MATEMATIKA DASAR

Trigonometri

Mifta Nur Farid

28 Juli 2023

ELEKTRO ITK

itk Institut Teknologi Kalimantan

Pengukuran Sudut

- Konversi dari derajat ke radian:

$$\text{Besar sudut dalam radian} = \frac{\text{Besar sudut dalam derajat} \times \pi}{180^\circ}$$

- Konversi dari radian ke derajat:

$$\text{Besar sudut dalam derajat} = \frac{\text{Besar sudut dalam radian} \times 180^\circ}{\pi}$$

Contoh 1. Konversi sudut 60° menjadi radian.

Solusi.

$$\text{Besar sudut dalam radian} = \frac{60^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3} \text{ radian}$$

Jadi, sudut 60° setara dengan $\frac{\pi}{3}$ radian.

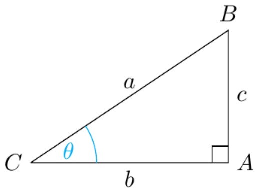
Contoh 2. Konversi sudut $\frac{3\pi}{4}$ radian menjadi derajat.

Solusi.

$$\text{Besar sudut dalam derajat} = \frac{\frac{3\pi}{4} \times 180^\circ}{\pi} = \frac{3 \times 180}{4} = 135^\circ$$

Jadi, sudut $\frac{3\pi}{4}$ radian setara dengan 135°.

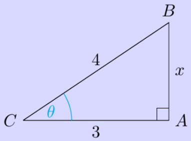
Trigonometri Segitiga Siku-Siku



Perhatikan segitiga siku-siku di atas. Kita definisikan 'rasio-rasio' trigonometri sebagai berikut.

1. $\sin\theta = \dfrac{c}{a}$
2. $\cos\theta = \dfrac{b}{a}$
3. $\tan\theta = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
4. $\csc\theta = \dfrac{a}{c} = \dfrac{1}{\sin\theta}$
5. $\sec\theta = \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{\cos\theta}$
6. $\cot\theta = \dfrac{b}{c} = \dfrac{1}{\tan\theta}$

Trigonometri Segitiga Siku-Siku



Contoh. Berdasarkan segitiga di samping, tentukan semua nilai rasio trigonometri terhadap sudut θ.

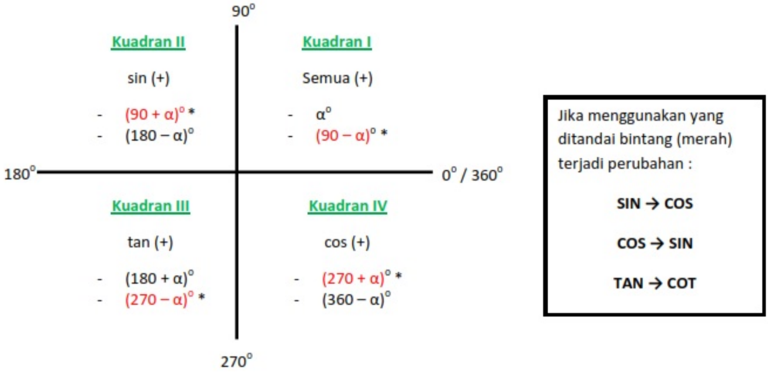
Solusi. Berdasarkan teorema Pythagoras, kita dapatkan bahwa nilai x adalah

$$x = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}.$$

Akibatnya nilai rasio-rasio trigonometri terhadap sudut θ adalah:

1. $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$
2. $\cos\theta = \dfrac{3}{4}$
3. $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$
4. $\csc\theta = \dfrac{4}{\sqrt{7}} = \dfrac{4}{7}\sqrt{7}$
5. $\sec\theta = \dfrac{4}{3}$
6. $\cot\theta = \dfrac{3}{\sqrt{7}} = \dfrac{3}{7}\sqrt{7}$

Trigonometri Sebagai Fungsi



Trigonometri Sebagai Fungsi

Contoh 1. Tentukan nilai dari $\sin 240^\circ$ dan $\cot 495^\circ$

Solusi. Perhatikan bahwa sudut 240° berada di kuadran III dan berlaku $240^\circ = 180^\circ + 60^\circ$. Artinya nilai sinusnya akan sama dengan nilai sinus 60^0 namun bertanda negatif. Jadi $\sin 240^\circ = -\sin 60^0 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Kemudian perhatikan bahwa $495^\circ = 360^\circ + 135^\circ$. Jadi $\cot 495^0 = \cot 135^\circ$ yang berada di kuadran II. Perhatikan bahwa $\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Akibatnya $\cot 135^\circ = \frac{\cos 135^\circ}{\sin 135^\circ} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = -1$.

Trigonometri Sebagai Fungsi

Contoh 2. Tentukan nilai dari $\sin \dfrac{16\pi}{3}$ dan $\sec\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)$.

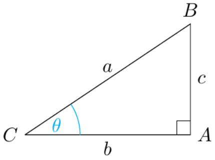
Solusi. Perhatikan bahwa $\dfrac{16\pi}{3} = 5\pi + \dfrac{\pi}{3}$ sehingga $\sin \dfrac{16\pi}{3} = \sin\left(4\pi + \pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin \dfrac{4\pi}{3}$. Tinjau pula bahwa $\dfrac{4\pi}{3}$ berada di kuadran III dan berlaku $\dfrac{4\pi}{3} = \pi + \dfrac{\pi}{3}$. Akibatnya

$$\sin \frac{16\pi}{3} = \sin \frac{4\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Perhatikan bahwa

$$\sec\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)} = \frac{1}{-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2}.$$

Identitas Trigonometri



Tinjau segitiga di samping. Teorema Pythagoras memberikan kita bahwa $a^2 = b^2 + c^2$. Perhatikan bahwa

1. $\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{a}{a}\right)^2$ sehingga $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
2. $\left(\frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ sehingga $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$
3. $\left(\frac{c}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \left(\frac{a}{c}\right)^2$ sehingga $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$.

Ketiga identitas ini juga berlaku untuk semua nilai θ.

Identitas Trigonometri

Kemudian, ada beberapa identitas lain trigonometri yang perlu diketahui sebagai berikut.

1. Aturan Penjumlahan

$$
\begin{aligned}
\sin(A+B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\
\cos(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\
\tan(A+B) &= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}
\end{aligned}
$$

Identitas Trigonometri

2. Aturan Pengurangan

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$
$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$
$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

3. Sudut Ganda

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$
$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$$
$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

4. Sudut Setengah

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$
$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$
$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

Identitas Trigonometri

5. Aturan Penjumlahan Fungsi atau Aturan Perkalian

$$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\tan A + \tan B = \frac{\sin A + \sin B}{\cos A \cos B}$$
$$\tan A - \tan B = \frac{\sin A - \sin B}{\cos A \cos B}$$

6. Sudut tiga kali lipat

$$\sin(3A) = 3\sin A - 4\sin^3 A$$
$$\cos(3A) = 4\cos^3 A - 3\cos A$$
$$\tan(3A) = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

Identitas Trigonometri

Contoh 1. Tentukan nilai dari $\sin 15^\circ$

Solusi. Perhatikan bahwa kita dapat menggunakan identitas

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - \sin 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Identitas Trigonometri

Contoh 2. Tentukan nilai dari $\cos 10^\circ \cos 80^\circ - \sin 10^\circ \sin 80^\circ$

Solusi. Perhatikan bahwa

$$\cos 10^\circ \cos 80^\circ - \sin 10^\circ \sin 80^\circ = \cos(10^\circ + 80^\circ) = \cos 90^\circ = 0.$$

Persamaan Trigonometri

Perhatikan bahwa persamaan trigonometri

1.
$$\sin x = \sin \theta$$

memiliki solusi

$$x = \theta + k \cdot 360^\circ \text{ atau } x = (180^\circ - \theta) + k \cdot 360^\circ$$

dengan k bilangan bulat.

Persamaan Trigonometri

2.

$$\cos x = \cos \theta$$

memiliki solusi

$$x = \theta + k \cdot 360^\circ \text{ atau } x = -\theta + k \cdot 360^\circ$$

dengan k bilangan bulat.

3.

$$\tan x = \tan \theta$$

memiliki solusi

$$x = \theta + k \cdot 180^\circ$$

dengan k bilangan bulat.

Persamaan Trigonometri

Contoh 1. Tentukan solusi dari $\sin\theta = \frac{1}{2}$.

Solusi. Sinus merupakan fungsi berperiode 360° sehingga kita perlu mencari nilai θ yang memenuhi di suatu selang dengan panjang 2π. Perhatikan bahwa $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. Akibatnya, solusinya adalah

$$x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ atau } x = (180^\circ - 30^\circ) + k \cdot 360^\circ = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$$

dengan k bilangan bulat.

Persamaan Trigonometri

Contoh 2. Tentukan solusi dari $tan^2\theta - 3 = 0$.

Solusi. Perhatikan bahwa

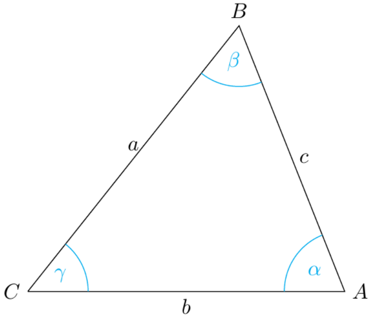
$$\begin{aligned} \tan^2\theta - 3 &= 0 \\ \tan^2\theta &= 3 \\ \tan\theta &= \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Karena tangen merupakan fungsi berperiode π sehingga pertama kita perlu mencari nilai yang memenuhi di suatu selang dengan panjang π. Pada interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ terdapat solusi berupa $\frac{\pi}{3}$ atau $-\frac{\pi}{3}$. Akibatnya solusinya adalah

$$x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 180^\circ \text{ atau } x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 180^\circ$$

dengan k bilangan bulat.

Aturan Sinus dan Cosinus



Aturan Sinus menyatakan bahwa

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

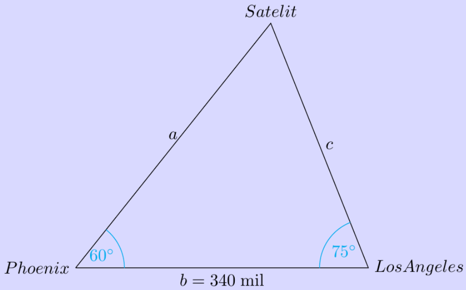
Aturan Cosinus menyatakan bahwa

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos\beta$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha$$

Aturan Sinus dan Cosinus

Contoh 1. Satelit yang mengorbit bumi melintasi di atas stasiun pengamatan di Phoenix dan Los Angeles, dengan jarak 340 mil di antara keduanya. Pada suatu saat ketika satelit berada di antara dua stasiun ini, sudut elevasinya secara bersamaan diamati menjadi 60° di Phoenix dan 75° di Los Angeles. Berapa jarak satelit dari Los Angeles?

Solusi. Perhatikan gambar berikut.



Aturan Sinus dan Cosinus

Misalkan jarak satelit dari Los Angeles dinyatakan oleh nilai c. Perhatikan bahwa sudut yang dibentuk oleh Phoenix, satelit, dan Los Angeles adalah $180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$. Dengan memanfaatkan aturan sinus, berlaku

$$\begin{aligned}\frac{c}{\sin 60^\circ} &= \frac{b}{\sin 45^\circ}\\ c &= \frac{340}{\sqrt{2}/2}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= 170\sqrt{6}\end{aligned}$$

Aturan Sinus dan Cosinus

Contoh 2. Sebuah segitiga memiliki panjang sisi-sisi sebagai berikut: $a = 10$ cm, $b = 12$ cm, dan $c = 15$ cm. Hitunglah besar sudut θ antara sisi a dan b.

Aturan Sinus dan Cosinus

Solusi. Aturan cosinus untuk segitiga dengan sisi-sisi a, b, dan c serta sudut θ yang merupakan sudut antara sisi a dan b adalah sebagai berikut:

$$\cos\theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Substitusi nilai panjang sisi-sisi segitiga:

$$\cos\theta = \frac{(10 \ \ \mathrm{cm})^2 + (12 \ \ \mathrm{cm})^2 - (15 \ \ \mathrm{cm})^2}{2 \times 10 \ \ \mathrm{cm} \times 12 \ \ \mathrm{cm}}$$

$$\cos\theta = \frac{100 + 144 - 225}{240} = \frac{19}{240}$$

Jadi, besar sudut θ adalah:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{240}\right) \approx 87.56^\circ$$