みがわり

twitter: @migawari_w

【問題】

a を 0 でない定数とする。$a_0 = a$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right)$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

【解答】

a の値で場合分けする。x の方程式 $1 = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$ の解が $x = 1$ に限られることから $a_n \fallingdotseq 1$ ならば $a_{n+1} \fallingdotseq 1$ である。よって $a_0 = a \fallingdotseq 1$ ならば帰納的に任意の n に対して $a_n \fallingdotseq 1$ であることに注意する。

(i) $a \fallingdotseq 1$ のとき

$a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 1}{2a_n}$ の両辺から $+1, -1$ を引いた式をそれぞれ整理すると

$$a_{n+1} - 1 = \frac{a_n^2 + 1 - 2a_n}{2a_n} = \frac{(a_n - 1)^2}{2a_n}$$
$$a_{n+1} + 1 = \frac{a_n^2 + 1 + 2a_n}{2a_n} = \frac{(a_n + 1)^2}{2a_n}$$

である。$a_n, a_{n+1} \fallingdotseq 1$ より 2 式の両辺の比を取ることによって

$$\frac{a_{n+1} + 1}{a_{n+1} - 1} = \left(\frac{a_n + 1}{a_n - 1}\right)^2$$

が得られる。$b_n = \dfrac{a_n + 1}{a_n - 1}$ とおくと $b_{n+1} = b_n^2$ である。数学的帰納法により 0 以上の整数 n に対して

$$b_n = b_0^{2^n} \cdots \text{(A)}$$

が成り立つことを示す。k を 0 以上の整数とする。

(I) $n = 0$ のとき

$2^0 = 1$ より (A) は成立する。

(II) $n = k$ のとき (A) が成立すると仮定すると $b_k = b_0^{2^k}$ である。このとき

$$b_{k+1} = b_n^2 = \left(b_0^{2^k}\right)^2 = b_0^{2\cdot 2^k} = b_0^{2^{k+1}}$$

であるから $n = k + 1$ のときも (A) は成立する。

以上 (I), (II) より数学的帰納法が完成し，(A) すなわち $b_n = b_0^{2^n}$ の成立が示された。（帰納法の証明終）

ここで $b_0 = \dfrac{a_0 + 1}{a_0 - 1}$, $a_n = \dfrac{b_n + 1}{b_n - 1}$ に注意すると，

$$a_n = \frac{\left(\dfrac{a_0 + 1}{a_0 - 1}\right)^{2^n} + 1}{\left(\dfrac{a_0 + 1}{a_0 - 1}\right)^{2^n} - 1} = \frac{(a+1)^{2^n} + (a-1)^{2^n}}{(a+1)^{2^n} - (a-1)^{2^n}}$$

が得られる。

(ii) $a = 1$ のとき

帰納的に任意の n において $a_n = 1$ となることがわかる。これは (i) の最後の式の最右辺の表記に含められる。

以上 (i), (ii) より $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{(a+1)^{2^n} + (a-1)^{2^n}}{(a+1)^{2^n} - (a-1)^{2^n}} \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

である。