INSTITUT TEKNOLOGI KALIMANTAN

MATRIKULASI MATEMATIKA DASAR

Without mathematics, there's nothing you can do. Everything around you is mathematics. Everything around you is numbers. (Shakuntala Devi)

TIM MATRIKULASI

Pertidaksamaan Linier

A. Interval

Pertidaksamaan pada matematika disimbolkan dengan $>$, $<$, $\geq$ dan $\leq$. Dalam menyelesaikan pertidaksamaan linier berarti mencari rentang atau nilai variabel yang tidak diketahui yang memenuhi pertidaksamaan. Diberikan persamaan linier sebagai berikut:

$$5x - 4 > 2x + 3. \tag{1}$$

Dapat dilihat dari persamaan (1), tanda $=$ diganti dengan tanda $>$. Sehingga persamaan (1) di atas disebut pertidaksamaan linier. Simbol – simbol yang digunakan dalam pertidaksamaan mempunyai arti sebagai berikut:

Simbol	Arti	Contoh
$>$	Lebih dari	$x > 1$: x lebih dari 1
$\geq$	Lebih dari sama dengan	$x \geq -12$: x lebih dari sama dengan -12
$<$	Kurang dari	$x < 5$: x kurang dari 5
$\leq$	Kurang dari sama dengan	$x < 13$: x kurang dari sama dengan 13

Himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan dapat dinyatakan ke dalam notasi himpunan maupun dalam bentuk selang atau *interval*. Jenis – jenis *interval* antara lain:

- Selang berhingga dan tertutup

  Selang ini dinotasikan dengan $[a, b]$ dan dinyatakan dalam notasi himpunan sebagai $\{x: a \leq x \leq b\}$.

Gambar 1. Grafik selang $[a, b]$

- Selang berhingga dan terbuka

  Selang ini dinotasikan dengan (a, b) dan dinyatakan dalam notasi himpunan sebagai $\{x: a < x < b\}$.

Gambar 2. Grafik selang (a, b)

- Selang berhingga dan setengah terbuka atau setengah tertutup

  Selang ini dinotasikan dengan $(a, b]$ atau $[a, b)$. Notasi himpunan dari $(a, b]$ adalah $\{x: a < x \leq b\}$. Sedangkan notasi himpunan dari $[a, b)$ adalah $\{x: a \leq x < b\}$.

Gambar 3. Grafik Selang $(a, b]$

Gambar 4. Grafik Selang $[a, b)$

- Selang tak hingga dan tertutup

  Selang ini dinotasikan dengan $[a, +\infty)$ atau $(-\infty, b]$. Notasi himpunan dari $[a, +\infty)$ adalah $\{x: x \geq a\}$. Sedangkan notasi himpunan dari $(-\infty, b]$ adalah $\{x: x \leq b\}$.

Gambar 5. Grafik Selang $[a, +\infty)$

Gambar 6. Grafik Selang $(-\infty, b]$

- Selang tak hingga dan terbuka

  Selang ini dinotasikan dengan $(a, +\infty)$ atau $(-\infty, b)$. Notasi himpunan dari $(a, +\infty)$ adalah $\{x: x > a\}$. Sedangkan notasi himpunan dari $(-\infty, b)$ adalah $\{x: x < b\}$.

Gambar 7. Grafik Selang $(a, +\infty)$

Gambar 8. Grafik Selang $(-\infty, b)$

- Selang tak hingga, terbuka, dan tertutup

  Selang ini dinotasikan dengan $(-\infty, +\infty)$ dan dinyatakan dalam notasi himpunan sebagai $\{x: x \in \boldsymbol{R}\}$.

Gambar 9. Grafik Selang $(-\infty, +\infty)$

Gambar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9 berturut – turut mempresentasikan masing – masing selang ke dalam sebuah gambar. Warna biru merupakan daerah yang memenuhi masing – selang atau disebut daerah himpunan penyelesaian. Dari jenis – jenis selang di atas, selang dapat dibedakan menjadi dua bagian yaitu selang terbuka (*open interval*) dan selang tertutup (*closed interval*). Selang terbuka $a < x < b$ memuat semua nilai antara a dan b tetapi tidak termasuk nilai a dan b. Selang terturup $a \leq x \leq b$ memuat semua nilai a dan b termasuk nilai a dan b.

B. Penyelesaian Pertidaksamaan

Dalam menyelesaikan suatu pertidaksamaan perlu memperhatikan beberapa hal sebagai berikut:

1. Prosedur menyelesaikan pertidaksamaan adalah mengubah pertidaksamaan satu langkah demi satu langkah hingga diperoleh himpunan penyelesaiannya jelas.

2. Dapat dilakukan operasi-operasi tertentu (tambah, kurang, kali, bagi, akar, pangkat) pada kedua ruas pada suatu pertidaksamaan. Perlakuan pada kedua ruas harus sama, contohnya:
   a. Kedua ruas ditambah atau dikurangi dengan suatu bilangan;
   b. Kedua ruas dikali atau dibagi dengan suatu bilangan positif;
   c. Jika kedua ruas dikali atau dibagi dengan bilangan negatif, tanda pertidaksamaan harus berbalik arah.

Contoh 1:

Selesaikan pertidaksamaan $-5x - 10 < 15$ dan tunjukkan garis bilangan himpunan penyelesaiannya

<u>Jawaban</u>

$$\begin{array}{rcll}
-5x - 10 & < & 15 & \\
-5x - 10 + 10 & < & 15 + 10 & \text{(kedua ruas ditambah 10)} \\
-5x & < & 25 & \\
\frac{-5}{-5}x & > & \frac{25}{-5} & \text{(kedua ruas dibagi -5 atau dikali dengan } -\tfrac{1}{5}\text{)} \\
x & > & -5 &
\end{array}$$

Himpunan penyelesaiannya adalah $\{x : x > -5\}$ atau ditulis dalam bentuk selang $(-5, +\infty)$. Berikut $\{x : x > -5\}$ diinterpretasikan ke dalam garis bilangan:

Gambar 10. Grafik Selang $(-5, +\infty)$

Contoh 2:

Selesaikan pertidaksamaan $-5 \leq 2x + 6 < 4$ dan tunjukkan garis bilangan himpunan penyelesaiannya

<u>Jawaban</u>

$$\begin{array}{rcccll}
-5 & \leq & 2x + 6 & < & 4 & \\
-5 - 6 & \leq & 2x + 6 - 6 & < & 4 - 6 & \text{(kedua ruas dikurangi 6)} \\
-11 & \leq & 2x & < & -2 & \\
-\frac{11}{2} & \leq & \frac{2}{2}x & < & \frac{-2}{2} & \text{(kedua ruas dibagi 2 atau dikali dengan } \tfrac{1}{2}\text{)} \\
-\frac{11}{2} & \leq & x & < & -1 &
\end{array}$$

Himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{x: -\frac{11}{2} \leq x < -1\right\}$ atau ditulis dalam bentuk selang $[-\frac{11}{2}, -1)$ atau dengan garis bilangan sebagai berikut:

Gambar 11. Grafik Selang $[-\frac{11}{2}, -1)$

Contoh 3:

Selesaikan pertidaksamaan $x^2 - x < 6$!

Jawaban

$$x^2 - x < 6$$
$$x^2 - x - 6 < 6 - 6 \qquad \text{(kedua ruas dikurangi 6)}$$
$$(x+2)(x-3) < 0 \qquad \text{(difaktorkan)}$$

Dapat dilihat bahwa $x = -2$ dan $x = 3$ membagi garis bilangan kedalam tiga selang terbuka yaitu $(-\infty, -2)$, $(-2,3)$, dan $(3, +\infty)$. Selanjutnya kita harus mengecek setiap tanda diselang $(-\infty, -2)$, $(-2,3)$, dan $(3, +\infty)$. Untuk menunjukkan tanda tersebut, diambil satu titik yang berada pada tiga seleng tersebut. Diambil $x = -3$ mewakili titik yang berada pada selang $(-\infty, -2)$, $x = 0$ mewakili selang $(-2,3)$, dan $x = 5$ mewakili selang $(3, +\infty)$. Hasil uji tanda dapat dilihat pada tabel berikut:

Test Point **(x)**	**Tanda**		
	$(x+2)$	$(x-3)$	$(x+2)(x-3)$
-3	$-$	$-$	$+$
0	$+$	$-$	$-$
5	$+$	$+$	$+$

1. Selang $(-\infty, -2)$ diuji menggunakan titik $x = -3$ dan menghasilkan $(-3+2)(-3-3) = 6 > 0$. Oleh karena itu, selang $(-\infty, -2)$ merupakan daerah positif.
2. Selang $(-2,3)$ diuji menggunakan titik $x = 0$ dan menghasilkan $(0+2)(0-3) = -6 < 0$. Oleh karena itu, selang $(-2,3)$ merupakan daerah negatif.
3. Selang $(3, +\infty)$ diuji menggunakan titik $x = 5$ dan menghasilkan $(5+2)(5-3) = 14 > 0$. Oleh karena itu, selang $(3, +\infty)$ merupakan daerah positif.

Berdasarkan hasil uji titik tersebut, daerah yang memenuhi $(x+2)(x-3) < 0$ adalah selang $(-2,3)$ (warna *orange* pada tabel atau *test point* $x = 0$), maka himpunan penyelesaiannya adalah $\{x: 2 < x < 3\}$ atau $(-2{,}3)$. Interpretasi himpunan penyelesaian dengan menggunakan grafik sebagai berikut:

Gambar 12. Grafik Selang $(-2{,}3)$ dan tanda di masing – masing daerahnya.

Contoh 4:

Selesaikan pertidaksamaan $3x^2 - x - 2 \geq 0$!

<u>Jawaban</u>

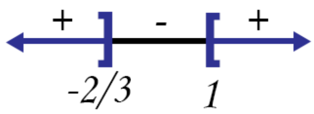
$$3x^2 - x - 2 \geq 0$$
$$(x-1)(3x+2) \geq 0 \quad \text{(difaktorkan)}$$

Dapat dilihat bahwa $x = -\frac{2}{3}$ dan $x = 1$ membagi garis bilangan kedalam tiga selang tertutup yaitu $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right]$, $\left[-\frac{2}{3}, 1\right]$, dan $[1, +\infty)$. Untuk menunjukkan tanda tersebut, diambil satu titik yang berada pada tiga seleng tersebut. Diambil $x = -1$ mewakili titik yang berada pada selang $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right]$, $x = 0$ mewakili selang $\left[-\frac{2}{3}, 1\right]$, dan $x = 2$ mewakili selang $[1, +\infty]$. Hasil uji tanda dapat dilihat pada tabel berikut

Test Point (x)	**Tanda**		
	$(x-1)$	$(3x+2)$	$(x-1)(3x+2)$
-1	$-$	$-$	$+$
0	$-$	$+$	$-$
2	$+$	$+$	$+$

1. Selang $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right]$ diuji menggunakan titik $x = -1$ dan menghasilkan $(-1-1)(3(-1)+2) = 2 \geq 0$. Oleh karena itu, selang $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right]$ merupakan daerah positif.
2. Selang $\left[-\frac{2}{3}, 1\right]$ diuji menggunakan titik $x = 0$ dan menghasilkan $(0-1)(3(0)+2) = -2 \leq 0$. Oleh karena itu, selang $\left[-\frac{2}{3}, 1\right]$ merupakan daerah negatif.
3. Selang $[1, +\infty)$ diuji menggunakan titik $x = 2$ dan menghasilkan $(2-1)(3(2)+2) = 8 \geq 0$. Oleh karena itu, selang $[1, +\infty)$ merupakan daerah positif.

Berdasarkan hasil uji titik tersebut, daerah yang memenuhi $(x-2)(3x+2) \geq 0$ adalah selang $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right]$ dan $[1, +\infty)$ (warna *orange* pada tabel atau *test* *point* $x = -1$ dan $x = 2$). Oleh karena itu, himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{x: x \leq -\frac{2}{3} \cup x \geq 1\right\}$ atau $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup [1, +\infty)$. Interpretasi menggunakan garis bilangan adalah sebagai berikut:



Gambar 13. Grafik Selang $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup [1, +\infty)$ dan tanda di masing – masing daerahnya.

Contoh 5:

Selesaikan pertidaksamaan $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$!

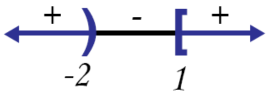
<u>Jawaban</u>

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$, kita perlu melihat masing-masing persamaan yang menjadi pembilang dan penyebut saat sama dengan nol. Nilai $x - 1 = 0$ jika $x = 1$ dan $x + 2 = 0$ jika $x = -2$. Titik $x = 1$ dan $x = -2$ akan menghasilkan tiga selang yaitu $(-\infty, -2)$, $(-2,1]$, dan $[1, +\infty)$. Selang $(-\infty, -2)$ tidak tertutup di $x = -2$ karena apabila disubstitusikan $x = -2$ ke persamaan $\frac{x-1}{x+2}$ akan membuat penyebutnya bernilai nol. Selanjutnya dilakukan uji tanda untuk mengecek tanda pada masing – masing selang. Diambil $x = -3$ mewakili titik yang berada pada selang $(-\infty, -2)$, $x = 0$ mewakili selang $(-2,1]$, dan $x = 2$ mewakili selang $[1, +\infty)$. Hasil uji tanda dapat dilihat pada tabel berikut

Test Point (x)	**Tanda**		
	$(x+2)$	$(x-1)$	$\frac{x-1}{x+2}$
-3	$-$	$-$	$+$
0	$+$	$-$	$-$
2	$+$	$+$	$+$

1. Selang $(-\infty, -2)$ diuji menggunakan titik $x = -3$ dan menghasilkan $\frac{-3-1}{-3+2} = 4 > 0$. Oleh karena itu, selang $(-\infty, -2)$ merupakan daerah positif.
2. Selang $(-2,1]$ diuji menggunakan titik $x = 0$ dan menghasilkan $\frac{0-1}{0+2} = -\frac{1}{2} < 0$. Oleh karena itu, selang $(-2,1]$ merupakan daerah negatif.
3. Selang $[1, +\infty)$ diuji menggunakan titik $x = 2$ dan menghasilkan $\frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4} > 0$. Oleh karena itu, selang $[1, +\infty)$ merupakan daerah positif.

Berdasarkan hasil uji titik tersebut, daerah yang memenuhi $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$ adalah selang $(-\infty, -2)$ dan $[1, +\infty)$ (warna *orange* pada tabel atau *test point* $x = 0$). Oleh karena itu, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x: x < -2 \cup x \geq 1\}$ atau $(-\infty, -2) \cup$ $[1, +\infty)$. Interpretasi menggunakan garis bilangan adalah sebagai berikut:



Gambar 14. Grafik Selang $(-\infty, -2) \cup$ $[1, +\infty)$ dan tanda di masing – masing daerahnya.

<u>Latihan Soal</u>

Selesaikan pertidaksamaan dibawah ini dan sketsakan himpunan penyelesaiannya pada garis koordinat:

a. $3x - 5 > -7x - 4$

b. $2(x + 3) < x + 1$

c. $1 \leq 2 - 3x < 8$

d. $2x^2 + 3x - 2 \leq 0$

e. $\frac{2}{x-5} \geq \frac{1}{x+1}$

Fungsi Dan Limit

A. Fungsi

Sebuah fungsi f adalah suatu aturan korespondensi yang menghubungkan setiap objek x dalam satu himpunan yang disebut daerah asal/*domain*, dengan sebuah nilai tunggal $f(x)$ dari suatu himpunan kedua (kodomain). Himpunan nilai yang diperoleh dari $f(x)$ disebut daerah hasil/*range*. Pada umumnya, fungsi dinotasikan sebagai $y = f(x)$ dengan x adalah peubah (variabel) bebas dari f yang merupakan domain, sedangkan y merupakan peubah (variable tak bebas) dari y. Hal ini berarti nilai y yang dihasilkan bergantung pada nilai x yang diberikan. Nilai-nilai x merupakan anggota dari domain fungsi f dan y merupakan anggota dari *range* fungsi f.

Jika didefinisikan fungsi $y = f(x)$, maka domain (daerah asal) dari f merupakan himpunan nilai – nilai dari himpunan bebas (variabel) x yang dinotasikan sebagai D_f. Sedangkan *range* merupakan semua nilai $f(x)$ untuk setiap x pada domain f. Range dari fungsi f dinotasikan sebagai R_f.

Diberikan dua buah fungsi f dan g, maka rumus – rumus untuk jumlah $f + g$, selisih $f - g$, hasil kali $f \cdot g$, dan hasil bagi $\frac{f}{g}$ didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\
(f-g)(x) &= f(x) - g(x) \\
(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0
\end{aligned}$$

Komposisi fungsi f dan g dinyatakan sebagai berikut

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

atau dinotasikan sebagai $f \circ g$.

Contoh 1:

Diberikan suatu fungsi $f(x) = x^2 - 2x$, tentukan dan sederhanakan nilai dari

a. $f(4)$

b. $f(4+h)$

c. $\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$

Jawaban

a. $f(4) = (4)^2 - 2(4) = 8$

b. $f(4+h) = (4+h)^2 - 2(4+h) = 16 + 8h + h^2 - 8 - 2h = 8 + 6h + h^2$

c. $\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \frac{8+6h+h^2-8}{h} = \frac{6h+h^2}{h} = 6 + h$

Contoh 2:

Selediki domain dan range dari $g(x) = 1 + \sqrt{x}$

Jawaban

Domain dari fungsi $g(x)$ adalah $[0, +\infty)$. Ketika nilai – nilai pada domain $[0, +\infty)$ disubstitusikan ke dalam $1 + \sqrt{x}$, maka diperoleh range dari g yaitu $[1, +\infty)$.

Soal Latihan

1. Diberikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 8, & jika\ x \leq 3 \\ \sqrt{x-3}, & jika\ x > 3 \end{cases}$$

   Dapatkan:

   a. $f(4)$

   b. $f\left(\frac{1}{2}\right)$

   c. $f(3 - t^2)$

2. Selidiki *domain* dan *range* dari fungsi – fungsi berikut:

   a. $f(x) = \frac{1}{x}$

   b. $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$

   c. $h(x) = \sqrt{2x - 1}$

   d. $i(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}$

3. Diberikan fungsi $f(x) = x - 1$. Tentukan rumus fungsi dan domainnya dari:

   a. $f(2x) + f(\sqrt{x})$

   b. $f(x^2) - f(-x)$

   b. $f(1 - t) + 2f^2(t)$

4. Selidiki komposisi fungsi f terhadap g dan domainnya jika diberikan fungsi f dan g sebagai berikut:

   a. $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = \frac{1}{x}$

b. $f(x) = x^2 + x - 1$ dan $g(x) = 1 - \sqrt{x}$

B. Limit

Limit fungsi adalah perilaku suatu fungsi mendekati suatu nilai tertentu. Limit terbagi menjadi dua yaitu limit kiri dan limit kanan dari suatu fungsi. Limit kiri dari suatu fungsi $f(x)$ mendekati suatu nilai x_0 dinotasikan sebagai

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Begitu juga limit kanan dari suatu fungsi $f(x)$ mendekati suatu nilai x_0 dinotasikan sebagai

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Limit dua sisi dari suatu fungsi $f(x)$ dinotasikan dengan

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Jika nilai dari limit kanan dan limit kiri dari suatu fungsi f sama, maka dapat disimpulkan bahwa fungsi f memiliki limit dan nilai limitnya adalah L. **Perlu diperhatikan dalam mengerjakan soal limit, nilai fungsi $\boldsymbol{f(x)}$ harus terdefinisi di $\boldsymbol{x = x_0}$ atau $\boldsymbol{\lim_{x \to x_0} f(x) \neq \frac{0}{0}}$.** Apabila bertemu dengan fungsi yang seperti ini, maka fungsi $f(x)$ harus diserderhanakan terlebih dahulu untuk mendapatkan nilai limitnya. Salah satu caranya adalah dengan pemfaktoran.

Aturan dasar limit meliputi

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to c} k &= k \\
\lim_{x \to -\infty} k &= k \\
\lim_{x \to +\infty} k &= k \\
\lim_{x \to c} x &= c \\
\lim_{x \to -\infty} x &= -\infty \\
\lim_{x \to +\infty} x &= +\infty
\end{aligned}$$

dengan k dan c konstanta. Jika didefinisikan dua buah fungsi, f dan g yang memiliki limit masing-masing, yaitu L_1 dan L_2 maka:

- $\lim[f(x) + g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x) = L_1 + L_2$
- $\lim[f(x) - g(x)] = \lim f(x) - \lim g(x) = L_1 - L_2$
- $\lim[f(x)g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = L_1 L_2$
- $\lim\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, jika $L_2 \neq 0$

- $\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$ untuk $L_1 \geq 0$ jika n genap
- $\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$
- $\lim kf(x) = \lim k \cdot \lim f(x) = k \cdot \lim f(x)$

Notasi lim dapat menyatakan $\lim\limits_{x\to c}$, $\lim\limits_{x\to c^-}$, $\lim\limits_{x\to c^+}$, $\lim\limits_{x\to -\infty}$, dan $\lim\limits_{x\to +\infty}$.

Contoh 3:

Tentukan

$$\lim_{x\to 2}\left(x^3 - 2\sqrt{x} - 3\right)$$

<u>Jawaban</u>

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\left(x^3 - 2\sqrt{x} - 3\right) &= \lim_{x\to 2} x^3 - \lim_{x\to 2} 2\sqrt{x} - \lim_{x\to 2} 3 \\
&= \left[\lim_{x\to 2} x\right]^3 - 2\lim_{x\to 2}\sqrt{x} - \lim_{x\to 2} 3 \\
&= \left[\lim_{x\to 2} x\right]^3 - 2\sqrt{\lim_{x\to 2} x} - \lim_{x\to 2} 3 \\
&= [2]^3 - 2\sqrt{2} - 3 \\
&= 5 - 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Contoh 4:

Tentukan

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}\right)$$

<u>Jawaban</u>

Dapat dilihat bahwa $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x^2-5x+6}{x-3}\right) = \frac{0}{0}}$. Oleh karena itu, fungsi rasional tersebut harus disederhanakan dengan metode pemfaktoran untuk mengetahui nilai limitnya

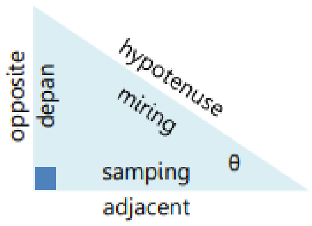
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}\right) &= \lim_{x\to 3}\left(\frac{(x-3)(x-2)}{x-3}\right) \\
&= \lim_{x\to 3}(x - 2) \\
&= 3 - 2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Soal Latihan

1. Tentukan nilai limit dari:
   a. $\lim\limits_{x \to 5} (x^2 - 20)$
   b. $\lim\limits_{x \to -1} (4x^2 + 3x + 1)$
   c. $\lim\limits_{x \to -2} \left(\frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 4}\right)$
   d. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 4}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}\right)$
   e. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{3 - \sqrt{x + 7}}{x^2 + x - 6}\right)$
2. Diketahui $f(x) = \begin{cases} x^2; & x \leq 0 \\ x; & 0 < x \leq 1 \\ 1 + x; & x > 1 \end{cases}$, tentukan apakah $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ dan $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ (jika ada)!

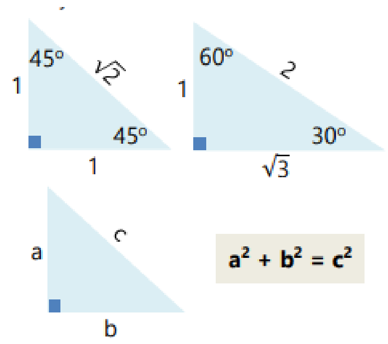
Trigonometri

Trigonometri berasal dari bahasa Yunani. Trigonometri berasal dari dua kata, yaitu trigono berarti segitiga dan metri berarti ilmu ukur. Trigonometri adalah ilmu matematika yang mempelajari tentang segitiga siku-siku. Pada segitiga siku-siku berlaku teorema Phytagoras dan nilai perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku. Nilai perbandingan trigonometri adalah nilai perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku. Macam definisi dari nilai perbandingan trigonometri:



$\sin\theta = \dfrac{depan}{miring}$	$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{miring}{depan}$
$\cos\theta = \dfrac{samping}{miring}$	$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{miring}{samping}$
$\tan\theta = \dfrac{depan}{samping} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{depan}{samping} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

Perbandingan nilai sisi-sisi segitiga istimewa dan sudutnya antara lain:

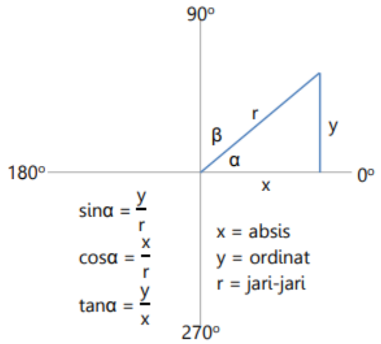


Nilai perbandingan trigonometri pada sudutsudut istimewa:

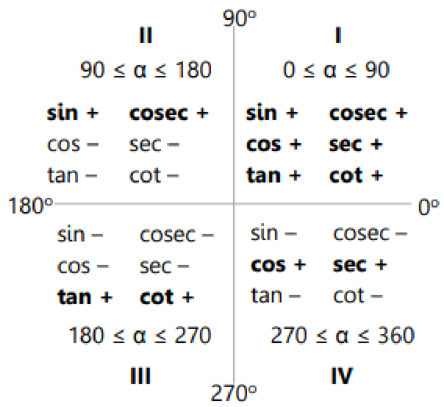
θ°	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
0°	0	1	0	∞	1	∞
30° $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1

60° $\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	∞	1	∞	0

Nilai perbandingan trigonometri suatu sudut yang besarnya $< 90°$ dapat dijelaskan melalui kuadran koordinat kartesius.



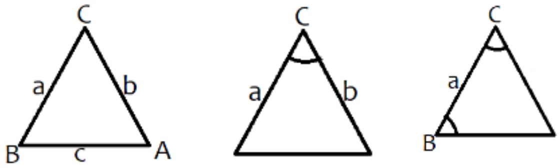
Tanda nilai perbandingan trigonometri berbeda di masing-masing kuadrannya.



Perbandingan trigonometri sudut berelasi sebagai berikut

1. Sudut berelasi $(90° - \theta)$
   a. $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$
   b. $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$
   c. $\tan(90° - \theta) = \cot\theta$
2. Sudut berelasi $(180° - \theta)$
   a. $\sin(180° - \theta) = \sin\theta$
   b. $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$
   c. $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$
3. Sudut berelasi $(270° - \theta)$
   a. $\sin(270° - \theta) = -\cos\theta$
   b. $\cos(270° - \theta) = -\sin\theta$
   c. $\tan(270° - \theta) = \cot\theta$
4. Sudut berelasi $(-\theta)$
   a. $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
   b. $\cos(-\theta) = \cos\theta$
   c. $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

Perhatikan ketiga gambar segitiga berikut:



gambar 5 gambar 6 gambar 7

- Aturan sinus : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ (lihat gambar 5)
- Aturan cosinus:

  I. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

  II. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$

  III. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

- Luas segitiga

  a) $L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, s = ½(a+b+c)$: gambar 5

  b) $L = ½\, a \cdot b\, sin\, C$: gambar 6

  c) $L = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin(B+C)}$: gambar 7

- Jumlah dan Selisih Dua Sudut

  a. $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$

  b. $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

  c. $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A - \tan B}$

- Perkalian Sinus dan Kosinus

  a. $2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

  b. $2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

  c. $2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

  d. $-2\sin A \sin B = \cos(A+B) - \cos(A-B)$

- Penjumlahan dan Pengurangan Sinus, Kosinus dan Tangen

  a. $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A+B) \cdot \cos\frac{1}{2}(A-B)$

  b. $\sin A - \sin B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B) \cdot \sin\frac{1}{2}(A-B)$

c. $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A + B)\cdot\cos\frac{1}{2}(A - B)$

d. $\cos A - \cos B = -2\sin\frac{1}{2}(A + B)\cdot\sin\frac{1}{2}(A - B)$

e. $\tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B}$

f. $\tan A - \tan B = \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B}$

- Sudut Rangkap

a. $\sin 2A = 2\sin A\cdot\cos A$

b. $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$

c. $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-A}$

d. $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

- Persamaan Trigonometri

a. $\sin x° = \sin p$

$x_1 = p + 360k$

$x_2 = (180 - p) + 360k$

b. $\cos x° = \cos p$

$x_{1,2} = \pm p + 360k$

c. $\tan x° = \tan p$

$x_1 = p + 180k$

$x_2 = (180 + p) + 180k$

d. Bentuk: $A\, trig^2 + B\, trig + C = 0$ diselesaikan seperti menyelesaikan persamaan kuadrat

<u>Soal Latihan</u>

1. Dalam suatu lingkaran yang berjari-jari 8 cm, dibuat segi-8 beraturan. Panjang sisi segi-8 tersebut adalah … cm
2. Jika luas segi delapan beraturan adalah $200\sqrt{2}cm^2$, maka panjang jari-jari lingkaran luarnya adalah.... cm
3. Diketahui segitiga ABC dengan panjang sisi AB = 3 cm, AC = 4 cm, dan ∠CAB = 60°. CD adalah tinggi segitiga ABC. Panjang CD = … cm
4. Himpunan penyelesaian dari persamaan $\cos(x + 210)° + \cos(x - 210)° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ untuk $0 \leq x \leq 360°$ adalah ….
5. Pada segitiga ABC lancip, diketahui $\cos A = \frac{4}{5}$ dan $\sin B = \frac{12}{13}$, maka $\sin C =$…

Turunan

Dimisalkan fungsi f terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat c. Turunan pertama dari fungsi f di titik c ditulis $f'(c)$ didefinisikan sebagai:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

jika limitnya ada. Apabila dilakukan penggantian $x = c + h$, jika $x \to c \leftrightarrow h \to 0$ dan $x - c = h$, turunan fungsi f di c dapat dituliskan dalam bentuk:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

- Jika suatu fungsi konstan, misal $f(x) = k$ untuk sembarang bilangan rill k, maka
$$\frac{d}{dx}[k] = 0.$$
- Jika n suatu bilangan bulat positif, maka:
$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$
- Jika f fungsi yang dapat diturunkan di x dan k sebarang bilangan rill, maka kf juga dapat diturunkan di x, yaitu:
$$\frac{d}{dx}[kf(x)] = k\frac{d}{dx}[f(x)]$$
- Jika f dan g fungsi yang dapat diturunkan di x, maka $f + g$ dan $f - g$ juga dapat diturunkan di x dan
$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$$
$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)]$$
- Jika f dan g dapat diturunkan di x, maka
$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$
- Jika f dan g dua fungsi yang dapat diturunkan di x, dan $g(x) \neq 0$ maka $\frac{f}{g}$ juga dapat diturunkan di x, dan
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

- Untuk turunan fungsi trigonometri sebagai berikut

$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$	$\frac{d}{dx}[\operatorname{cosec} x] = -\operatorname{cosec} x \cot x$
$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$	$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$
$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	$\frac{d}{dx}[\tan x] = -\operatorname{cosec}^2 x$

Contoh 1:

Menggunakan definisi turunan, tentukan turunan terhadap x dari $f(x) = \sqrt{x}$

<u>Jawaban</u>

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

Contoh 2:

Dapatkan turunan dari fungsi $f(x) = 2x(x^2 + 1)$

<u>Jawaban</u>

Misalkan $f(x) = j(x)k(x)$ dengan $j(x) = 2x$ dan $k(x) = x^2 + 1$, maka:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}[j(x)k(x)] \\
&= j(x)\frac{d}{dx}[k(x)] + k(x)\frac{d}{dx}[j(x)] \\
&= 2x(2x) + (x^2 + 1)(2)
\end{aligned}
$$

$$= \quad 4x^2 + 2x^2 + 2$$
$$= \quad 6x^2 + 2$$

Contoh 3:

Dapatkan turunan dari fungsi $f(x) = \sin 5x$

<u>Jawaban</u>

Misalkan $u(x) = 5x$, sehingga $f(x) = \sin u$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[5x]\frac{d}{du}[\sin u]$$
$$= 5\cos u$$
$$= 5\cos 5x$$

<u>Soal Latihan</u>

1. Carilah turunan fungsi berikut menggunakan definisi turunan
   a. $f(x) = x^2 + 5x$
   b. $f(x) = \sqrt{x+1}$
   c. $f(x) = \sin x$
2. Tentukan $f'(x)$ dan $f'(1)$ jika
   a. $f(x) = \sqrt{5}$
   b. $f(x) = 5\sqrt{x}$
   c. $f(x) = (2x^2 + 5)^3$
   d. $f(x) = \frac{3x^3 - 5x}{x^2}$
   e. $f(x) = x^2 \tan(2x + 1)$

Integral

A. Integral Tak Tentu

Secara geometri integral merupakan suatu luasan daerah pada kurva tertentu. Jika diberikan suatu fungsi $f(x)$ yang kontinu tak negatif pada interval $[a, b]$, maka yang dimaksud dengan

$$\int_a^b f(x)dx$$

adalah luasan dibawah kurva $f(x)$. Integral juga disebut sebagai **anti turunan**. Beberapa contoh integral tak tentu sebagai anti turunan dapat dilihat pada tabel berikut

Turunan	Anti Turunan
$\frac{d}{dx}[x] = 1$	$\int 1dx = x + C$
$\frac{d}{dx}[x^{n+1}] = x^n$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
$\frac{d}{dx}[-\cos x] = \sin x$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx}[-\cot x] = \operatorname{cosec} x$	$\int \operatorname{cosec} x\, dx = -\cot x + C$
$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$
$\frac{d}{dx}[-\operatorname{cosec} x] = \operatorname{cosec} x \cot x$	$\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + C$

Secara umum integral tak tentu dapat ditulis

$$\int ax^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C$$

Integral tak tentu mempunyai sifat – sifat sebagai berikut:

1. Pengali konstan dapat dikeluarkan dari operasi integral

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

2. Integral dari penjumlahan dan pengurangan fungsi integran dapat dinyatakan sebagai jumlahan atau pengurangan dari masing – masing integral fungsi yang berkaitan

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

B. Integral Dengan Substitusi

Selain mengintegralkan secara langsung, terdapat beberapa teknik pengintegralan, salah satunya integral dengan substitusi. Berikut langkah – langkah pengerjaan integral dengan teknik substitusi:

1. Tentukan suatu fungsi tertentu sebagai u, yaitu $u = g(x)$
2. Hitung $\frac{du}{dx} = g'(x)$
3. Substitusi $u = g(x)$ dan $du = g'(x)dx$. Perhatikan bahwa, pada step ini integrase harus dalam suku – suku u, sehingga tidak ada suku – suku variabel x.
4. Selesaikan integral tersebut (masih dalam suku - suku u).
5. Ganti kembali u dengan $g(x)$, sehingga diperoleh hasil dengan variabel x

Contoh 1:

Tentukan

$$\int 5x^{\frac{3}{5}}dx$$

<u>Jawaban</u>

$$\begin{aligned} \int 5x^{\frac{3}{5}}dx &= 5\int x^{\frac{3}{5}}dx \\ &= 5\left(\frac{1}{\frac{3}{5}+1}x^{\frac{3}{5}+1}\right) + C \\ &= 5\left(\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}}\right) + C \\ &= \frac{25}{8}x^{\frac{8}{5}} + C \end{aligned}$$

Contoh 2:

Tentukan $\int (2x^2 + 3)^{25} \cdot 4xdx$

<u>Jawaban</u>

Misalkan $u = 2x^2 + 3$, maka $\frac{du}{dx} = 4x$ dan $du = 4xdx$. Dengan demikian

$$\int (2x^2 + 3)^{25} \cdot 4xdx = \int (u)^{25}du$$

$$= \quad \frac{1}{25} u^{25+1} + C$$

$$= \quad \frac{1}{26} u^{26} + C$$

$$= \quad \frac{1}{26} (2x^2 + 3)^{26} + C$$

C. Integral Tentu

Integral tertentu merupakan suatu integral yang memiliki batas integrasi, yaitu batas bawah, yang disimbolkan dengan a dan batas atas, yang disimbolkan dengan b. Jika suatu integral memiliki batas, maka hasil integral tersebut adalah tunggal. Misalkan $F(x)$ merupakan suatu fungsi anti turunan dari fungsi $f(x)$ pada interval $[a, b]$, maka

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Berikut sifat – sifat dari integral tertentu:

1. Jika $a = b$ maka

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$$

2. Jika f adalah fungsi yang terintegral pada interval $[a, b]$, maka b

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3. Jika $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan fungsi yang dapat diintegralkan pada interval $[a, b]$ dan k adalah suatu konstanta, maka
   - $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$
   - $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

4. Jika $f(x)$ terintegralkan pada interval $[a, b]$, dimana c adalah suatu titik diantara interval $[a, b]$, maka

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5. Integral tertentu tidak bergantung pada variabel yang digunakan

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

6. Jika $f(x)$ dan $g(x)$ terintegralkan pada interval $[a, b]$ dan $f(x) \leq g(x)$ pada $x \in [a, b]$, maka

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Contoh 3:

Tentukan

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)dx$$

<u>Jawaban</u>

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx \\
&= -\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(-\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0)\right) + \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) \\
&= 1 + 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Contoh 4:

Diberikan

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 0 \\ 2x, & x < 0 \end{cases}.$$

Hitunglah $\int_{-1}^{1} f(x)dx$

<u>Jawaban</u>

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)dx &= \int_{-1}^{0} 2xdx + \int_0^1 x + 1dx \\
&= x^2|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}x^2 + x\Big|_0^1 \\
&= (0^2 - (-1)^2) + \left(\left(\frac{1}{2}(1)^2 + 1\right) - \left(\frac{1}{2}(0)^2 + 0\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Contoh 5:

Selesaikan integral berikut

$$\int_0^1 2x(x^2+3)^5 dx$$

<u>Jawaban</u>

Untuk contoh 5 dapat diselesaikan dengan dua cara:

- Cara 1:

Misalkan $u = x^2 + 3$, maka $\frac{du}{dx} = 2x$ dan $du = 2xdx$. Dengan demikian

$$\begin{aligned} \int_0^1 2x(x^2+3)^5 dx &= \int (u)^5 du \\ &= \frac{1}{6}u^6 + C \\ &= \frac{1}{6}(x^2+3)^6 + C \end{aligned}$$

Selanjutnya, batas integrasi dimasukkan sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \int_0^1 2x(x^2+3)^5 dx &= \frac{1}{6}(x^2+3)^6 \Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{6}(1^2+3)^6\right) - \left(\frac{1}{6}(0^2+3)^6\right) \\ &= \left(\frac{1}{6}(4)^6\right) - \left(\frac{1}{6}(3)^6\right) \\ &= \frac{4096}{6} - \frac{729}{6} \\ &= \frac{3367}{6} \end{aligned}$$

- Cara 2:

Misalkan $u = x^2 + 3$, maka $\frac{du}{dx} = 2x$ dan $du = 2xdx$. Jika $x = 0$ maka $u = 0^2 + 3 = 3$ dan jika $x = 1$ maka $u = 1^2 + 3 = 4$. Sehingga

$$\begin{aligned} \int_0^1 2x(x^2+3)^5 dx &= \int_3^4 u^5 du \\ &= \frac{1}{6}u^6 \Big|_3^4 \\ &= \frac{1}{6}(4)^6 - \frac{1}{6}(3)^6 \\ &= \frac{4096}{6} - \frac{729}{6} \end{aligned}$$

$$= \frac{3367}{6}$$

<u>Soal Latihan</u>

1. Selesaikan:
   a. $\int (x^2 + x^3) dx$
   b. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$
   c. $\int \sqrt[3]{t} dt$
   d. $\int \frac{t^2 - 2t^4}{t^4} dt$
   e. $\int \sin^2 x \, dx$
   f. $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx$
   g. $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx$
   h. $\int_{1}^{4} \frac{s^4 - 8}{s^2} ds$
   i. $\int_{0}^{1} x^3 \sqrt{x^2 + 3} dx$
   j. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \sec^2 x \, dx$