であるからこれを用いると

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\theta_1\to\frac{\pi}{2}-0} f(\theta_1)\\
&= \lim_{\theta_1\to\frac{\pi}{2}-0} \sum_{k=1}^{n}\Bigl[-\frac{1}{2}\cos(n+m)\theta_{n,\,k}\log\Bigl(\tan^{\frac{2}{n}}\theta_1-2\tan^{\frac{1}{n}}\theta_1\cos\theta_{n,\,k}+1\Bigr)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +\sin(n+m)\theta_{n,\,k}\arctan\left(\frac{\tan^{\frac{1}{n}}\theta_1-\cos\theta_{n,\,k}}{\sin\theta_{n,\,k}}\right)\Bigr]\\
&= \lim_{\theta_1\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{1}{2}\cos(n+m)\theta_{n,\,k}\underbrace{\log\Bigl(1-2\tan^{-\frac{1}{n}}\theta_1+\tan^{-\frac{2}{n}}\theta_1\Bigr)}_{\to 0}\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\sin(n+m)\theta_{n,\,k}\underbrace{\arctan\left(\frac{\tan^{\frac{1}{n}}\theta_1-\cos\theta_{n,\,k}}{\sin\theta_{n,\,k}}\right)}_{\sin\theta_{n,\,k}>0\text{ かつ }\tan\theta_1\to+\infty\text{ より}\to\frac{\pi}{2}}\right]+\log\Bigl(\tan^{\frac{2}{n}}\theta_1\Bigr)\underbrace{\sum_{k=1}^{n}-\frac{1}{2}\cos(n+m)\theta_{n,\,k}}_{=0}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2}\sin(n+m)\theta_{n,\,k}
\end{aligned}
$$

である[*3]。したがって

$$
\begin{aligned}
\lim_{\theta_1\to\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\theta_1}\tan^{\frac{m}{n}}\theta\,d\theta &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2}\sin(n+m)\theta_{n,\,k}-\sum_{k=1}^{n}\Bigl(\theta_{n,\,k}-\frac{\pi}{2}\Bigr)\sin(n+m)\theta_{n,\,k}\\
&= \sum_{k=1}^{n}(\pi-\theta_{n,\,k})\sin(n+m)\theta_{n,\,k}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\pi-\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\sin\left(\frac{n+m}{n}\frac{2k-1}{2}\pi\right)
\end{aligned}
$$

が得られる。ここで $l=n-k+1$ とおくと

$$
\begin{aligned}
(\text{上式}) &= \sum_{l=1}^{n}\left(\pi-\frac{2(n-l+1)-1}{2n}\pi\right)\sin\left(\frac{n+m}{n}\frac{2(n-l+1)-1}{2}\pi\right)\\
&= \frac{(-1)^{n+m+1}\pi}{2n}\sum_{l=1}^{n}(2l-1)\sin(2l-1)\theta \quad \left(\theta=\frac{n+m}{2n}\pi\text{ とした。}\right)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

になる。sin の中については以下の変形をした。

$$
\begin{aligned}
\sin\left(\frac{n+m}{n}\frac{2(n-l+1)-1}{2}\pi\right) &= \sin[(n+m)\pi-(2l-1)\theta]\\
&= \sin(n+m)\pi\cos(2l-1)\theta-\cos(n+m)\pi\sin(2l-1)\theta\\
&= (-1)^{n+m+1}\sin(2l-1)\theta
\end{aligned}
$$

補題 2. $n\in\mathbb{N},\ \theta\in\mathbb{R}$ として以下の等式が成り立つ。

$$
\sum_{l=1}^{n}(2l-1)\sin(2l-1)\theta=\frac{1}{2\sin^2\theta}[-2n\cos 2n\theta\sin\theta+\sin 2n\theta\cos\theta]
$$

[*3] $\sum_{k=1}^{n}-\frac{1}{2}\cos(n+m)\theta_{n,\,k}$ は「$\theta_1\to\frac{\pi}{2}$ で 0 に漸近する」のではなく「0 そのものになる」ので不定形ではないことに注意。