具体的には，任意の有理数 r に対して $\displaystyle\int \tan^r x\,dx$ を初等関数の範囲で求める方法を導出しました。特に絶対値が 1 未満の有理数 r については $\tan^r x$ の不定積分の具体的な形を求めています。内容的には高 3 のときに考えたものです。そのため $\arctan$[*1]を最後に使うこと以外は高校範囲内の内容になっています。高校生の方もご安心下さい。

方針としては部分分数分解した後，各項を積分するというシンプルなものです。途中にド・モアブルの公式や恒等式等の知識が必要となることを述べておきます。

不定積分の証明は 2 節の中だけで完結しています。不定積分のみわかれば十分という方はそこだけお読みください。

3 節では指数の絶対値が 1 を超えない場合の 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ および 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ の範囲の定積分の値を求めています。4 節では指数の絶対値が 1 を超える場合について考察しています。

5 節以下後半では他の問題への応用例（ヨビノリさんの問題含む）を掲載しました。そちらも是非ご覧ください。

2　不定積分の証明（$|m| < n$ のとき）

以下，$\theta \in \mathbb{R}$ として θ が動く範囲を，$\tan^{\frac{m}{n}}\theta$ が発散する値をまたぐことがない範囲に限定して考える[*2]。この記事全体において $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ とする。x の関数 $\arctan x$ を $y = \tan x$ の $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲における逆関数とする。

定理 1. 不定積分

$m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ として，$|m| < n$ のもとで以下の等式が成り立つ。

$$\int \tan^{\frac{m}{n}}\theta\,d\theta = \sum_{k=1}^{n}\Bigg[-\frac{1}{2}\cos(n+m)\theta_{n,\,k}\log\Big(\tan^{\frac{2}{n}}\theta - 2\cos\theta_{n,\,k}\tan^{\frac{1}{n}}\theta + 1\Big)$$
$$+\sin(n+m)\theta_{n,\,k}\arctan\left(\frac{\tan^{\frac{1}{n}}\theta - \cos\theta_{n,\,k}}{\sin\theta_{n,\,k}}\right)\Bigg] + C$$
$$\left(\theta_{n,\,k} := \frac{2k-1}{2n}\pi \text{ とした。} C \text{ は積分定数。}\right)$$

証明. $x := \tan^{\frac{1}{n}}\theta$ とおく。

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{n}\tan^{\frac{1}{n}-1}\theta\big(1+\tan^2\theta\big) = \frac{1}{n}x^{1-n}\big(1+x^{2n}\big)$$

より

$$d\theta = \frac{nx^{n-1}}{1+x^{2n}}\,dx$$

よって

$$\int \tan^{\frac{m}{n}}\theta\,d\theta = \int x^m \cdot \frac{nx^{n-1}}{1+x^{2n}}\,dx = n\int \frac{x^{n+m-1}}{1+x^{2n}}\,dx \tag{1}$$

[*1] 一応説明は書きましたがそれでもわからない方は調べていただければ結構出てくると思います。

[*2] 例えば $m > 0$ として $\dfrac{3}{4}\pi \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲であれば考えるが $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のような積分範囲は考えない（この場合は $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ をまたがない）ということ。