FIBONACCIJEVI BROJEVI

Mihaela Gamulin

5. lipnja 2018.

„The Fibonacci Sequence turns out to be the key to understanding how nature designs. And is a part of the same ubiquitous music of the spheres that builds harmony into atoms, molecules, crystals, shells, suns and galaxies and makes the Universe sing."

Guy Murchie,
The Seven Mysteries of Life

Sadržaj

1 Uvod

Fibonaccijev niz brojeva jedan je od najpoznatijih nizova brojeva u svijetu. Ime je dobio po matematičaru srednjeg vijeka, talijanu Leonardu Pisanu, koji je poznatiji pod imenom (pogađate) Fibonacci.
Priča je započela kada je Pisano postavio matematički problem razmnožavanja zečeva koji glasi ovako:

„Seljak uzgaja zečeve. Svaki par zečeva, starih barem dva mjeseca, dobiju svakog mjeseca par mladih: zeca i zečicu. Zečevi nikad ne umiru. Ako na početku krećemo s jednim novorođenim parom, koliko će biti ukupno parova zečeva nakon n mjeseci?”[1]

Ako razmislimo o problemu, zaključujemo da na kraju prvog mjeseca imamo jedan par te na kraju drugog mjeseca također jedan par. Na kraju trećeg mjeseca imamo dva para jer dobivaju dvoje malih zečeva. Na kraju četvrtog mjeseca seljak ima $2 + 1 = 3$ para. Ako nastavimo istim načinom razmišljanja, dobivamo upravo niz:

$$0\ 1\ 1\ 2\ 3\ 5\ 8\ 13\ 21\ 34\ 55\ 89\ 144\ 233\ 377\ 610$$

Ovi brojevi su sveprisutni u svijetu, pojavljuju se u geometriji, algebri, teoriji brojeva, ...
No, što je najzanimljivije, pojavljuju se u prirodi i umjetnosti. I upravo to čini matematiku kao znanost još ljepšom.

[1]Pisano je ovaj problem iskazao u svojoj knjizi „Liber Abaccija”.

2 Osnovno o Fibonaccijevom nizu

2.1 Definicije

Definicija 1. Niz (F_n) zadan je početnim vrijednostima $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, te rekurzivnom relacijom

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \tag{1}$$

za sve $n \geq 2$, naziva se ***Fibonaccijev niz***. Opći član niza F_n još zovemo ***n-ti Fibonaccijev broj***.

Ponekad inicijaliziramo niz s $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$. Svaki rekurzivan niz, pa tako i Fibonaccijev, ovisi o zadanim početnim uvjetima.

Definicija 2. Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$. Niz (G_n) zadan početnim vrijednostima $G_0 = a$, $G_1 = b$, te rekurzivnom relacijom

$$G_{n+1} = G_n + G_{n-1}, \tag{2}$$

za $n \geq 1$, naziva se ***generalizirani Fibonaccijev niz***.

Raspisivanjem prvih nekoliko članova generaliziranog Fibonaccijevog niza

$$\begin{aligned}
G_2 &= a + b, \\
G_3 &= a + 2b, \\
G_4 &= 2a + 3b, \\
G_5 &= 3a + 5b, \\
G_6 &= 5a + 8b, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

uočavamo da se kao koeficijenti pojavljuju članovi običnog Fibonaccijevog niza (Definicija 1). Vrijedi sljedeća propozicija:

Propozicija 3. *Ako je (G_n) generalizirani Fibonaccijev niz određen početnim vrijednostima $G_0 = a$ i $G_1 = b$, onda vrijedi $G_n = aF_{n-1} + bF_n$, za sve $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 2$.*

Dokaz. Tvrdnju ćemo pokazati pomoću matematičke indukcije. Baza vrijedi jer za $n = 2$ imamo:

$$G_2 = aF_1 + bF_2 = a + b.$$

Pretpostavimo da tvrdnja

$$G_k = aF_{k-1} + bF_k$$

vrijedi za sve $k \in \mathbb{N}$ i $2 \leq k \leq n$. Pokažimo da tvrdnja vrijedi i za $k = n + 1$:

$$\begin{aligned} G_{n+1} = G_n + G_{n-1} = (P.I.) &= aF_{n-1} + bF_n + aF_{n-2} + bF_{n-1} \\ &= a(F_{n-1} + F_{n-2}) + b(F_n + F_{n-1}) = aF_n + bF_{n+1} \end{aligned}$$

□

2.2 Binetova formula

Binet je 1843. godine izveo formulu za eksplicitno računanje Fibonaccijevih brojeva te je ona dana sljedećim teoremom:

Teorem 4. ***(Binetova formula za Fibonaccijeve brojeve)*** *Vrijedi*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \tag{3}$$

za sve $n \geq 1$.

Također vrijede i sljedeći identiteti: (za ostale pogledati [3] i [1]).

Propozicija 5. *Vrijedi*

$$F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n, \tag{4}$$

za sve $n, m \geq 1$.

Propozicija 6. *Vrijedi*

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1, \tag{5}$$

za $n \geq 0$.

Dokaz. Formulu dobivamo zbrajanjem sljedećih osnovnih relacija

$$\begin{aligned} F_1 &= F_3 - F_2, \\ F_2 &= F_4 - F_3, \\ &\vdots \\ F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n, \\ F_n &= F_{n+2} - F_{n+1}. \end{aligned}$$

□

Primjer 7. *Kvadrati Fibonaccijevih brojeva čine zanimljivu shemu:*

$$\begin{aligned} 1^2 + 1^2 &= 1 \cdot 2 \\ 1^2 + 1^2 + 2^2 &= 2 \cdot 3 \\ 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 &= 3 \cdot 5 \\ 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 &= 5 \cdot 8 \\ 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 &= 8 \cdot 13 \end{aligned}$$

◁

2.3 Djeljivost

Fibonaccijevi brojevi su prirodni brojevi pa na njima možemo promatrati djeljivost. Najveću zajedničku mjeru prirodnih brojeva a i b u daljnjem razmatranju označavamo

$$(a, b)$$

Propozicija 8. *Svaka dva uzastopna Fibonaccijeva broja su relativno prosti.*

Napomena 9. Brojevi a i b su relativno prosti ako je njihov najveći zajednički djelitelj jednak 1, tj. brojevi a i b nemaju zajedničkih faktora.

Dokaz. Za $n \in \mathbb{N}$, stavimo $d = (F_n, F_{n+1})$. Kako d dijeli F_n i F_{n+1}, onda d dijeli i

$$F_{n+1} - F_n = F_{n-1}.$$

Dalje, zaključujemo da d dijeli redom

$$F_n - F_{n-1} = F_{n-2},\ F_{n-1} - F_{n-2} = F_{n-3},\ \ldots,\ F_3 - F_2 = F_1 = 1.$$

Vidimo $d = 1$, što je trebalo i dokazati. □

Propozicija 10. *Neka su m i n prirodni brojevi. Ako n dijeli m, onda F_n dijeli F_m.*

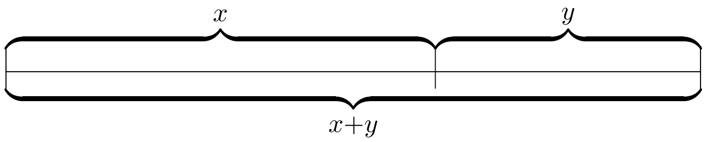
Korolar 11. *Ako je n složen prirodan broj različit od 4, onda je F_n složen broj.*

Dokaz. Ako je broj n složen, onda se on može zapisati u obliku $n = ab$, gdje su $a, b > 1$. Kako je $n \neq 4$, to je bar jedan od brojeva a i b veći od 2. Recimo da je $a > 2$. Tada je $F_a \neq F_n$ i $F_n \neq 1$, a prema Propoziciji 10 znamo da je $F_a \mid F_n$. To znači da je F_n složen. $\square$

Primjer 12. *Obrat tvrdnje iz Korolara 11 ne vrijedi. Naime može se dogoditi da je broj p prost, a da je broj F_p složen. Na primjer: $F_{19} = 4181 = 37 \cdot 113$.* $\triangleleft$

3 Zlatni rez i Fibonaccijevi brojevi

Zlatni rez [1] je pojam koji ljudi najčešće vežu uz pojam sklada, savršenstva i ravnoteže.



Pišemo:

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} = \varphi \tag{6}$$

Dakle, zlatni rez φ je pozitivno rješenje kvadratne jednadžbe

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{7}$$

koja se naziva zlatna jednadžba te njen rezultat iznosi

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398\ldots \tag{8}$$

Pitamo se, naravno, kakve veze ima zlatni rez s Fibonaccijevim brojevima. U tu svrhu promotrimo tablicu u kojoj su dani omjeri susjednih Fibonaccijevih brojeva:

$\frac{F_{n+1}}{F_n}$
$\frac{2}{1} = 2.000000\ldots$
$\frac{3}{2} = 1.500000\ldots$
$\frac{5}{3} = 1.666666\ldots$
$\vdots$
$\frac{987}{610} = 1.618033\ldots$
$\frac{1597}{987} = 1.618034\ldots$

Iz ovog primjera možemo naslutiti da niz (F_{n+1}/F_n) konvergira upravo zlatnom rezu. Fascinantno,zar ne?

Koristeći Binetovu formulu (3) iz odjeljka 2.2, Teorem 4, dobivamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})}{\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - \beta(\beta/\alpha)^n}{1 - (\beta/\alpha)^n} = \alpha = \varphi \tag{9}$$

jer je $\frac{\beta}{\alpha}$ po apsolutnoj vrijednosti manja od 1 pa to povlači da

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0.$$

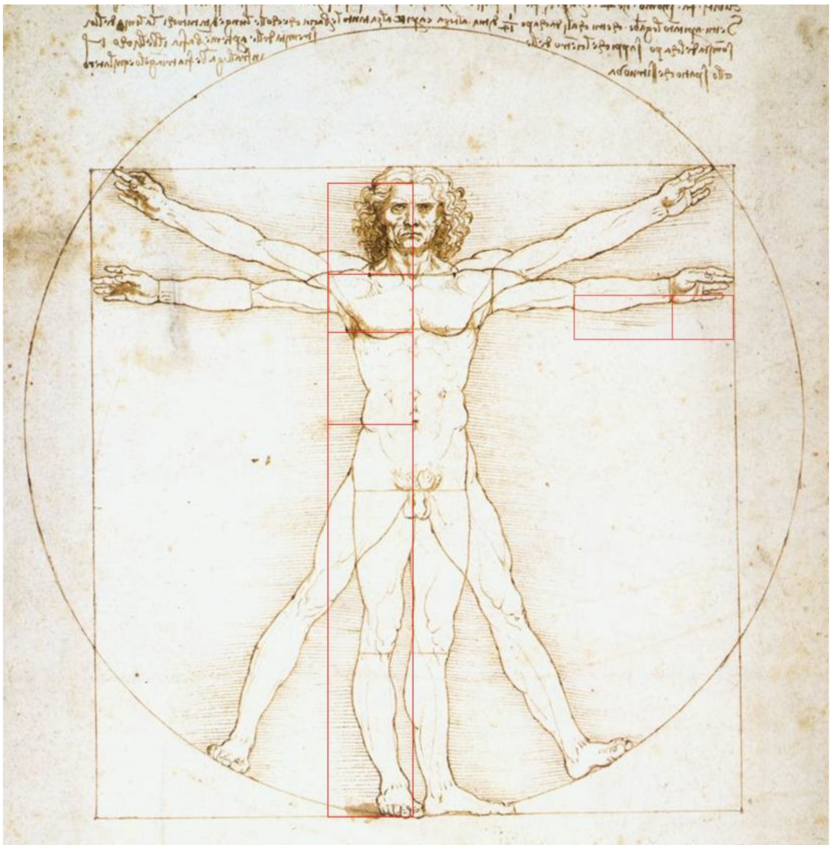
Znači li to da su i Fibonaccijevi brojevi savršeni i u skladu? To ostavljam čitatelju da odluči, a u daljnjem nastavku vidjet ćemo samo mali dijelić pojave tih intrigantnih brojeva.

4 Fibonaccijevi brojevi u umjetnosti

Svi danas težimo ljepoti. Dok drugi teže nekim drugim ljepotama, mi matematičari tražimo ljepotu u brojevima i formulama. Još od ranih vremena tražila se univerzalna matematička formula ljepote, koja je pronađena upravo u zlatnom omjeru, a ovdje će nam poslužiti kao most prema Fibonaccijevim brojevima.

Mnogi veliki umjetnici, još od Stare Grčke, sakrili su u svojim djelima taj sklad proporcija. Ja ću se u ovom radu okrenuti jednom od najvećih ljudi tog vremena, ako ne i svih vremena. Pogađate o kome je riječ?

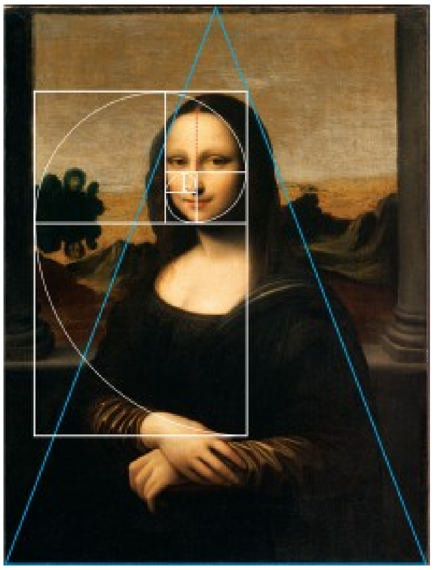
Leonardo da Vinci, poznati talijanski slikar, kipar, arhitekt, znanstvenik i inžinjer, zapravo renesansni čovjek, u svojim je djelima težio savršenstvu. On je u svojem Vitruvijevom čovjeku pokazao kako su proporcije ljudskog tijela skoro pa savršene te kako te proporcije trebaju biti osnova arhitekture. Konstruirao je proporciju ljudskog tijela na osnovi zlatnog reza kao što je prikazano na Slici 1.



Slika 1: Slika Vitruvijevog čovjeka

Crtež nam kaže da je ljudsko tijelo moguće ucrtati u kružnicu i kvadrat. Visina čovjeka jednaka je širini rastvorenih ruku, a postavljanjem ruku i nogu u dijagonalu čovjek postaje središte kružnice. Potezi ispod koljena označavaju zlatni rez kao i na ramenima: od vrha prstiju do ramena, rame do prstiju druge ruke.

Iako postoji bezbroj primjera iz proteklih nekoliko stoljeća među kojima bi se mogle naći pojave zlatnog reza, odnosno Fibonaccijevih brojeva, zadržat ćemo se opet na da Vinciju i jednoj od zasigurno najpoznatijih slika zapadne umjetnosti, a to je čuvena Mona Lisa.



Slika 2: Slika Mona Lise

Ovu sliku proglašavaju jednom od najboljih remek-dijela svih vremena. I tu možemo primjetiti igru zlatnog reza.

Kako nebi mislili da se samo u slikama može pronaći ravnoteža, pokazat ćemo i jedan primjer u arhitekturi. Naime tijekom renesanse, nacrti mnogih građevinskih projekata koristili su Fibonaccijeve brojeve ili zlatni omjer. Može ih se pronaći,na primjer, na nacrtima kupole katedrale Santa Maria del Fiore u Firenci koja se može vidjeti na Slici 3. Skica [2] kupole pokazuje Fibonaccijeve brojeve: 55, 89 i 144 te brojeve 17 (što je polovica Fibonaccijevog broja 34) i 72 (što je polovica Fibonaccijevog broja 144).

[2]Gruba skica Giovannija di Gherarda da Pratoa (1426.), dok je za konstrukciju zaslužan Fillippo Brunelleschi.

Slika 3: Slika kupole katedrale Santa Maria del Fiore u Firenci, Italija

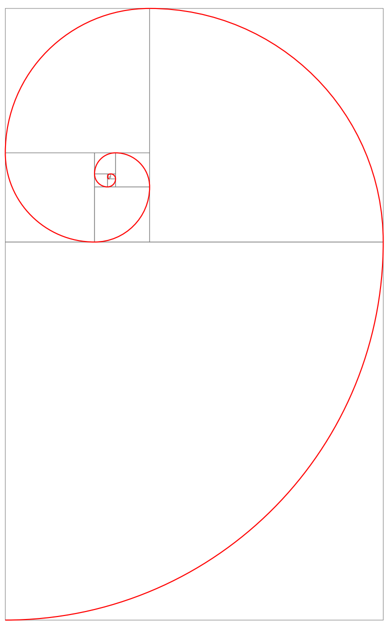
5 Fibonaccijevi brojevi u prirodi

1. Suncokret: Pogledajte red sjemena u centru suncokreta i primjetit ćete nešto što izgleda kao spiralni uzorak. Ako prebrojite te sprale dobit ćete Fibonaccijev broj.

2. Cvijeće: Ako prebrojite latice na nekom cvijetu, suma će vrlo često biti jedan od brojeva Fibonaccijevog niza.[2]

3. Ljudsko tijelo: Pogledajte se u ogledalo i vidjet ćete Fibonaccijev niz. Vaše tijelo se sastoji od brojeva 1, 2, 3 i 5. Imate jedan nos, dva oka, tri segmenta svakog ud-a i pet prstiju na svakoj ruci. Izmjerimo li dužinu čovjeka od vrha glave do poda, zatim to podijelimo s dužinom od pupka do poda dobijemo 1.618034.

4. Oklop Nutilus-a: Jedan od najpoznatijih primjera Fibonaccijeve spirale je oklop glavonošca Nutilus-a kojeg smo svi vidjeli bar jednom kao naslovnu sliku knjige o geometriji. Fibonaccijeva spirala stvorena je iscrtavanjem lukova koji spajaju suprotne kuteve kvadrata u Fibonaccijevom popločanju. Ta spirala je temeljena na progresiji Fibonaccijevog niza. Kad bi izračunali odnos svakog spiralnog promjera dobili bismo upravo zlatni rez.



Slika 4: Slika Fibonaccijeve spirale

6 Literatura i popis slika

Literatura

[1] URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number.

[2] URL: https://geek.hr/znanost/clanak/fibonaccijev-niz-u-prirodi/.

[3] A. Dujella. *Fibonaccijevi brojevi*. Zagreb, 2000.

Popis slika