MATRIKULASI

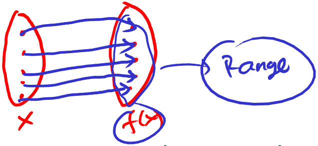
MATEMATIKA DASAR

Mifta Nur Farid

Pokok Bahasan

1. Pertidaksamaan Linier
   - Interval
   - Penyelesaian Pertidaksamaan
2. Fungsi dan Limit
   - Fungsi
   - Limit
3. Trigonometri
4. Turunan
5. Integral
   - Integral Tak Tentu
   - Integral dengan Substitusi
   - Integral Tentu

Fungsi



- Sebuah fungsi f adalah suatu aturan korespondensi yang menghubungkan setiap objek x dalam satu himpunan yang disebut daerah asal/domain, dengan sebuah nilai tunggal $f(x)$ dari suatu himpunan kedua (kodomain).
- Himpunan nilai yang diperoleh dari $f(x)$ disebut daerah hasil/range.

  f dari x
- Umumnya, fungsi dinotasikan sebagai $y = f(x)$ dengan x adalah peubah (variabel) bebas dari f yang merupakan domain, sedangkan y merupakan peubah (variable) tak bebas dari y.
  - Berarti nilai y yang dihasilkan bergantung pada nilai x yang diberikan.
- Nilai-nilai x merupakan anggota dari domain fungsi f dan y merupakan anggota dari range fungsi f.

Fungsi

$\{x : x > 2\} \in D_f$

$\{y : y > 0\} \in R_f$

- Jika didefinisikan fungsi $\boxed{y = f(x),}$ maka domain (daerah asal) dari f merupakan himpunan nilai – nilai dari himpunan bebas (variabel) x yang dinotasikan sebagai D_f.
- Sedangkan range merupakan semua nilai $f(x)$ untuk setiap x pada domain f. Range dari fungsi f dinotasikan sebagai R_f.

Fungsi

fungsi 1 fungsi 2

- Diberikan dua buah fungsi f dan g, maka rumus-rumus untuk jumlah $f + g$, selisih $f - g$, hasil kali $f \cdot g$, dan hasil bagi $\frac{f}{g}$ didefinisikan sebagai

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$$

$g(x) = 2x$

$f(x) = 3x$

$f(g(x)) = 3(x)$

$= 3(2x)$

$= 6x$

- Komposisi fungsi f dan g dinyatakan sebagai berikut

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

atau dinotasikan $f \circ g$

Contoh 1

Diberikan suatu fungsi $f(x) = x^2 - 2x$, tentukan dan sederhanakan nilai dari

1. $f(x)$
2. $f(4 + h)$
3. $\frac{f(4+h) - f(4)}{h}$

Jawaban Contoh 1

$$\boxed{f(x) = x^2 - 2x}$$

$x = 4$ $\qquad$ $f(4) = 4^2 - 2(4)$ $\qquad$ $(4+h)(4+h) = 16 + 4h + 4h + h^2$

1. $f(4) = (4)^2 - 2(4) = 8$

2: $f(4+h) = (4+h)^2 - 2(4+h) = \underline{16+8h+h^2} - 8 - 2h = \underline{8+6h+h^2}$

3. $\dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = \dfrac{8+6h+h^2-8}{h} = \dfrac{6h+h^2}{h} = 6 + h$

$$\frac{(6+h)\cancel{h}^{\,1}}{\cancel{h}}$$

Contoh 2

Selidiki domain dan range dari $g(x) = 1 + \sqrt{x}$

(1) $D_g : ?$

(2) $R_g : ?$

Jawaban Contoh 2

$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots +\infty$

$x = -1 \to g(-1) =$

$1 + \sqrt{-1}$

$\downarrow$

imajiner

Dg

$g(x) = 1 + \sqrt{x}$

$Dg = [0, +\infty)$ $\quad x \geq 0$

0

Domain dari fungsi $g(x)$ adalah $[0, +\infty)$. Ketika nilai - nilai pada domain $[0, +\infty)$ disubstitusikan ke dalam $1 + \sqrt{x}$, maka diperoleh range dari g yaitu $[1, +\infty)$.

0, 1, 2

Rg

$Rg = g(x) \geq 1$

$Rg = [1, +\infty)$

1

$g(0) = 1 + \sqrt{0} = 1$

$g(1) = 1 + \sqrt{1} = 2$

$g(2) = 1 + \sqrt{2} = 2, \ldots$

$g(3) = 1 + \sqrt{3} = 2, \ldots$

Soal Latihan

1. Diberikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 8, & \text{jika } x \leq 3 \\ \sqrt{x-3}, & \text{jika } x > 3 \end{cases}$$

   1.1 $f(4)$
   1.2 $f(\frac{1}{2})$
   1.3 $f(3 - t^2)$

2. Selidiki domain dan range dari fungsi - fungsi berikut:
   2.1 $f(x) = \frac{1}{x}$
   2.2 $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$
   2.3 $h(x) = \sqrt{2x - 1}$
   2.4 $i(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}$

Soal Latihan

$f(x) = 2x^3 - 8 \; ; \; x \leq 3$

1. Diberikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 8, & \text{jika } x \leq 3 \\ \sqrt{x-3}, & \text{jika } x > 3 \end{cases}$$

$f(x) = \sqrt{x-3} \; ; \; \text{jika } x > 3$

   1.1 $f(4)$
   1.2 $f(\frac{1}{2})$ $= 2(\frac{1}{2})^3 - 8 = 2 \cdot \frac{1}{8} - 8 = \frac{1}{4} - 8 = -7\frac{3}{4}$
   1.3 $f(3 - t^2)$

2. Selidiki domain dan range dari fungsi - fungsi berikut:
   2.1 $f(x) = \frac{1}{x}$
   2.2 $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$
   2.3 $h(x) = \sqrt{2x - 1}$
   2.4 $i(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}$

③ $f(3-t^2) = 2(3-t^2)^3 - 8 = 2(3-t^2)(3-t^2)(3-t^2) - 8$

$= 2(9 - 3t^2 - 3t^2 + t^4)(3 - t^2) - 8$

$= 2(9 - 6t^2 + t^4)(3 - t^2) - 8$

$= 2(27 - 9t^2 - 18t^2 + 6t^4 + 3t^4 - t^6) - 8$

$= 2(27 - 27t^2 + 9t^4 - t^6) - 8$

$= 54 - 54t^2 + 18t^4 - 2t^6 - 8$

$f(3-t^2) = 46 - 54t^2 + 18t^4 - 2t^6$

$3 - t^2 \le 3$

$3 - t^2 - 3 \le 3 - 3$

$-t^2 \le 0$

$t^2 \geq 0$

$t \geq 0$

$f((3-t)^2) = 46 - 54t^2 + 18t^4 - 2t^6$; Jika $t \geq 0$

$f(x) = \sqrt{x-3} \rightarrow x = 3 - t^2 \rightarrow f(3-t^2) = \sqrt{3 - t^2 - 3}$

$= \sqrt{-t^2}$

$= t\sqrt{-1}$

$= t \cdot i$

---

② Domain dan Range

$-\infty \ldots, -2, -1, \cancel{0}, 1, 2, \ldots + \infty$

ⓐ $f(x) = \frac{1}{x}$

① Domain dari f

$D_f = ?$

$D_f : \{x : x > 0 \cup x < 0\}$

$D_f = (0, +\infty) \cup (-\infty, 0)$

② Range dari f

$f(0{,}0001) = \frac{1}{0{,}\ldots} = 10000$

$f(1) = \frac{1}{1} = 1$

$f(2) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$f(1000) = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

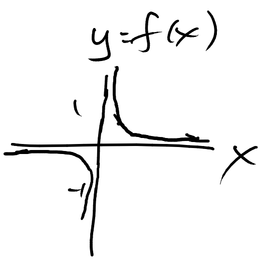
$f(-0{,}00001) = \frac{1}{-0{,}00001} = -100\ldots$

$f(-1) = \frac{1}{-1} = -1$

$f(-2) = \frac{1}{-2} = -0{,}5$

$\vdots$

$f(-1000) = \frac{1}{-1000} = -0{,}001$



$D_f = \{f(x) : f(x) > 0 \cup f(x) < 0\}$

2.b. Domain dan Range $\qquad -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

$$g(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

(1) $D_g = (-\infty, \infty)$

$x = 0 \rightarrow g(0) = \frac{1}{0+1} = 1$

$x = 0{,}1 \rightarrow g(0{,}1) =$ $\qquad = 1/$[illegible]

$x = 1 \rightarrow g(1) = \frac{1}{2}$

$x = -1 \rightarrow g(-1) = \frac{1}{2}$

$x = 2 \rightarrow g(2) = \frac{1}{5}$

$x = -2 \rightarrow g(-2) = \frac{1}{5}$

$x = 1000 \rightarrow g(1000) = \frac{1}{1001} = 0{,}001 \ldots$

(2) $R_g = \{ R_g : 0 < R_g \leq 1 \}$

$R_g = (0, 1]$

Soal Latihan

3. Diberikan fungsi $f(x) = x - 1$. Tentukan rumus fungsi dan domain dari:
   3.1 $f(2x) + f(\sqrt{x})$
   3.2 $f(x^2) - f(-x)$
   3.3 $f(1-t) + 2f^2(t)$
4. Selidiki komposisi fungsi f terhadap g dan domainnya jika diberikan fungsi f dan g sebagai berikut:
   4.1 $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = \frac{1}{x}$
   4.2 $f(x) = x^2 + x - 1$ dan $g(x) = 1 - \sqrt{x}$

Soal Latihan

3. Diberikan fungsi $f(x) = x - 1$. Tentukan rumus fungsi dan domain dari:
   3.1 $f(2x) + f(\sqrt{x})$
   3.2 $f(x^2) - f(-x)$
   3.3 $f(1-t) + 2f^2(t)$
4. Selidiki komposisi fungsi f terhadap g dan domainnya jika diberikan fungsi f dan g sebagai berikut:
   4.1 $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = \frac{1}{x}$
   4.2 $f(x) = x^2 + x - 1$ dan $g(x) = 1 - \sqrt{x}$

Limit

- Limit fungsi adalah perilaku suatu fungsi mendekati suatu nilai tertentu.
- Limit terbagi menjadi dua yaitu limit kiri dan limit kanan dari suatu fungsi.
- Limit kiri dari suatu fungsi $f(x)$ mendekati suatu nilai x_0 dinotasikan sebagai

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

- Limit kanan dari suatu fungsi $f(x)$ mendekati suatu nilai x_0 dinotasikan sebagai

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Limit

- Limit dua sisi dari suatu fungsi $f(x)$ dinotasikan dengan

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L}$$

not equal

- Jika nilai dari limit kanan dan limit kiri dari suatu fungsi f sama, maka dapat disimpulkan bahwa fungsi f memiliki limit dan nilai limitnya adalah L.
- **Perlu diperhatikan dalam mengerjakan soal limit, nilai fungsi $f(x)$ harus terdefinisi di $x = x_0$ atau** $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq \frac{0}{0}$

  $x \to 2$ $x = 2$

- Apabila bertemu dengan fungsi yang seperti ini, maka fungsi $f(x)$ harus diserderhanakan terlebih dahulu untuk mendapatkan nilai limitnya. Salah satu caranya adalah dengan pemfaktoran.

Aturan dasar limit meliputi

$$\lim_{x \to 3} 2 = 2$$

$$\lim_{x \to c} k = k$$

$$\lim_{x \to -\infty} k = k \rightarrow \lim_{x \to -\infty} 3 = 3$$

$$\lim_{x \to +\infty} k = k \rightarrow \lim_{x \to +\infty} 3 = 3$$

$$\lim_{x \to c} x = c \rightarrow \lim_{x \to 3} x = 3 \qquad \lim_{y \to 2} y = 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty \checkmark$$

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \checkmark$$

dengan k dan c konstanta.

Jika didefinisikan dua buah fungsi, f dan g yang memiliki limit masing-masing, yaitu L_1 dan L_2 maka:

- $\lim[f(x) + g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x) = L_1 + L_2$
- $\lim[f(x) - g(x)] = \lim f(x) - \lim g(x) = L_1 - L_2$
- $\lim[f(x)g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = L_1 L_2$
- $\lim \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, jika $L_2 \neq 0$ → Pemfaktora
- $\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$ untuk $L_1 \geq 0$ jika n genap
- $\lim\, [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$
- $\lim k f(x) = \lim k \cdot \lim f(x) = k \cdot \lim f(x)$

Notasi lim dapat menyatakan $\lim\limits_{x\to c}$, $\lim\limits_{x\to c^-}$, $\lim\limits_{x\to c^+}$, $\lim\limits_{x\to -\infty}$, dan $\lim\limits_{x\to +\infty}$

Contoh 3

Tentukan

$$\lim_{x \to 2} \left(x^3 - 2\sqrt{x} - 3 \right)$$

Jawaban Contoh 3

$\lim(f-g) = \lim f - \lim g$

$\lim f^3 = [\lim f]^3$

$\lim(kf) = k \cdot \lim f$

$$\lim_{x\to 2}\left(x^3 - \underline{2\sqrt{x}} - \underline{3}\right) = \lim_{x\to 2} x^3 - \lim_{x\to 2} 2\sqrt{x} - \lim_{x\to 2} 3$$

$$= \left[\lim_{x\to 2} x^3\right] - 2\lim_{x\to 2}\sqrt{x} - \lim_{x\to 2} 3$$

$\lim_{x\to 2} x = 2$

$$= \left[\lim_{x\to 2} x^3\right] - 2\sqrt{\lim_{x\to 2} x} - \lim_{x\to 2} 3$$

$$= [2]^3 - 2\sqrt{2} - 3 = 8 - 2\sqrt{2} - 3$$

$$= 5 - 2\sqrt{2}$$

Contoh 4

Tentukan

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} \right) = \frac{\;}{0} \quad \times$$

Jawaban Contoh 4

Dalam dilihat bahwa $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-5x+6}{x-3}\right) = \frac{0}{0}$. Oleh karena itu, fungsi rasional tersebut harus disederhanakan dengan metode pemfaktoran untuk mengetahui nilai limitnya

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-5x+6}{x-3}\right) = \lim_{x\to 3}\left(\frac{\cancel{(x-3)}(x-2)}{\cancel{x-3}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 3}(x-2) = \lim_{x\to 3} x - \lim_{x\to 3} 2$$

$$= \underline{3} - \underline{2}$$

$$= \underline{1}$$

Soal Latihan

1. Tentukan nilai limit dari:
   1.1 $\lim_{x\to 3} (x^2 - 20)$ $= \lim_{x\to 3} x^2 - \lim_{x\to 3} 20 = 3^2 - 20 = 9 - 20 = -11$
   1.2 $\lim_{x\to -1} (4x^2 + 3x + 1)$ $= \lim_{x\to -1} 4x^2 + \lim_{x\to -1} 3x + \lim_{x\to -1} 1$
   $= 4 \cdot \lim_{x\to -1} x^2 + 3 \lim_{x\to -1} x + \lim_{x\to -1} 1$
   $= 4(-1)^2 + 3(-1) + 1$
   $= 4 - 3 + 1 = 2$
   1.3 $\lim_{x\to -2} \left(\frac{x^2-2x-8}{x^2-4}\right)$
   1.4 $\lim_{x\to 2} \left(\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x^2+5}}\right)$
   1.5 $\lim_{x\to 2} \left(\frac{3-\sqrt{x+7}}{x^2+x-6}\right)$
2. Diketahui $f(x) = \begin{cases} x^2; & x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 1 \\ 1 + x, & x > 1 \end{cases}$, tentukan apakah $\lim_{x\to 0} f(x)$ dan $\lim_{x\to 1} f(x)$ (jika ada)!

3

$$\lim_{x\to -2} \boxed{\left(\frac{x^2-2x-8}{\underbrace{x^2-4}_{=0}}\right)} =$$

$$\frac{x^2-2x-8}{x^2-4} = \frac{(x-4)(x+2)}{x^2-2^2} = \frac{(x-4)\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}}$$

$$= \frac{(x-4)}{(x-2)}$$

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{x-4}{x-2}\right) = \frac{\lim_{x\to -2}(x-4)}{\lim_{x\to 2}(x-2)} = \frac{-2-4}{-2-2}$$

$$= \frac{-6}{-4} = 3/2 = 1,5$$

4

Pemfaktoran

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x^2+5}}\right) = \frac{x^2-4}{3-\sqrt{x^2+5}} \times \frac{3+\sqrt{x^2+5}}{3+\sqrt{x^2+5}}$$

$$= \frac{(x^2-4)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-(x^2+5)} = \frac{(x-2)(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2}$$

$$4-x^2 \to 2^2-x^2$$

$$-(x^2-2^2)$$

$$-(x+2)(x-2)$$

$$= \frac{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+2)}(3+\sqrt{x^2+5})}{-\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}}$$

$$= -\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)$$

$$\lim_{x\to 2}\left(-\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)\right) = -\lim_{x\to 2} 3 - \sqrt{\lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} 5}$$

$$= -3-\sqrt{4+5} = -3-3$$

$$= -6 \quad //$$