### 例題

次の積分を求めよ。

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan^{-\frac{5}{2}} \theta \, d\theta$$

## 解法;置換積分で範囲を変える

$$arphi=rac{\pi}{2}-\theta$$
 とする。  $d\theta=-darphi$  より 
$$\int_{rac{\pi}{4}}^{rac{\pi}{2}} an^{-rac{5}{2}} heta \, d heta = \int_{rac{\pi}{4}}^{0} an^{-rac{5}{2}} \left(rac{\pi}{2}-arphi
ight) darphi = \int_{0}^{rac{\pi}{4}} an^{rac{5}{2}} arphi \, d heta$$
 
$$= \int_{0}^{rac{\pi}{4}} \left(1+ an^{2} arphi
ight) \cdot an^{rac{1}{2}} arphi \, darphi - \int_{0}^{rac{\pi}{4}} an^{rac{1}{2}} arphi \, d heta$$
 
$$= \left[rac{2}{3} an^{rac{3}{2}} arphi
ight]_{0}^{rac{\pi}{4}} - \left(rac{\sqrt{2}}{4} \pi - rac{\sqrt{2}}{2} \log \left(1+\sqrt{2}\right)\right)$$
 
$$= rac{2}{3} - rac{\sqrt{2}}{4} \pi + rac{\sqrt{2}}{2} \log \left(1+\sqrt{2}\right) \cdots \cdots \left(rac{m}{12}\right)$$

# 6 応用例

### 公式

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^n} \, dx = \frac{2}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{\frac{2}{n}-1} \theta \, d\theta$$

#### 解答

 $x = \tan^{\frac{2}{n}} \theta$  とおいて置換積分する。

ここからさらに一般化して  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$  の積分を n で表すこともできる。(n>1 とする。)

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = \frac{1}{n} \left( \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{n}} - \sum_{k=1}^n \cos 2\theta_{n,k} \log[2(1-\cos\theta_{n,k})] \right)$$

裏技公式的に暗記しておいても損はないかもしれない。だがあえて一般化しないメリットもある。以下の問題を見て いただきたい。

#### 問題

次の積分を求めよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+x^6}$$