

METODE NUMERIK

Pengantar Metode Numerik

Tim Dosen Pengampu

Apa itu Metode Numerik?

- ▶ **Numerik:** berhubungan dengan angka.
- ▶ **Metode:** cara yang sistematis untuk menyelesaikan persoalan guna mencapai tujuan yang ditentukan.
- ▶ **Metode Numerik:** cara sistematis untuk menyelesaikan persoalan matematika dengan operasi angka (+, -, *, /).

Contoh persoalan matematika

1. Tentukan akar-akar persamaan polinom:

$$23.4x^7 - 1.25x^6 + 120x^4 + 15x^3 - 120x^2 - x + 100 = 0$$

2. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan:

$$\sqrt{27.8e^{5x} - \frac{1}{x}} = \cos^{-1} \frac{(120x^2 + \sqrt{2x})}{17x - 65}$$

3. Hitung nilai integral-tentu berikut:

$$\int_{1.2}^{2.5} \left(\sqrt{\left(45.3e^{7x} + \frac{100}{x} \right)^4} + \frac{4}{(x^2 + 1)} \right) dx$$

4. Diberikan persamaan differensial biasa (PDB) dengan sebuah nilai awal:

$$150y'' + 2y't = \frac{\sqrt{\ln(21t + 40)}y}{t^2} + 120; \quad \underline{y(0) = 1}$$

Hitung nilai y pada saat $t = 1.8$

5. Selesaikan sistem persamaaan linear:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & 1.2a - 3b - 12c + 12d + 4.8e - 5.5f + 100g = 18 \\ \textcircled{2} \quad & 0.9a + 3b - c + 16d + 8e - 5f - 10g = 17 \\ \textcircled{3} \quad & 4.6a + 3b - 6c - 2d + 4e + 6.5f - 13g = 19 \\ \textcircled{4} \quad & 3.7a - 3b + 8c - 7d + 14e + 8.4f + 16g = 6 \\ \textcircled{5} \quad & 2.2a + 3b + 17c + 6d + 12e - 7.5f + 18g = 9 \\ \textcircled{6} \quad & 5.9a + 3b + 11c + 9d - 5e - 25f - 10g = 0 \\ \textcircled{7} \quad & 1.6a + 3b + 1.8c + 12d - 7e + 2.5f + g = -5 \\ & \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \end{aligned}$$

Cara penyelesaian persoalan matematika

- ▶ Cara penyelesaian persoalan matematika ada 2:
 1. Secara analitik: menggunakan rumus dan teoremayang sudah baku di dalam matematika → metode analitik.
 2. Secara numerik: menggunakan pendekatan aproksimasi untuk mencari solusi hanya dengan operasi aritmatika biasa → metode numerik.
 $+, -, \times, \div$

Contoh 1

$x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow$ Carilah akar-akarnya!

1. Metode analitik: faktorkan menjadi

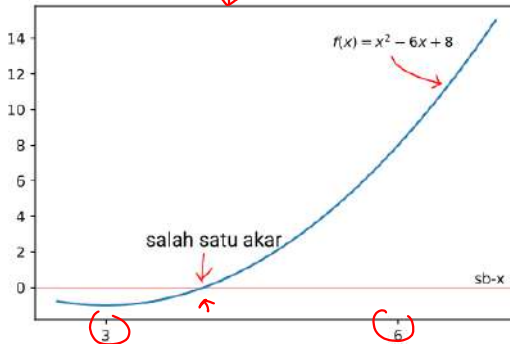

$$(x - 4)(x - 2) = 0$$


$$x - 4 = 0 \rightarrow x_1 = 4$$


$$x - 2 = 0 \rightarrow x_2 = 2$$

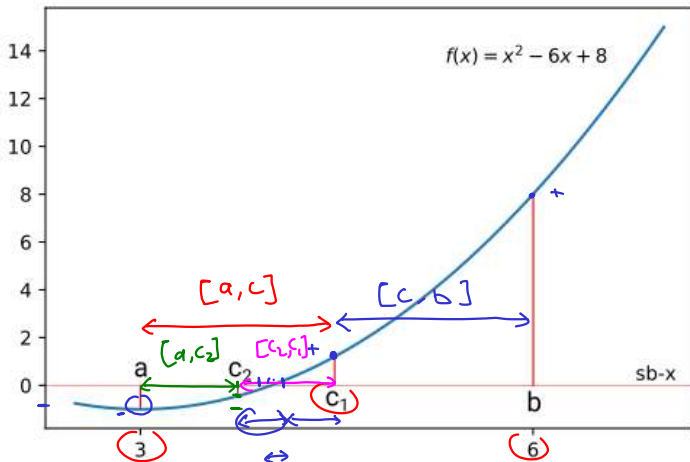


2. Metode Numerik: Diketahui sebuah akar terletak di dalam selang $[3, 6]$ → mengapa?



Pendekatan sederhana mencari akar adalah secara iteratif dengan **metode titik tengah** (*bisection method*)

1. bagi selang $[a, b]$ menjadi dua dengan titik tengah,
$$c = (a + b)/2$$
2. ada dua sub-selang: $[a, c]$ dan $[c, b]$. Pilih selang iterasi yang baru dengan syarat nilai fungsi di ujung selang berbeda tanda.
3. ulangi langkah 1 dan 2 sampai ukuran selang $< \varepsilon$ (epsilon adalah nilai yang sangat kecil yang menyatakan toleransi kesalahan akar yang diinginkan, misalnya $\varepsilon = \underline{0.001}, \underline{0.000001}$, dsb)



- Mencari akar $f(x) = x^2 - 6x + 8 = 0$ di dalam selang $[3, 6]$ dengan $\varepsilon = 0.0005$

Iterasi	a	c	b	f(a)	f(c)	f(b)	Selang Baru	Lebar
1	3	4,5	6	-1	1,25	8	[a, c]	1,5
2	3	3,75	4,5	-1	-0,4375	1,25	[c, b]	0,75
3	3,75	4,125	4,5	-0,4375	0,265625	1,25	[a, c]	0,375
4	3,75	3,9375	4,125	-0,4375	-0,121094	0,265625	[c, b]	0,1875
5	3,9375	4,03125	4,125	-0,121094	0,063477	0,265625	[a, c]	0,09375
6	3,9375	3,984375	4,03125	-0,121094	-0,031006	0,063477	[c, b]	0,046875
7	3,984375	4,007813	4,031250	-0,031006	0,015686	0,063477	[a, c]	0,023438
8	3,984375	3,996094	4,007813	-0,031006	-0,007797	0,015686	[c, b]	0,011719
9	3,996094	4,001953	4,007813	-0,007797	0,003910	0,015686	[a, c]	0,005859
10	3,996094	3,999023	4,001953	-0,007797	-0,001952	0,003910	[c, b]	0,002930
11	3,999023	4,000488	4,001953	-0,001952	0,000977	0,003910	[a, c]	0,001465
12	3,999023	3,999756	4,000488	-0,001952	-0,000488	0,000977	[c, b]	0,000732
13	3,999756	4,000122	4,000488	-0,000488	0,000244	0,000977	[a, c]	0,000366

0,01

STOP

0,000001

- Aproksimasi akar = 4.000122

Contoh 2

Hitung integral $\int_{-1}^1 (4 - x^2) dx$

1. Metode analitik.

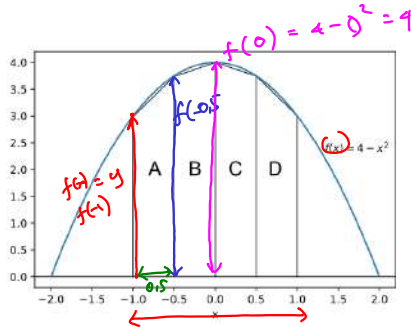
Persamaan:

$$\int ax^n dx = \frac{1}{n+1} ax^{n+1} + C$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (4 - x^2) dx &= \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{x=-1}^{x=1} \\ &= \left[4(1) - \frac{1}{3}(1) \right] - \left[4(-1) - \frac{1}{3}(-1) \right] \\ &= \frac{22}{3} = 7.33\end{aligned}$$

2. Metode numerik.

Nilai integral = luas daerah di bawah kurva



Luas trapesium = (jumlah sisi sejajar \times tinggi) / 2

Nilai integral \approx Total luas trapesium

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (4 - x^2) dx &\approx A + B + C + D \\ &\approx \underbrace{\{([f(-1) + f(-0.5)] \times 0.5)/2\}}_{\text{L.A}} \\ &\quad + \{([f(-0.5) + f(0)] \times 0.5)/2\} \text{ } \text{L.B} \\ &\quad + \{([f(0) + f(0.5)] \times 0.5)/2\} \text{ } \text{L.C} \\ &\quad + \{([f(0.5) + f(1)] \times 0.5)/2\} \text{ } \text{L.D} \\ &\approx 0.5/2 \{f(-1) + 2f(-0.5) + 2f(0) + 2f(0.5) + f(1)\} \\ &\approx 0.5/2 \{3 + 7.5 + 8 + 7.5 + 3\} \\ &\approx \boxed{7.25}\end{aligned}$$

Perbedaan analitik dan numerik

- ▶ Perbedaan solusi antara metode analitik dengan metode numerik:
 - ▶ Solusi dengan metode analitik: eksak (tepat tanpa ada kesalahan)
 - ▶ Solusi dengan metode numerik: hampiran atau aproksimasi (tidak tepat sama dengan solusi eksak, selalu ada kesalahan)
- ▶ Kesalahan dalam solusi numerik disebut galat (error)
- ▶ Galat dapat diperkecil dengan mengubah parameter di dalam metode numerik (misalnya ϵ , lebar trapesium, dsb)

Kelebihan metode numerik

- ▶ Metode numerik dapat menyelesaikan persoalan matematika yang tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik.
- ▶ Apakah metode analitik mampu mencari akar persamaan di bawah ini?

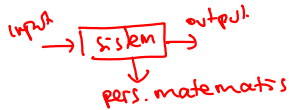
$$\sqrt{27.8e^{5x} - \frac{1}{x}} = \cos^{-1} \frac{(120x^2 + \sqrt{2x})}{17x - 65}$$

- ▶ Apakah metode analitik mampu mencari nilai integral berikut ini?

$$\int_{1.2}^{2.5} \left(\sqrt{\left(45.3e^{7x} + \frac{100}{x} \right)^4} + \frac{4}{(x^2 + 1)} \right) dx$$

- ▶ **Metode numerik mampu menyelesaikan persoalan di atas!**

- ▶ Metode numerik membutuhkan banyak operasi aritmetika yang berulang.
- ▶ Oleh karena itu, komputer berguna untuk membantu perhitungan. Komputer menjadi kebutuhan yang penting dalam metode numerik.
- ▶ Metode numerik pada dasarnya adalah suatu algoritma sehingga dapat diprogram.
- ▶ Bahasa pemrograman yang akan digunakan dalam perkuliahan ini adalah Python dengan IDE (*integrated development environments*) Spyder atau Google Colab (jika selalu memiliki akses internet)
 - ▶ Spyder: [▶ Link](#) → offline
 - ▶ Google colab: [▶ Link](#) →



► Tahapan penyelesaian persoalan secara numerik:

1. Pemodelan
2. Penyederhanaan model → *hitungkan parameter*
3. Formulasi numerik: menentukan metode ~~numerik~~ yang dipakai dan membuat algoritma penyelesaian *numerik*
4. Pemrograman: coding
5. Pengujian: tes dengan data uji
6. Evaluasi: menganalisis hasil numerik

► Tahap 1 dan 2 adalah pekerjaan ahli yang sesuai dengan bidangnya.

► Tahap 3 dan 4 adalah tugas *electrical engineering*;

► Tahap 5 dan 6 melibatkan *electrical engineering* dan ahli yang sesuai dengan bidangnya

Apa yang dipelajari di dalam metode numerik?

1. Solusi persamaan non-linear
2. Solusi sistem persamaan linear
3. Interpolasi polinom ← interpolasi regresi.
4. Turunan numerik
5. Integrasi numerik
6. Solusi persamaan diferensial biasa dengan nilai awal

Penilaian kuliah



1. Kehadiran 10 %
2. Tugas 10 % → Pengumpulan & akhir sesi → minggu depan
3. Kuis 20 % → Kuis 1 : Mg. 4
Kuis 2 : Mg. 12
4. UTS 30 % → Mg. 8
5. UAS 30 % → Mg. 16

materi
yg tdk
dipahami

Asinkron → video materi, slide, bahan baca lain
Sinkron → evaluasi : bagian yg tdk dipahami → Forum

*Silahkan
download
di LMS.*

► Utama

1. Kharab, A. & Guenther, R.B. (2019). An Introduction to Numerical Methods: A Matlab Approach 4th Edition. Florida: CRC Press.
2. Rinaldi, M. (2005). Metode Numerik. Bandung: Informatika Bandung

► Pendamping

1. Kiusalaas, J. (2013). Numerical Methods in Engineering With Python 3. New York: Cambridge University Press.