よって

$$\cos(n+m)\theta_{n,\,k} = -\cos(n-m)\theta_{n,\,k}$$

以上より

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{\frac{-m}{n}}\theta\,d\theta &= \frac{\pi}{4\cos\left(\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-\cos(n-m)\theta_{n,\,k})\cdot\log(2(1-\cos\theta_{n,\,k})) \\ &= \frac{\pi}{4\cos\left(\dfrac{-m}{n}\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(n-m)\theta_{n,\,k}\cdot\log(2(1-\cos\theta_{n,\,k}))\end{aligned}$$

であり，指数の分子が負の場合も定理 4 を適用可能なことが示された。

（証明終）

以上の議論により，$|m| < n$ すなわち絶対値が 1 より小さい有理数 r に対して $\tan^r\theta$ の積分を求められるという事実とその方法が得られた。

4　$|m| > n$ のとき

4.1　指数の分子が正のとき

ここまでの議論では $|m| < n$ のもののみを考えていた。ここからは $|m| > n$ すなわち指数の絶対値が 1 より大きくなるものを取り扱う。とはいえ 2 節の部分分数分解の議論が成り立たないのでそのままの形で $|m| < n$ の公式を用いることは不可能である（desmos でも実験してみたが違う値になってしまうようである）。そこで「次数を下げる」といういわゆる「$\tan^n\theta$ の積分」を解く方法を参考にしてみる。$(\tan\theta)' = 1 + \tan^2\theta$ の公式をもとにしている。

$\tan^n\theta$ の積分

$n \in \mathbb{N}$ とする。整式の割り算によって

$$\tan^n\theta = \left(1+\tan^2\theta\right)p(\tan\theta) + a\tan\theta + b$$

（$p(x)$ を x の整式とした。）と変形することによって $P(x) = \displaystyle\int p(x)\,dx$ として

$$\int \tan^n\theta\,d\theta = P(\tan\theta) - a\log|\cos\theta| + b\theta + C \quad （C\text{ は積分定数}）$$

として積分することが可能。

試行錯誤の結果，以下のようにすると積分可能であることがわかった。

$\tan^{\frac{m}{n}}\theta$ の積分

$m > 0,\ |m| > n,\ \dfrac{m}{n} = 2p + q$（$p \in \mathbb{N},\ -1 < q < 1,\ q$ は有理数）とする。

$$x^p = (1+x)p(x) + b$$

（$p(x)$ を x の整式とした）として

$$\begin{aligned}\tan^{\frac{m}{n}}\theta = \tan^{2p+q}\theta &= \left(\tan^2\theta\right)^p\tan^q\theta \\ &= \left\{\left(1+\tan^2\theta\right)p\left(\tan^2\theta\right) + b\right\}\tan^q\theta \\ &= \left(1+\tan^2\theta\right)\left[p\left(\tan^2\theta\right)\tan^q\theta\right] + b\tan^q\theta\end{aligned}$$

と変形する。すると $P(x) = \displaystyle\int p\left(x^2\right)x^q\,dx$ として

$$\int \tan^{\frac{m}{n}}\theta\,d\theta = P(\tan\theta) + b\int \tan^q\theta\,d\theta$$