例題

次の積分を求めよ。

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan^{-\frac{5}{2}}\theta\,d\theta$$

解法；置換積分で範囲を変える

$\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ とする。$d\theta = -\,d\varphi$ より

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan^{-\frac{5}{2}}\theta\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \tan^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)d\varphi = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{\frac{5}{2}}\varphi\,d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan^2\varphi\right)\cdot\tan^{\frac{1}{2}}\varphi\,d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{\frac{1}{2}}\varphi\,d\varphi \\
&= \left[\frac{2}{3}\tan^{\frac{3}{2}}\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\pi - \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right) \\
&= \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{4}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left(1+\sqrt{2}\right)\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

6　応用例

公式

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx = \frac{2}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{\frac{2}{n}-1}\theta\,d\theta$$

解答

$x = \tan^{\frac{2}{n}}\theta$ とおいて置換積分する。

ここからさらに一般化して $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$ の積分を n で表すこともできる。（$n > 1$ とする。）

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2\sin\dfrac{\pi}{n}} - \sum_{k=1}^{n}\cos 2\theta_{n,\,k}\log[2(1-\cos\theta_{n,\,k})]\right)$$

裏技公式的に暗記しておいても損はないかもしれない。だがあえて一般化しないメリットもある。以下の問題を見ていただきたい。

問題

次の積分を求めよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+x^6}$$