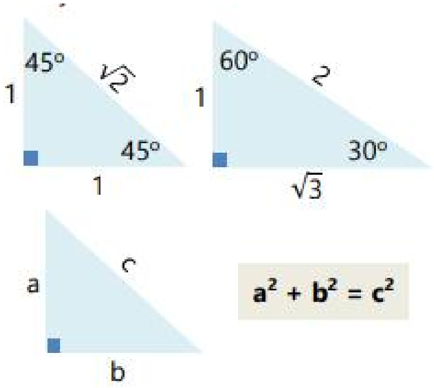


$\sin\theta = \dfrac{depan}{miring}$	$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{miring}{depan}$
$\cos\theta = \dfrac{samping}{miring}$	$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{miring}{samping}$
$\tan\theta = \dfrac{depan}{samping} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{depan}{samping} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

ELEKTRO ITK itk Institut Teknologi Kalimantan

Trigonometri

- Perbandingan nilai sisi-sisi segitiga istimewa dan sudutnya antara lain:



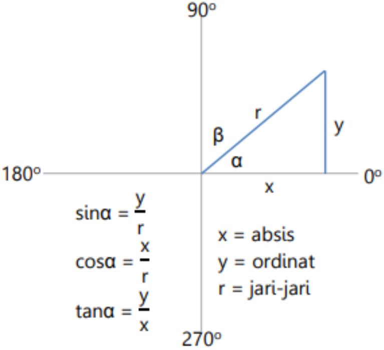
Trigonometri

- Nilai perbandingan trigonometri pada sudutsudut istimewa:

θ°	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\mathrm{cosec}\,\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
0°	0	1	0	∞	1	∞
30° $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60° $\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	∞	1	∞	0

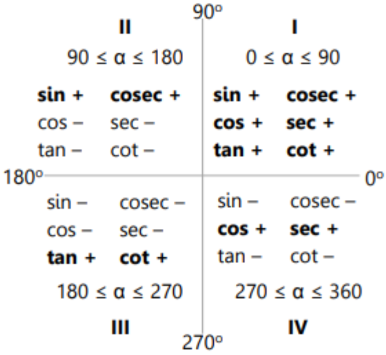
Trigonometri

- Nilai perbandingan trigonometri suatu sudut yang besarnya $< 90°$ dapat dijelaskan melalui kuadran koordinat kartesius.



Trigonometri

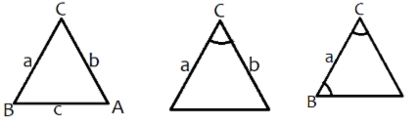
- Tanda nilai perbandingan trigonometri berbeda di masing-masing kuadrannya.



- Perbandingan trigonometri sudut berelasi sebagai berikut

1. Sudut berelasi $(90^\circ - \theta)$
   a. $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$
   b. $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$
   c. $\tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$
2. Sudut berelasi $(180^\circ - \theta)$
   a. $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$
   b. $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$
   c. $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$
3. Sudut berelasi $(270^\circ - \theta)$
   a. $\sin(270^\circ - \theta) = -\cos\theta$
   b. $\cos(270^\circ - \theta) = -\sin\theta$
   c. $\tan(270^\circ - \theta) = \cot\theta$
4. Sudut berelasi $(-\theta)$
   a. $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
   b. $\cos(-\theta) = \cos\theta$
   c. $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

Trigonometri



gambar 5 gambar 6 gambar 7

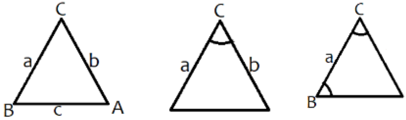
- Aturan sinus : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ (lihat gambar 5)
- Aturan cosinus:

I. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

II. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$

III. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

Trigonometri



gambar 5 gambar 6 gambar 7

- Luas segitiga

  a) $L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, s = ½(a+b+c)$: gambar 5

  b) $L = ½\, a \cdot b \sin C$: gambar 6

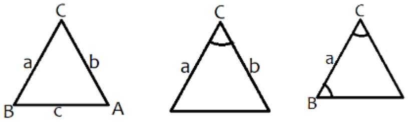
  c) $L = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin(B+C)}$: gambar 7

- Jumlah dan Selisih Dua Sudut

  a. $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$

  b. $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

  c. $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A - \tan B}$



gambar 5 gambar 6 gambar 7

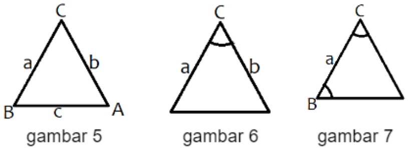
- Perkalian Sinus dan Kosinus

a. $2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$

b. $2 \cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$

c. $2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$

d. $-2 \sin A \sin B = \cos(A + B) - \cos(A - B)$



- Penjumlahan dan Pengurangan Sinus, Kosinus dan Tangen

a. $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cdot\cos\frac{1}{2}(A-B)$

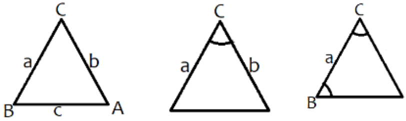
b. $\sin A - \sin B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cdot\sin\frac{1}{2}(A-B)$

c. $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cdot\cos\frac{1}{2}(A-B)$

d. $\cos A - \cos B = -2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cdot\sin\frac{1}{2}(A-B)$

e. $\tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}$

f. $\tan A - \tan B = \frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}$



gambar 5 gambar 6 gambar 7

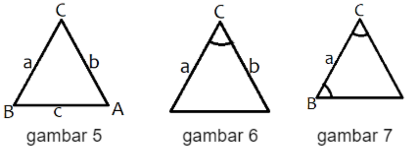
- Sudut Rangkap

a. $\sin 2A = 2 \sin A \cdot \cos A$

b. $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$

c. $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - A}$

d. $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$



- Persamaan Trigonometri

a. $\sin x^\circ = \sin p$

$x_1 = p + 360k$

$x_2 = (180 - p) + 360k$

b. $\cos x^\circ = \cos p$

$x_{1,2} = \pm p + 360k$

c. $\tan x^\circ = \tan p$

$x_1 = p + 180k$

$x_2 = (180 + p) + 180k$

d. Bentuk: $A\ trig^2 + B\ trig + C = 0$ diselesaikan seperti menyelesaikan persamaan kuadrat

Soal Latihan

1. Dalam suatu lingkaran yang berjari-jari 8 cm, dibuat segi-8 beraturan. Panjang sisi segi-8 tersebut adalah ... cm
2. Jika luas segi delapan beraturan adalah $200\sqrt{2}$ cm^2 , maka panjang jari-jari lingkaran luarnya adalah ... cm
3. Diketahui segitiga ABC dengan panjang sisi AB $=$ 3 cm, AC $=$ 4 cm, dan $\angle$CAB $=$ 60°. CD adalah tinggi segitiga ABC. Panjang CD $=$ ... cm
4. Himpunan penyelesaian dari persamaan $\cos(x+210)^\circ + \cos(x-210)^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ untuk $0 \leq x \leq 360^\circ$ adalah ...
5. Pada segitiga ABC lancip, diketahui $\cos A = \frac{4}{5}$ dan $\sin B = \frac{12}{13}$, maka $\sin C = \ldots$

Dimisalkan fungsi f terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat c. Turunan pertama dari fungsi f di titik c ditulis $f'(c)$ didefinisikan sebagai:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \tag{4}$$

jika limitnya ada.

Turunan

Apabila dilakukan penggantian $x = c + h$, jika $x \to c \leftrightarrow h \to 0$ dan $x - c = h$, turunan fungsi f di c dapat dituliskan dalam bentuk:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \tag{5}$$

Turunan

- Jika suatu fungsi konstan, misal $f(x) = k$ untuk sembarang bilangan rill k, maka
$$\frac{d}{dx}[k] = 0 \tag{6}$$
- Jika n suatu bilangan bulat positif, maka:
$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1} \tag{7}$$
- Jika f fungsi yang dapat diturunkan di x dan k sebarang bilangan rill, maka kf juga dapat diturunkan di x, yaitu:
$$\frac{d}{dx}[kf(x)] = k\frac{d}{dx}[f(x)] \tag{8}$$

Turunan

- Jika f dan g fungsi yang dapat diturunkan di x, maka $f+g$ dan $f-g$ juga dapat diturunkan di x dan

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)] \tag{9}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)] \tag{10}$$

- Jika g dan g dapat diturunkan di x, maka

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + \frac{d}{dx}[f(x)]g(x) \tag{11}$$

Turunan

- Jika f dan g dua fungsi yang dapat diturunkan di x, dan $g(x) \neq 0$ maka $\frac{f}{g}$ juga dapat diturunkan di x, dan

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\frac{d}{dx}[f(x)]g(x) + f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2} \tag{12}$$

- Untuk turunan fungsi trigonometri sebagai berikut

$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$	$\frac{d}{dx}[\operatorname{cosec} x] = -\operatorname{cosec} x \cot x$
$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$	$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$
$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	$\frac{d}{dx}[\tan x] = -\operatorname{cosec}^2 x$

Contoh 1

Menggunakan definisi turunan, tentukan turunan terhadap x dari $f(x) = \sqrt{x}$

Contoh 2

Dapatkan turunan dari fungsi $f(x) = 2x(x^2 + 1)$

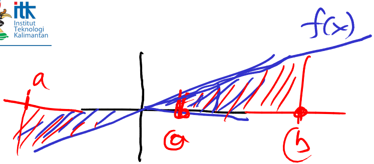
Contoh 3

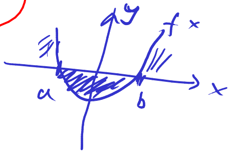
Dapatkan turunan dari fungsi $f(x) = \sin 5x$

Soal Latihan

1. Carilah turunan fungsi berikut menggunakan definisi turunan
   a. $f(x) = x^2 + 5x$
   a. $f(x) = \sqrt{x} + 1$
   c. $f(x) = \sin x$
2. Tentukan $f'(x)$ dan $f'(1)$ jika
   a. $f(x) = \sqrt{5}$
   b. $f(x) = 5\sqrt{x}$
   c. $f(x) = \left(2x^2 + 5\right)^3$
   d. $f(x) = \frac{3x^3 - 5x}{x^2}$
   e. $f(x) = x^2 \tan(2x + 1)$

Integral Tak Tentu





Secara geometri integral merupakan suatu luasan daerah pada kurva tertentu. Jika diberikan suatu fungsi $f(x)$ yang kontinu tak negatif pada interval $[a, b]$, maka yang dimaksud dengan

$$\int_a^b f(x)dx \tag{13}$$

adalah luasan dibawah kurva $f(x)$.

$g(x) = x + 3$.
$f(x) = x + 2$
$\frac{d}{dx} f(x) = 1$
$\frac{d}{dx} g(x) = 1$.

$\int 1 \, dx \to x + C$

Integral Tak Tentu

Integral juga disebut sebagai **anti turunan**. Beberapa contoh integral tak tentu sebagai anti turunan dapat dilihat pada tabel berikut

Turunan	Anti Turunan
$\frac{d}{dx}[x] = 1$	$\int 1 dx = x + C$
$\frac{d}{dx}[x^{n+1}] = x^n$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
$\frac{d}{dx}[-\cos x] = \sin x$	$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx}[-\cot x] = \operatorname{cosec} x$	$\int \operatorname{cosec} x \, dx = -\cot x + C$
$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$
$\frac{d}{dx}[-\operatorname{cosec} x] = \operatorname{cosec} x \cot x$	$\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{(n+1)} + c$

Secara umum integral tak tentu dapat ditulis

$$\int ax^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C \tag{14}$$

Integral Tak Tentu

Integral tak tentu mempunyai sifat – sifat sebagai berikut:

1. Pengali konstan dapat dikeluarkan dari operasi integral

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \tag{15}$$

2. Integral dari penjumlahan dan pengurangan fungsi integran dapat dinyatakan sebagai jumlahan atau pengurangan dari masing-masing integral fungsi yang berkaitan

$$\int [f(x) \pm g(x)] = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \tag{16}$$

Integral dengan Substitusi

Selain mengintegralkan secara langsung, terdapat beberapa teknik pengintegralan, salah satunya integral dengan substitusi. Berikut langkah – langkah pengerjaan integral dengan teknik substitusi:

1. Tentukan suatu fungsi tertentu sebagai u, yaitu $u = g(x)$.
2. Hitung $\frac{du}{dx} = g'(x)$.
3. Substitusi $u = g(x)$ dan $du = g'(x)dx$. Perhatikan bahwa, pada step ini integrase harus dalam suku-suku u, sehingga tidak ada suku-suku variabel x.
4. Selesaikan integral tersebut (masih dalam suku-suku u).
5. Ganti kembali u dengan $g(x)$, sehingga diperoleh hasil dengan variabel x

Contoh 1

$$\int ax^n\,dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$$

Tentukan

$$\int 5x^{\frac{3}{5}}\,dx = \frac{5}{\frac{3}{5}+1}x^{\frac{3}{5}+1} + C$$

$$\frac{5}{5} \qquad \frac{3}{5}+\frac{5}{5} = \frac{3+5}{5}$$

$$= \frac{5}{\frac{3+5}{5}}x^{\frac{3+5}{5}} + C$$

$$= \frac{5}{\frac{8}{5}}x^{\frac{8}{5}} + C$$

$$= 5 \cdot \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + C$$

$$\frac{25}{8}x^{\frac{8}{5}} + C \quad //$$

Contoh 2

$\int f(x)\,dx$

Tentukan

$$\int \underbrace{(2x^2+3)}_{u}{}^{25} 4x\,dx$$

$2x^2+3 = u$ ✓

$4x = \frac{du}{dx}$

$\frac{du}{4x} = dx$ ✓

$$= \int u^{25} \cdot \cancel{4x} \cdot \frac{du}{\cancel{4x}}$$

$$= \int u^{25}\,du$$

$$= \frac{1}{25+1} u^{25+1} + C$$

$$= \frac{1}{26} u^{26} + C$$

$$= \frac{1}{26}(2x^2+3)^{26} + C$$

Integral Tentu

$\int f(x)\,dx = F(x)$

- Integral tertentu merupakan suatu integral yang memiliki batas integrasi, yaitu batas bawah, yang disimbolkan dengan a dan batas atas, yang disimbolkan dengan b. Jika suatu integral memiliki batas, maka hasil integral tersebut adalah tunggal.
- Misalkan $F(x)$ merupakan suatu fungsi anti turunan dari fungsi $f(x)$ pada interval $[a, b]$, maka

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{17}$$

Integral Tentu

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Berikut sifat – sifat dari integral tertentu:

$F(a) - F(a) = 0$

1. Jika $a = b$ maka

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0 \tag{18}$$

2. Jika f adalah fungsi yang terintegral pada interval $[a, b]$, maka

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \tag{19}$$

$= -\left(F(a) - F(b)\right)$

$= F(b) - F(a).$

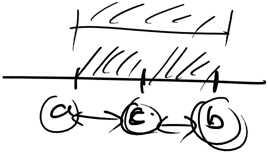
Integral Tentu

3. Jika $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan fungsi yang dapat diintegralkan pada interval $[a, b]$ dan k adalah suatu konstanta, maka

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad (20)$$

$$\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \qquad (21)$$

Integral Tentu



4. Jika $f(x)$ terintegralkan pada interval $[a, b]$, dimana c adalah suatu titik diantara interval $[a, b]$, maka

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{22}$$

5. Integral tertentu tidak bergantung pada variabel yang digunakan

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du \tag{23}$$

$$= \int_a^b f(x)dx$$

Integral Tentu

$[b, c]$

$f(x) > g(x)$

$\int_b^c f(x)\,dx > \int_b^c f(x)\,dx$

6. Jika $f(x)$ dan $g(x)$ terintegralkan pada interval $[a, b]$ dan $f(x) \leq g(x)$ pada $x \in [a, b]$, maka

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \tag{24}$$

Contoh 3

π — $\pi/2$ — 0

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

s c

c -s

Tentukan

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\underline{\sin x} + \underline{\cos x})dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx + \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$$

$$= -\cos x \Big|_0^{\pi/2} + \sin x \Big|_0^{\pi/2}$$

$$\left[-\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0))\right] +$$

$$\left[\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \sin(0)\right]$$

$$= [0+1] + [1-0]$$

$$= 1+1 = 2$$

Contoh 4

$f(x) = x+1 \leftarrow x \geq 0$

$f(x) = 2x \leftarrow < 0$

0

Diberikan

a c b

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ 2x, & x < 0 \end{cases}$$

Hitunglah $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-1}^{0} f(x)\,dx}_{f(x) = 2x} + \underbrace{\int_{0}^{1} f(x)\,dx}_{f(x) = x+1}$$

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx} = \underbrace{\int_{-1}^{0} f(x)\,dx}_{f(x)=2x} + \underbrace{\int_{0}^{1} f(x)\,dx}_{f(x)=x+1}$$

$$= \int_{-1}^{0} 2x\,dx + \int_{0}^{1} x + 1\,dx \qquad x^0$$

$$= \frac{2}{2(1+1)} x^{1+1} \Big|_{-1}^{0} + \left. \frac{1}{1+1} x^{1+1} + \frac{1}{0+1} x^{0+1} \right|_{0}^{1}$$

$$= x^2 \Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$= \left(0^2 - (-1)^2\right) + \left(\frac{1}{2}(1)^2 + 1 - \underbrace{\left(\frac{1}{2}(0)^2 + 0\right)}_{0}\right)$$

$$= -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \;/\!/$$

Contoh 5

Selesaikan integral berikut

$$\int_0^1 2x(x^2+3)^5 \, dx$$

u

$u = x^2 + 3$

$x = 1 \rightarrow u = 1^2 + 3 = 4$

$x = 0 \rightarrow u = 0^2 + 3 = 3$

$u = x^2 + 3$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$dx = \frac{du}{2x}$

$\int_0^1 2x(x+3)^5 \, dx$

$= \int_0^1 \cancel{2x} \cdot u^5 \cdot \frac{du}{\cancel{2x}}$

$= \int_0^1 u^5 \, du$

$= \frac{1}{5+1} u^{5+1} \Big|$ $1 = x$, $0 = x$

$= \frac{1}{6} u^6 \Big|_3^4$

Cara 1

kembalikan u ke x

$$= \frac{1}{6} u^6 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}(x^2+3)^6 \Big|_0^1$$

$$= \left[\frac{1}{6}(1^2+3)^6\right] - \left[\frac{1}{6}(0^2+3)^6\right]$$

$$= \left[\frac{4^6}{6}\right] - \left[\frac{3^6}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{6}(4^6 - 3^6)$$

$$= \frac{3367}{6}$$

①

Cara 2

ubah batas x menjadi u

batas $\begin{vmatrix} 1 \leftarrow x \\ 0 \leftarrow x \end{vmatrix}$ $\Rightarrow$ $u = x^2 + 3$ $\Rightarrow$ $x = 1 \rightarrow u = 1^2 + 3$

$u = 4$

$x = 0 \rightarrow u = 0^2 + 3$

$u = 3$

$$= \frac{1}{6} u^6 \Big|_3^4 = \frac{1}{6} 4^6 - \frac{1}{6} 3^6$$

1

$$= \frac{1}{6}(4^6 - 3^6)$$

$$= \frac{3367}{6}$$

Soal Latihan

1. Selesaikan:

a. $\int (x^2 + x^3)dx$

b. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$

c. $\int \sqrt[3]{t} dt$

d. $\int \frac{t^2 - 2t^4}{t^4} dt$

e. $\int \sin^2 x \, dx$

f. $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx$

g. $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx$

h. $\int_{1}^{4} \frac{s^4 - 8}{s^2} ds$

i. $\int_{0}^{1} x^3 \sqrt{x^2 + 3} dx$

j. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \sec^2 x \, dx$

1.a

$$\int (x^2+x^3)\,dx = \int x^2\,dx + \int x^3\,dx$$

$$= \frac{1}{2+1}x^{2+1} + \frac{1}{3+1}x^{3+1} + C$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + C$$

1.b

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x \cdot \sin x}\,dx$$

$$= \int \boxed{\frac{\cos x}{\sin x}}\,\boxed{\frac{1}{\sin x}}\,dx$$

$$= \int \boxed{\cot x} \cdot \boxed{\operatorname{cosec} x}\,dx$$

$$= -\operatorname{cosec} x + C$$

dari Tabel :)

1.C $\int \sqrt[3]{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{3}}\,dt = \frac{1}{\frac{1}{3}+1} t^{\frac{1}{3}+1} + C$

$$= \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{3}{3}} t^{\frac{1}{3}+\frac{3}{3}} + C$$

$$= \frac{1}{\frac{4}{3}} t^{\frac{4}{3}} + C$$

$$\frac{\frac{1}{1}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{1} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$= \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} + C \;//$$

1.D. $\int \frac{t^2 - 2t^4}{t^4}\, dt = \int \frac{t^2}{t^4} - \frac{2t^4}{t^4}\, dt$

$= \int t^{2-4} - 2t^{4-4}\, dt$

$= \int t^{-2} - 2\, dt = \int t^{-2}\, dt - \int 2\, dt$

$= \frac{1}{-2+1} t^{-2+1} - \frac{2}{0+1} t^{0+1}$

$= \frac{1}{-1} t^{-1} - 2t$

$= -t^{-1} - 2t$

$= -\frac{1}{t} - 2t$

i.e. $\int \sin^2 x \, dx$

$$\boxed{\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A}$$

$$\cos 2A - 1 = -2\sin^2 A$$

$$\frac{\cos 2A - 1}{-2} = \sin^2 A$$

$$\frac{1 - \cos 2A}{2} = \sin^2 A$$

$$\int \frac{1-\cos(2x)}{2} \, dx = \frac{1}{2}\int 1 - \cos(2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int 1 \, dx - \int \cos(2x) \, dx\right]$$

$\int 1 \, dx$

$= x$

$u = 2x$

$\frac{du}{dx} = 2$

$dx = \frac{du}{2}$

$\int \cos u \cdot \frac{du}{2} = \frac{\sin u}{2}$

$u = 2x \rightarrow \frac{\sin u}{2} = \frac{\sin 2x}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right] + C$$

1.f. $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$

$\sqrt{1-x^2} = k$

$1^2 - x^2 = k^2$

$1^2 = k^2 + x^2$

misal:

$x = \sin u$

$\frac{dx}{du} = \frac{d}{du} \sin u$

$\frac{dx}{du} = \cos u$

$dx = \cos u \, du$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-\sin^2 u} \cdot \cos u \, du$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{\cos^2 u} \cdot \cos u \, du$$

$$= \int_{-1}^{1} \cos u \cdot \cos u \cdot du$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$= \int_{-1}^{1} \cos u \cdot \cos u \cdot du$$

$$= \int_{-1}^{1} \cos^2 u \, du$$

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$$

$$\cos 2A + 1 = 2\cos^2 A$$

$$\boxed{\frac{\cos 2A + 1}{2} = \cos^2 A}$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\cos 2u + 1}{2} \, du = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (\cos 2u + 1) \, du$$

$$= \frac{1}{2} \left[\boxed{\int_{-1}^{1} \cos 2u \, du} + \boxed{\int_{-1}^{1} 1 \, du} \right]$$

1 $= \int_{-1}^{1} \cos 2u \, du = \int_{-1}^{1} \cos k \, \frac{1}{2} \, dk$

$2u = k$

$\frac{d}{du} 2u = \frac{d}{du} k$

$2 = \frac{dk}{du}$

$du = \frac{1}{2} dk$

$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \cos k \, dk$

$= \frac{1}{2} \left[\sin k \right] \Big|_{-1}^{1}$

$= \frac{1}{2} \left[\sin 2u \right] \Big|_{-1}^{1}$

2 $\int_{-1}^{1} 1 \, du = u \Big|_{-1}^{1}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left[\sin 2u\right]\Big|_{-1}^{1} + u\Big|_{-1}^{1}\right]$$

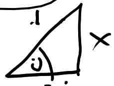
$\boxed{\sin 2x = 2\sin x \cos x}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2}\sin u \cos u)\Big|_{-1}^{1} + u\Big|_{-1}^{1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin u \cos u\Big|_{-1}^{1} + u\Big|_{-1}^{1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1}^{1} + \sin^{-1}(x)\Big|_{-1}^{1}\right]$$

$\sin u = x$



$y = ?$

$y^2 = 1^2 - x^2$

$y = \sqrt{1-x^2}$

$\cos u = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1}$

$\cos u = \sqrt{1-x^2}$

$\sin u = x$

$u = \sin^{-1}(x)$

$$= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2}\,\Big|_{-1}^{1} + \underline{\sin^{-1}(x)}\,\Big|_{-1}^{1} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1\cdot\sqrt{1-1^2} - (-1)\sqrt{1-(-1)^2}\right) + \left(\sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1)\right) \right]$$

$$(1-1)=0$$

$$= \frac{1}{2}\left[(0-0) + \left(\sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1)\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1)\right)$$

$$\pi/2 \qquad \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\boxed{2{,}37679}\right)$$

$$= 1{,}57 \approx \frac{\pi}{2}$$

//

1.h

$$\int_1^4 \frac{s^4-8}{s^2}\,ds = \int_1^4 \frac{s^4}{s^2}\,ds - \int_1^4 \frac{8}{s^2}\,ds$$

$$= \int_1^4 s^2\,ds - \int_1^4 8s^{-2}\,ds$$

$$= \frac{1}{3}s^3\Big|_1^4 - \frac{8}{-1}s^{-1}\Big|_1^4$$

$$= \frac{1}{3}s^3\Big|_1^4 + 8s^{-1}\Big|_1^4$$

$$= \ldots$$

(1.i) $\int_0^1 x^3 \sqrt{x^2+3}\, dx$

$u = x^2+3$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$dx = \frac{1}{2x} \cdot du$

$u = x^2+3$

$x^2 = u-3$

$$= \int_0^1 x^3 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2x} \cdot du$$

$$= \int_0^1 \frac{\cancel{2x}}{2} \cdot x^2 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{\cancel{2x}}\, du$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}(u-3)\sqrt{u}\, du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (u-3)u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 u^{3/2} - 3u^{1/2}\, du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 u^{3/2} - 3u^{1/2}\, du$$ ← dlm x , kita ubah ke u

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+3/2} u^{3/2+1}\Big|_0^1 - \frac{3}{\frac{1}{2}+1} u^{\frac{1}{2}+1}\Big|_0^1\right]$$

$u = x^2 + 3$

$x = 1 \rightarrow u = (1)^2 + 3$
$= 4$

$x = 0 \rightarrow u = (0)^2 + 3$
$= 3$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5/2} u^{5/2}\Big|_3^4 - \frac{3}{3/2} u^{3/2}\Big|_3^4\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5/2}(4)^{5/2} - \frac{1}{5/2}(3)^{5/2} - \left(\frac{3}{3/2}(4)^{3/2} - \frac{3}{3/2}(3)^{3/2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{1}{5/2}(4)^{5/2} - \frac{1}{5/2}(3)^{5/2}} - \underbrace{\left(\frac{3}{3/2}(4)^{3/2} - \frac{3}{3/2}(3)^{3/2}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(-1{,}6) - (-2{,}08)\right]$$

Pakai kalkulator !

$$= 0{,}48 \, /\!/$$

(1.j) $$\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \underline{\sec^2 x \, dx} = \int_0^{\pi/4} u^2 \cdot du$$

$\underline{\text{mis}}$:

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$du = \underline{\sec^2 x \, dx}$

$$= \frac{1}{3}u^3 \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{3}\tan^3 x \Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3(\pi/4) - \frac{1}{3}\tan^3(0) = \frac{1}{3} \, /\!/$$

Here!