と変形できる。積分を $\sum$ の中に入れると

$$
\begin{aligned}
(\text{上式}) =& -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos(n+m)\theta_{n,\,k}\int\frac{\left(x^2-2x\cos\theta_{n,\,k}+1\right)'}{x^2-2x\cos\theta_{n,\,k}+1}\,dx\right.\\
&\left.\qquad -2\sin(n+m)\theta_{n,\,k}\int\frac{1}{1+\left(\dfrac{x-\cos\theta_{n,\,k}}{\sin\theta_{n,\,k}}\right)^2}\frac{dx}{\sin\theta_{n,\,k}}\right]\\
=& -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos(n+m)\theta_{n,\,k}\log\left(x^2-2x\cos\theta_{n,\,k}+1\right)\right.\\
&\left.\qquad -2\sin(n+m)\theta_{n,\,k}\arctan\left(\frac{x-\cos\theta_{n,\,k}}{\sin\theta_{n,\,k}}\right)\right]+C\\
=& \sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{1}{2}\cos(n+m)\theta_{n,\,k}\log\left(\tan^{\frac{2}{n}}\theta-2\cos\theta_{n,\,k}\tan^{\frac{1}{n}}\theta+1\right)\right.\\
&\left.\qquad +\sin(n+m)\theta_{n,\,k}\arctan\left(\frac{\tan^{\frac{1}{n}}\theta-\cos\theta_{n,\,k}}{\sin\theta_{n,\,k}}\right)\right]+C
\end{aligned}
$$

が導かれた。

（証明終）

以降，この不定積分から積分定数 C を除いたものを $f(\theta)$ とおく。

3　定積分（$|m|<n$ のとき）

3.1　指数の分子が正のとき

ここでは簡単のため $m>0$ の範囲に限って考える。先にこの先の証明において必要になる定理を示しておく。$e(\theta):=\cos\theta+i\sin\theta$ とする。

定理 2. 三角関数の総和公式

$\theta,\varphi\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$ とする。以下の等式が成り立つ。

$$
\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta+\varphi)=\frac{\sin\dfrac{n}{2}\theta\cos\left(\dfrac{n+1}{2}\theta+\varphi\right)}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\qquad\sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta+\varphi)=\frac{\sin\dfrac{n}{2}\theta\sin\left(\dfrac{n+1}{2}\theta+\varphi\right)}{\sin\dfrac{\theta}{2}}
$$

証明.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta+\varphi)+i\sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta+\varphi)=\sum_{k=1}^{n}[\cos(k\theta+\varphi)+i\sin(k\theta+\varphi)]=\sum_{k=1}^{n}e(k\theta+\varphi)\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}e(\varphi+\theta)e(\theta)^k\quad\text{（ド・モアブルの公式より）}\\
&=e(\varphi+\theta)\frac{1-e(\theta)^n}{1-e(\theta)}\quad\text{（等比数列の和の公式より）}\\
&=e(\varphi+\theta)\frac{1-e(n\theta)}{1-e(\theta)}
\end{aligned}\tag{5}
$$