として積分することが可能である。なお計算によって P, b の具体的な形を求めることができるので

$$\int \tan^{\frac{m}{n}} \theta \, d\theta = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{k+p-1} \frac{\tan^{2k+q+1} \theta}{2k+q+1} + (-1)^p \int \tan^q \theta \, d\theta$$

とすることも可能である。

新しい受験数学の定石がまたひとつできた。

4.2 指数の分子が負のとき

ここからは煩雑な分数表記を避けるために $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ を用いて表す。

cot の微分公式

$$(\cot\theta)' = -\left(1 + \cot^2\theta\right)$$

証明.

$$(\cot\theta)' = \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)' = \frac{-\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin^2\theta} = -\left(1 + \cot^2\theta\right)$$

（証明終）

cot を用いて $\tan^{\frac{-m}{n}} \theta$ の積分を求めてみよう。引き続き $m > 0$ のまま $\tan^{\frac{-m}{n}} \theta$ の積分を求める方法をとる。

$\tan^{\frac{-m}{n}} \theta$ の積分

$m > 0,\ |m| > n,\ \dfrac{m}{n} = 2p + q$（$p \in \mathbb{N},\ -1 < q < 1,\ q$ は有理数）とする。

$$x^p = (1 + x)p(x) + b$$

（$p(x)$ を x の整式とした）として

$$\begin{aligned}\tan^{\frac{-m}{n}} \theta = \cot^{\frac{m}{n}} \theta = \cot^{2p+q} \theta &= \left(\cot^2\theta\right)^p \cot^q \theta \\ &= \left\{\left(1 + \cot^2\theta\right)p\left(\cot^2\theta\right) + b\right\} \cot^q \theta \\ &= \left(1 + \cot^2\theta\right)\left[p\left(\cot^2\theta\right) \cot^q \theta\right] + b \cot^q \theta\end{aligned}$$

と変形する。すると $P(x) = \displaystyle\int p\left(x^2\right) x^q \, dx$ として

$$\int \tan^{\frac{m}{n}} \theta \, d\theta = -P(\tan\theta) + b \int \tan^{-q} \theta \, d\theta$$

として積分することが可能である。なお計算によって P, b の具体的な形を求めることができるので

$$\int \tan^{\frac{-m}{n}} \theta \, d\theta = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{k+p} \frac{\tan^{2k+q+1} \theta}{2k+q+1} + (-1)^p \int \tan^q \theta \, d\theta$$

とすることも可能である。

以上により任意の有理数 r に対して $\tan^r \theta$ を初等関数の範囲で具体的に積分する方法が得られた。