

公約数は最大公約数の約数である

みがわり

twitter: @migawari_w

2022年12月31日

目次

1	はじめに	1
2	問題	1
3	解答	2
4	参考	2

1 はじめに

「公約数が全て最大公約数の約数になっている」という事実は小中学生の頃に公約数を求める手間を省くテクニックとして使った覚えがあります。先日思い出して証明しようと思ったら、これが思いの外難しく、結局イデアル含む大学数学の内容を使う羽目になってしまいました。

とはいえそれだと証明の議論が長くなってしまいます。そこで「 $ax + by = c$ となる c の集合」を考えることで無理やり高校数学範囲にして証明してみました。

問題形式にしたので、自力で証明してみたいと言う方は問題だけ見て証明してみてください。

2 問題

a, b は 0 でない整数であるとする。公約数が全て最大公約数の約数であることを示したい。

- (1) $ax + by = c$ を満たす $x, y \in \mathbb{Z}$ が存在するような整数 c の集合はある $d \in \mathbb{N}$ が存在して $d\mathbb{Z} = \{dz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ と表せることを示せ。
- (2) (1) の d は a, b の公約数であることを示せ。
- (3) a, b の任意の公約数は (1) の d の約数であることを示せ。また、 d は a, b の公約数のうち最大のものであることを示せ。