である。ここで一般に

$$
\begin{aligned}
1-e(\theta)&=1-(\cos\theta+i\sin\theta)=(1-\cos\theta)-i\sin\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}-2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\
&=-2i\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)=-2i\sin\frac{\theta}{2}e\left(\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}
$$

であることを用いると (5) の式は

$$
e(\varphi+\theta)\frac{-2i\sin\frac{n}{2}\theta e\left(\frac{n}{2}\theta\right)}{-2i\sin\frac{\theta}{2}e\left(\frac{\theta}{2}\right)}=e(\varphi+\theta)\frac{e\left(\frac{n}{2}\theta\right)}{e\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cdot\frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}e\left(\frac{n+1}{2}\theta+\varphi\right)
$$

と変形できる。はじめの式と実部と虚部を比較して

$$
\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta+\varphi)=\frac{\sin\frac{n}{2}\theta\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta+\varphi\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}\qquad\sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta+\varphi)=\frac{\sin\frac{n}{2}\theta\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta+\varphi\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}
$$

を得る。

（証明終）

定理 3. 0 から $\frac{\pi}{2}$ までの定積分

$m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}$ として，$|m|<n$ かつ $m>0$ のもとで以下の等式が成り立つ。

$$
\lim_{\theta_1\to\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\theta_1}\tan^{\frac{m}{n}}\theta\,d\theta=\frac{\pi}{2\cos\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)}
$$

証明.

$$
\begin{aligned}
f(0)=\sum_{k=1}^{n}\Bigg[&-\frac{1}{2}\cos(n+m)\theta_{n,\,k}\log\left(\tan^{\frac{2}{n}}0-2\tan^{\frac{1}{n}}0\cos\theta_{n,\,k}+1\right)\\
&+\sin(n+m)\theta_{n,\,k}\arctan\left(\frac{\tan^{\frac{1}{n}}0-\cos\theta_{n,\,k}}{\sin\theta_{n,\,k}}\right)\Bigg]
\end{aligned}
$$

第 1 項は log の中身が 1 なので 0。ここで

$$
-\frac{\cos\theta_{n,\,k}}{\sin\theta_{n,\,k}}=\frac{\sin\left(\theta_{n,\,k}-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta_{n,\,k}-\frac{\pi}{2}\right)}=\tan\left(\theta_{n,\,k}-\frac{\pi}{2}\right)
$$

であり $1\leqq k\leqq n$ において $0<\theta_{n,\,k}=\frac{2k-1}{2n}\pi<\pi$ より $-\frac{\pi}{2}<\theta_{n,\,k}-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}$ であることに注意して

$$
f(0)=\sum_{k=1}^{n}\sin((n+m)\theta_{n,\,k})\cdot\left(\theta_{n,\,k}-\frac{\pi}{2}\right)
$$

である。$\theta_0=\frac{n+m}{2n}\pi$ として定理 2 において θ,φ をそれぞれ $2\theta_0,\ -\theta_0$ とすると

$$
\sum_{k=1}^{n}\cos(n+m)\theta_{n,\,k}=\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\theta_0=\frac{\sin n\theta_0}{\sin\theta_0}\cos n\theta_0=\frac{\sin 2n\theta_0}{\sin\theta_0}=\frac{\sin(n+m)\pi}{\sin\theta_0}=0
$$