解答

公式を用いる。

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{2}{6}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{\frac{2}{6}-1}\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{-\frac{2}{3}}\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}\left\{\frac{\pi}{4\cos\left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\right)} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\cos\left[(-2+3)\frac{2k-1}{2\cdot 3}\pi\right]\log\left(2\left(1-\cos\frac{2k-1}{2\cdot 3}\right)\pi\right)\right\} \\
&= \frac{1}{3}\left\{\frac{\pi}{4\cdot\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\log\left(2-\sqrt{3}\right) + 0 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\log\left(2+\sqrt{3}\right)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{3}\left\{\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\log\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)\right\} \\
&= \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}\log\left(2+\sqrt{3}\right)\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

実は途中で $\dfrac{2}{6}-1=-\dfrac{4}{6}$ を $-\dfrac{2}{3}$ に約分することによって計算する項数が半分になっている。おわかりいただけただろうか。ちなみにこの問題，普通に解くと部分分数分解が難しい骨のある問題である。

7 おわりに

任意の有理数 r に対して $\tan^r\theta$ が初等関数の範囲で積分可能であることを示し，具体的な求め方を考えてみました。はじめは 2 節の不定積分の内容のみで済ませる予定でしたが

- 特定の範囲の定積分の値が綺麗になった
- 任意の有理数に対して示したくなった
- 定石として汎用的に使う方法を思いついてしまった

ことから非常に長い内容になってしまいました。欲を言うと実数全体について示したくなってしまったのですが，今は近似分数列が収束するということにして納得しています[*4]。

論旨から外れるので書きませんでしたが，もし実数全体について示すことができれば Γ 関数の相反公式等を示すことができます。

もしこの記事の内容が一般的に知られる世界になったら，大学受験の積分問題の定石の一つとして「$\tan^{\frac{m}{n}}\theta$ の積分」なるものが掲載されることがあるかな，などと妄想しております。が，導出が大変なのでまあないでしょう[*5]。

長い内容でしたがここまでお読みいただきありがとうございました。

[*4] この辺もいつかちゃんと証明したいと思っています。

[*5] もしかしたらもっと簡単に求められる方法があるかもしれません…そうなったら載るかも…？