であり，$1 \leqq k \leqq n$ より $0 < \theta_{n,\,k} < \pi$ であるから $0 < \dfrac{\theta_{n,\,k}}{2} < \dfrac{\pi}{2}$。よって以下が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{\frac{m}{n}} \theta \, d\theta = f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\{ -\frac{1}{2} \cos(n+m)\theta_{n,\,k} \log[2(1 - \cos\theta_{n,\,k})] + \frac{1}{2}(\pi - \theta_{n,\,k}) \sin(n+m)\theta_{n,\,k} \right\} \\
&= \frac{\pi}{4\cos\left(\dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \cos(n+m)\theta_{n,\,k} \log[2(1 - \cos\theta_{n,\,k})]
\end{aligned}
$$

最後の変形で第 2 項の値は定理 3 の証明の結果の半分になることを用いて求めた。

（証明終）

3.2　指数の分子が負のとき

以下，簡単のため広義積分を lim を使わずに表す。また，ややこしさを避けるために $m < 0$ とするのではなく「$m > 0$ として $\tan^{\frac{-m}{n}} \theta$ の積分を求める」ことによって負数に拡張していることに注意。

定理 5.

指数の分子が負の場合も定理 3 が成立する。

証明. $m > 0$ として指数を $\dfrac{-m}{n}$ とする。

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{\frac{-m}{n}} \theta \, d\theta &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \tan^{\frac{-m}{n}} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) d\varphi \quad \left(\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta \text{と置換}\right) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{\frac{m}{n}} \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{4\cos\left(\dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)} = \frac{\pi}{4\cos\left(\dfrac{-m}{n} \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

（証明終）

定理 6.

指数の分子が負の場合も定理 4 が成立する。

証明. $m > 0$ として指数を $\dfrac{-m}{n}$ とする。

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{\frac{-m}{n}} \theta \, d\theta &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{\frac{-m}{n}} \varphi \, d\varphi \quad \left(\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta \text{と置換}\right) \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan^{\frac{m}{n}} \varphi \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{\frac{m}{n}} \varphi \, d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{\frac{m}{n}} \varphi \, d\varphi \\
&= \frac{\pi}{2\cos\left(\dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)} - \left[\frac{\pi}{4\cos\left(\dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \cos(n+m)\theta_{n,\,k} \log(2(1 - \cos\theta_{n,\,k})) \right]
\end{aligned}
$$

である。ここで三角関数の和積公式より

$$
\cos(n-m)\theta_{n,\,k} + \cos(n+m)\theta_{n,\,k} = 2\cos n\theta_{n,\,k} \cos n\theta_{n,\,k}
$$

であり $2k-1$ は奇数なので

$$
\cos n\theta_{n,\,k} = \cos n \cdot \frac{2k-1}{2n}\pi = \cos\frac{2k-1}{2}\pi = 0
$$