不定積分の証明は 2 節の中だけで完結しています。不定積分のみわかれば十分という方はそこだけお読みください。

3 節では指数の絶対値が 1 を超えない場合の 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ および 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ の範囲の定積分の値を求めています。4 節では指数の絶対値が 1 を超える場合について考察しています。

5 節以下後半では他の問題への応用例（ヨビノリさんの問題含む）を掲載しました。そちらも是非ご覧ください。

2　不定積分の証明（$|m| < n$ のとき）

以下，$\theta \in \mathbb{R}$ として θ が動く範囲を，$\tan^{\frac{m}{n}} \theta$ が発散する値をまたぐことがない範囲に限定して考える[*2]。この記事全体において $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ とする。x の関数 $\arctan x$ を $y = \tan x$ の $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲における逆関数とする。

定理 1. 不定積分

$m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ として，$|m| < n$ のもとで以下の等式が成り立つ。

$$\int \tan^{\frac{m}{n}} \theta \, d\theta = \sum_{k=1}^{n} \left[-\frac{1}{2} \cos(n+m)\theta_{n,k} \log\left(\tan^{\frac{2}{n}} \theta - 2\cos\theta_{n,k} \tan^{\frac{1}{n}} \theta + 1 \right) \right.$$
$$\left. + \sin(n+m)\theta_{n,k} \arctan\left(\frac{\tan^{\frac{1}{n}} \theta - \cos\theta_{n,k}}{\sin\theta_{n,k}} \right) \right] + C$$
$$\left(\theta_{n,k} := \frac{2k-1}{2n}\pi \text{ とした。} C \text{ は積分定数。} \right)$$

証明. $x := \tan^{\frac{1}{n}} \theta$ とおく。

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{n} \tan^{\frac{1}{n}-1} \theta (1 + \tan^2 \theta) = \frac{1}{n} x^{1-n} (1 + x^{2n})$$

より

$$d\theta = \frac{nx^{n-1}}{1 + x^{2n}} dx$$

よって

$$\int \tan^{\frac{m}{n}} \theta \, d\theta = \int x^m \cdot \frac{nx^{n-1}}{1 + x^{2n}} dx = n \int \frac{x^{n+m-1}}{1 + x^{2n}} dx \tag{1}$$

補題 1. (部分分数分解の公式) $k \in \mathbb{Z}, e(\theta) := \cos\theta + i\sin\theta$ とする。
$\theta_{n,k} := \dfrac{2k-1}{2n}\pi, z_{n,k} := e(\theta_{n,k})$ とおく。$|m| < n$ のもとで $z \in \mathbb{C}$ に対して以下の等式が成り立つ。

$$\frac{z^{n+m-1}}{1 + z^{2n}} = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{z_{n,k}^{n+m}}{z - z_{n,k}}$$

補題 1 の証明. 方程式 $1 + z^{2n} = 0$ の解を考える。$r > 0, 0 \leqq \theta < 2\pi$ として $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおく。ド・モアブルの公式より

$$1 + z^{2n} = 0 \quad \text{すなわち} \quad r^{2n}(\cos 2n\theta + i\sin 2n\theta) = \cos\pi + i\sin\pi$$

である。絶対値と偏角を比較して

$$r = 1, \quad 2n\theta = \pi + 2k\pi$$

[*2] 例えば $m > 0$ として $\dfrac{3}{4}\pi \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲であれば考えるが $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のような積分範囲は考えない（この場合は $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ をまたがない）ということ。