

# Interpolasi

Tim Dosen

MK Metode Numerik

# Definisi interpolasi

- Adalah mencari nilai suatu fungsi yang tidak diketahui diantara beberapa nilai fungsi yang diketahui pada tabel fungsi tersebut

# Definisi interpolasi

$x$	$f(x)$
0.0	0.000
0.2	0.406
0.4	0.846
0.6	1.368
0.8	2.060
1.0	3.114
1.2	5.114

- Contoh mencari nilai fungsi  $f(0.1)$ ,  $f(0.35)$  dan  $f(1.11)$
- **Interpolasi balik** = mencari nilai  $x$  dari variable  $f(x)$
- Contoh mencari nilai  $x$  untuk  $f(x)=3.015$  atau  $f(x)=1.555$

# Equispaced vs Non-Equispaced

- **Tabel equispaced** = tabel yang mempunyai nilai beda variabel yang sama ( $\Delta x = \text{konstan}$ )
- **Tabel non-equispaced** = tabel yang **tidak** mempunyai nilai beda variabel yang sama ( $\Delta x$  tidak konstan)

# Tabel beda hingga

x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$	$\Delta^6 f(x)$
0.0	0.000						
		0.406					
0.2	0.406		0.034				
		0.440		0.048			
0.4	0.846		0.082		0.040		
		0.552		0.088		0.064	
0.6	1.368		0.170		0.104		0.254
		0.692		0.192		0.318	
0.8	2.060		0.361		0.422		
		1.054		0.614			
1.0	3.114		0.976				
		2.030					
1.2	5.114						

# Penyelesaian Persoalan Interpolasi

- Newton Gregory Forward
- Newton Gregory Backward
- Stirling
- Lagrange
- Hermitte

# Newton Gregory Forward

- Menyelesaikan masalah interpolasi dengan persamaan

$$f(x_s) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \dots + \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)}{n!} \Delta^n f_0$$

dimana

$$s = \frac{x_s - x_0}{x_1 - x_0}$$

# Kelemahan NGF

- Hanya dapat digunakan menyelesaikan persoalan interpolasi equispaced
- Menyelesaikan permasalahan untuk nilai  $x_s$  terletak diantara  $x_0$  dan  $x_1$
- Tidak dapat menyelesaikan persoalan interpolasi balik



# Keuntungan NGF

- Metode yang efektif untuk mencari nilai  $f(x)$  di sekitar titik awal

# Tabel beda NGF

s	x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
0	$x_0$	$f_0$	$\Delta f_0$	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$	$\Delta^5 f_0$
1	$x_1$	$f_1$	$\Delta f_1$	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	$\Delta^4 f_1$	
2	$x_2$	$f_2$	$\Delta f_2$	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_2$		
3	$x_3$	$f_3$	$\Delta f_3$	$\Delta^2 f_3$			
4	$x_4$	$f_4$	$\Delta f_4$				
5	$x_5$	$f_5$					

# Contoh soal

n	<b>x</b>	<b>f(x)</b>
0	1.0	1.449
1	1.3	2.060
2	1.6	2.645
3	1.9	3.216
4	2.2	3.779
5	2.5	4.338
6	2.8	4.898

- Carilah nilai  $f(x_s)$  pada  $x_s=1.03$  dengan metode NGF

# Solusi

s	x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$	$\Delta^6 f(x)$
0	1.0	1.449	0.611	-0.026	0.012	-0.006	0.004	-0.01
1	1.3	2.060	0.585	-0.014	0.006	-0.002	0.003	
2	1.6	2.645	0.571	-0.008	0.004	0.001		
3	1.9	3.216	0.563	-0.004	0.005			
4	2.2	3.779	0.559	0.001				
5	2.5	4.338	0.560					
6	2.8	4.898						

# Solusi

Nilai  $s$  diperoleh

$$s = \frac{x_s - x_0}{h} = \frac{1.03 - 1}{1.3 - 1} = 0.1$$

Nilai yang digunakan pada tabel beda digunakan pada persamaan NGF

# Solusi

- Dari hasil tersebut diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_s) = & f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \\ & \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{4!} \Delta^4 f_0 + \\ & \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)}{5!} \Delta^5 f_0 + \\ & \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)(s-5)}{6!} \Delta^6 f_0 \\ & = 1.5118136 \end{aligned}$$

# Newton Gregory Backward

- Menyelesaikan masalah interpolasi dengan persamaan

$$f(x_s) = f_0 + s\Delta f_{-1} + \frac{s(s+1)}{2!} \Delta^2 f_{-2} + \dots + \frac{s(s+1)(s+2)\dots(s+n-1)}{n!} \Delta^n f_{-n}$$

dimana

$$s = \frac{x_s - x_0}{h}$$

# Kelemahan NGB

- Hanya dapat digunakan menyelesaikan persoalan interpolasi equispaced
- Menyelesaikan permasalahan untuk nilai  $x_s$  terletak diantara  $x_0$  dan  $x_1$
- Tidak dapat menyelesaikan persoalan interpolasi balik



# Keuntungan NGB

- Metode yang efektif untuk mencari nilai  $f(x)$  di sekitar titik akhir

# Tabel beda NGB

s	x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
-5	$x_{-5}$	$f_{-5}$	$\Delta f_{-5}$				
-4	$x_{-4}$	$f_{-4}$	$\Delta f_{-4}$	$\Delta^2 f_{-5}$			
-3	$x_{-3}$	$f_{-3}$	$\Delta f_{-3}$	$\Delta^2 f_{-4}$	$\Delta^3 f_{-5}$	$\Delta^4 f_{-5}$	
-2	$x_{-2}$	$f_{-2}$	$\Delta f_{-2}$	$\Delta^2 f_{-3}$	$\Delta^3 f_{-4}$	$\Delta^4 f_{-4}$	$\Delta^5 f_{-5}$
-1	$x_{-1}$	$f_{-1}$	$\Delta f_{-1}$	$\Delta^2 f_{-2}$	$\Delta^3 f_{-3}$		
0	$x_0$	$f_0$					

# Contoh soal

n	<b>x</b>	<b>f(x)</b>
-6	1.0	1.449
-5	1.3	2.060
-4	1.6	2.645
-3	1.9	3.216
-2	2.2	3.779
-1	2.5	4.338
0	2.8	4.898

- Carilah nilai  $f(x_s)$  pada  $x_s = 2.67$  dengan metode NGB

# Solusi

s	x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$	$\Delta^6 f(x)$
-6	1.0	1.449	0.611					
-5	1.3	2.060	0.585	-0.026	0.012			
-4	1.6	2.645	0.571	-0.014	0.006	-0.006		
-3	1.9	3.216	0.563	-0.008	0.004	-0.002	0.004	-0.01
-2	2.2	3.779	0.559	-0.004	0.005	0.001	0.003	
-1	2.5	4.338	0.560	0.001				
0	2.8	4.898						

# Solusi

Nilai  $s$  diperoleh

$$s = \frac{x_s - x_0}{h} = \frac{2.67 - 2.8}{1.3 - 1} = -0.4333$$

Nilai yang digunakan pada tabel beda digunakan pada persamaan NGB

# Solusi

- Dari hasil tersebut diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_s) = & f_0 + s\Delta f_{-1} + \frac{s(s+1)}{2!} \Delta^2 f_{-2} + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!} \Delta^3 f_{-3} + \\ & \frac{s(s+1)(s+2)(s+3)}{4!} \Delta^4 f_{-4} + \\ & \frac{s(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}{5!} \Delta^5 f_{-5} + \\ & \frac{s(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)(s+5)}{6!} \Delta^6 f_{-6} \\ & = 4.654783 \end{aligned}$$

# Stirling Method

- Menyelesaikan masalah interpolasi dengan persamaan

$$\begin{aligned}
 f(x_s) = & f_0 + \left| \begin{smallmatrix} s \\ 1 \end{smallmatrix} \right| \frac{\Delta f_{-1} + \Delta f_0}{2} + \frac{\left| \begin{smallmatrix} s+1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right| + \left| \begin{smallmatrix} s \\ 2 \end{smallmatrix} \right|}{2} \Delta^2 f_{-1} + \\
 & \left| \begin{smallmatrix} s+1 \\ 3 \end{smallmatrix} \right| \frac{\Delta^3 f_{-2} + \Delta^3 f_{-1}}{2} + \frac{\left| \begin{smallmatrix} s+2 \\ 4 \end{smallmatrix} \right| + \left| \begin{smallmatrix} s+1 \\ 4 \end{smallmatrix} \right|}{2} \Delta^4 f_{-2} + \\
 & \left| \begin{smallmatrix} s+2 \\ 5 \end{smallmatrix} \right| \frac{\Delta^5 f_{-3} + \Delta^5 f_{-2}}{2} + \frac{\left| \begin{smallmatrix} s+3 \\ 6 \end{smallmatrix} \right| + \left| \begin{smallmatrix} s+2 \\ 6 \end{smallmatrix} \right|}{2} \Delta^6 f_{-3} + \dots
 \end{aligned}$$

# Stirling Method

dimana

$$s = \frac{x_s - x_0}{h}$$

sedangkan

$$\left| \begin{matrix} s + j \\ k \end{matrix} \right| = \frac{(s + j)(s + j - 1)(s + j - 2) \dots (s + j - k + 1)}{k!}$$



# Kelemahan Stirling

- Hanya dapat digunakan menyelesaikan persoalan interpolasi equispaced
- Menyelesaikan permasalahan untuk nilai  $x_s$  terletak diantara  $x_0$  dan  $x_1$
- Tidak dapat menyelesaikan persoalan interpolasi balik

# Keuntungan Stirling

- Metode yang efektif untuk mencari nilai  $f(x)$  di sekitar titik tengah

# Solusi

s	x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$	$\Delta^6 f(x)$
-3	$x_{-3}$	$f_{-3}$	$\Delta f_{-3}$					
-2	$x_{-2}$	$f_{-2}$	$\Delta f_{-2}$	$\Delta^2 f_{-3}$	$\Delta^3 f_{-3}$			
-1	$x_{-1}$	$f_{-1}$	$\Delta f_{-1}$	$\Delta^2 f_{-2}$	$\Delta^3 f_{-2}$	$\Delta^4 f_{-3}$	$\Delta^5 f_{-3}$	
0	$x_0$	$f_0$	$\Delta f_0$	$\Delta^2 f_{-1}$	$\Delta^3 f_{-1}$	$\Delta^4 f_{-2}$	$\Delta^5 f_{-2}$	$\Delta^6 f_{-3}$
1	$x_1$	$f_1$	$\Delta f_1$	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_{-1}$		
2	$x_2$	$f_2$	$\Delta f_2$	$\Delta^2 f_1$				
3	$x_3$	$f_3$						

# Contoh soal

n	<b>x</b>	<b>f(x)</b>
-3	1.0	1.449
-2	1.3	2.060
-1	1.6	2.645
0	1.9	3.216
1	2.2	3.779
2	2.5	4.338
3	2.8	4.898

- Carilah nilai  $f(x_s)$  pada  $x_s = 1.87$  dengan metode stirling

# Solusi

s	x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$	$\Delta^6 f(x)$
-3	1.0	1.449	0.611					
-2	1.3	2.060	0.585	-0.026				
-1	1.6	2.645	0.571	-0.014	0.012			
0	1.9	3.216	0.563	-0.008	0.006	-0.006	0.004	
1	2.2	3.779		-0.004	0.004	-0.002	0.003	-0.01
2	2.5	4.338	0.559			0.001		
3	2.8	4.898	0.560	0.001	0.005			

# Solusi

Nilai  $s$  diperoleh

$$s = \frac{x_s - x_0}{h} = \frac{1.87 - 1.9}{1.3 - 1} = -0.1$$

Nilai yang digunakan pada tabel beda digunakan pada persamaan stirling

# Solusi

$$\begin{aligned} f(x_s) = & f_0 + \left| \frac{s}{1} \right| \frac{\Delta f_{-1} + \Delta f_0}{2} + \frac{\left| \frac{s+1}{2} \right| + \left| \frac{s}{2} \right|}{2} \Delta^2 f_{-1} + \\ & \left| \frac{s+1}{3} \right| \frac{\Delta^3 f_{-2} + \Delta^3 f_{-1}}{2} + \frac{\left| \frac{s+2}{4} \right| + \left| \frac{s+1}{4} \right|}{2} \Delta^4 f_{-2} + \\ & \left| \frac{s+2}{5} \right| \frac{\Delta^5 f_{-3} + \Delta^5 f_{-2}}{2} + \frac{\left| \frac{s+3}{6} \right| + \left| \frac{s+2}{6} \right|}{2} \Delta^6 f_{-3} \\ = & 3.159402 \end{aligned}$$

# Lagrange Method

- Menyelesaikan masalah interpolasi dengan persamaan

$$f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} f_0 +$$
$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} f_1 +$$
$$\dots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})} f_n$$

- Bagian denominator  $\neq x_n - x_n$



# Keuntungan Lagrange

- Dapat digunakan menyelesaikan persoalan interpolasi equispaced dan non equispaced
- Dapat menyelesaikan persoalan interpolasi dan interpolasi balik
- Dapat digunakan untuk mencari nilai  $f(x)$  di sekitar titik awal, tengah, dan akhir
- Tidak membutuhkan tabel beda dalam penyelesaian masalah

# Kelemahan Lagrange

- Jika nilai variabel dan nilai fungsi terlalu banyak, maka perhitungan menjadi kompleks

# Contoh soal

n	x	f(x)
0	1.0	0.00000
1	1.2	0.26254
2	1.5	0.91230
3	1.9	2.31709
4	2.1	3.27194
5	2.5	5.72682
6	3.0	9.88751

- Carilah nilai  $f(x)$  pada  $x=1.03$  dengan metode lagrange

# Solusi

- Untuk  $x=1.03$

$$\begin{aligned} f(1.03) = & \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)(x_0-x_5)(x_0-x_6)} f_0 + \\ & \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)(x_1-x_6)} f_1 + \\ & \dots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)}{(x_6-x_0)(x_6-x_1)(x_6-x_2)(x_6-x_3)(x_6-x_4)(x_6-x_5)} f_6 \end{aligned}$$

$$f(1.03) = 0.031352$$

# Hermitte Method

- Menyelesaikan masalah interpolasi dengan persamaan

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{\sin(x-x_1)\sin(x-x_2)\dots\sin(x-x_n)}{\sin(x_0-x_1)\sin(x_0-x_2)\dots\sin(x_0-x_n)} f_0 + \\ & \frac{\sin(x-x_1)\sin(x-x_2)\dots\sin(x-x_n)}{\sin(x_1-x_0)\sin(x_1-x_2)\dots\sin(x_1-x_n)} f_1 + \\ & \dots + \frac{\sin(x-x_1)\sin(x-x_2)\dots\sin(x-x_n)}{\sin(x_n-x_1)\sin(x_n-x_2)\dots\sin(x_n-x_{n-1})} f_n \end{aligned}$$

- Bagian denominator  $\neq x_n - x_n$

# Keuntungan Hermitte

- Dapat digunakan menyelesaikan persoalan interpolasi equispaced dan non equispaced
- Dapat menyelesaikan persoalan interpolasi dan interpolasi balik
- Dapat digunakan untuk mencari nilai  $f(x)$  di sekitar titik awal, tengah, dan akhir
- Tidak membutuhkan tabel beda dalam penyelesaian masalah
- Hanya efektif untuk persoalan dengan metode periodik

# Kelemahan Lagrange

- Jika nilai variabel dan nilai fungsi terlalu banyak, maka perhitungan menjadi kompleks

# Contoh soal

n	x	f(x)
0	2.823	0.31323
1	3.016	0.12526
2	3.458	-0.31115
3	4.398	-0.95099
4	5.655	-0.58768

- Carilah nilai  $f(x)$  pada  $x=3.535$  dengan metode hermitte



# Solusi

- Untuk  $x=3.535$

$$\begin{aligned} f(3.535) = & \frac{\sin(x-x_1)\sin(x-x_2)\sin(x-x_3)\sin(x-x_4)}{\sin(x_0-x_1)\sin(x_0-x_2)\sin(x_0-x_3)\sin(x_0-x_4)} f_0 + \\ & \frac{\sin(x-x_1)\sin(x-x_2)\sin(x-x_3)\sin(x-x_4)}{\sin(x_1-x_0)\sin(x_1-x_2)\sin(x_1-x_3)\sin(x_1-x_4)} f_1 + \\ & \dots + \frac{\sin(x-x_1)\sin(x-x_2)\sin(x-x_3)\sin(x-x_4)}{\sin(x_4-x_0)\sin(x_4-x_1)\sin(x_4-x_2)\sin(x_4-x_3)} f_4 \end{aligned}$$

$$f(3.535) = -0.20365$$