補題 2 の証明. 一般の θ に対して

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{n}(2l-1)\sin(2l-1)\theta = \frac{1}{\sin\theta}\sum_{l=1}^{n}(2l-1)\sin(2l-1)\theta\sin\theta \\
&= \frac{1}{\sin\theta}\sum_{l=1}^{n}(2l-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(\cos(2l\theta)-\cos(2(l-1)\theta)) \\
&= -\frac{1}{2\sin\theta}\left[\sum_{l=1}^{n}\{(2l+1)\cos(2l\theta)-(2(l-1)+1)\cos(2(l-1)\theta)\}-\sum_{l=1}^{n}2\cos(2l\theta)\right] \\
&= -\frac{1}{2\sin\theta}\left[(2n+1)\cos 2n\theta-1-2\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\cos(n+1)\theta\right] \quad \text{（和の中抜けと定理 2 を用いた。）} \\
&= -\frac{1}{2\sin\theta}\left[2n\cos 2n\theta+\cos 2n\theta-1-\frac{2}{\sin\theta}\sin n\theta\cdot(\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta)\right] \\
&= -\frac{1}{2\sin\theta}\left[2n\cos 2n\theta+\cos 2n\theta-1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin 2n\theta+2\sin^2 n\theta\right] \\
&= -\frac{1}{2\sin\theta}\left[2n\cos 2n\theta-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin 2n\theta\right] \quad \text{（2 倍角の公式より）} \\
&= \frac{1}{2\sin^2\theta}[-2n\cos 2n\theta\sin\theta+\sin 2n\theta\cos\theta]
\end{aligned}
$$

である。

（補題 2 証明終）

これを用いると，$\sin 2n\theta=\sin(n+m)\pi=0$, $\cos 2n\theta=\cos(n+m)\pi=(-1)^{n+m}$ より (6) の式は

$$
\frac{(-1)^{n+m+1}\pi}{2n}\cdot\frac{(-2n)\cdot(-1)^{n+m}\sin\theta}{2\sin^2\theta}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sin\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cos\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)}
$$

と変形できる。よって示された。

（証明終）

定理 4. 0 から $\frac{\pi}{4}$ までの定積分

$m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$ として，$|m|<n$ かつ $m>0$ のもとで以下の等式が成り立つ。

$$
\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{\frac{m}{n}}\theta\,d\theta=\frac{\pi}{4\cos\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(n+m)\theta_{n,k}\log(2(1-\cos\theta_{n,k}))
$$

証明.

$$
f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{1}{2}\cos(n+m)\theta_{n,k}\log(2(1-\cos\theta_{n,k}))+\sin(n+m)\theta_{n,k}\arctan\left(\frac{1-\cos\theta_{n,k}}{\sin\theta_{n,k}}\right)\right]
$$

である。ここで

$$
\frac{1-\cos\theta_{n,k}}{\sin\theta_{n,k}}=\frac{2\sin^2\frac{\theta_{n,k}}{2}}{2\sin\frac{\theta_{n,k}}{2}\cos\frac{\theta_{n,k}}{2}}=\tan\frac{\theta_{n,k}}{2}
$$