補題 1. (部分分数分解の公式) $k \in \mathbb{Z}$, $e(\theta) \coloneqq \cos\theta + i\sin\theta$ とする。
$\theta_{n,\,k} \coloneqq \dfrac{2k-1}{2n}\pi$, $z_{n,\,k} \coloneqq e(\theta_{n,\,k})$ とおく。$|m| < n$ のもとで $z \in \mathbb{C}$ に対して以下の等式が成り立つ。

$$\frac{z^{n+m-1}}{1+z^{2n}} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{z_{n,\,k}^{n+m}}{z-z_{n,\,k}}$$

補題 1 の証明. 方程式 $1+z^{2n}=0$ の解を考える。$r>0$, $0 \leqq \theta < 2\pi$ として $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおく。ド・モアブルの公式より

$$1+z^{2n}=0 \quad \text{すなわち} \quad r^{2n}(\cos 2n\theta + i\sin 2n\theta) = \cos\pi + i\sin\pi$$

である。絶対値と偏角を比較して

$$r=1, \quad 2n\theta = \pi + 2k\pi$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$$\theta = \frac{2k-1}{2n}\pi = \theta_{n,\,k} \quad (k=1,\,\ldots,\,2n)$$

よって解は $z = z_{n,\,k}$（$k=1,\,\ldots,\,2n$）である。
　以下のように部分分数分解されると仮定する。

$$\frac{z^{n+m-1}}{1+z^{2n}} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{a_{n,\,m,\,k}}{z-z_{n,\,l}}$$

すなわち，一般に数列 $\{a_k\}$ に対して $\displaystyle\prod_{\substack{1\leqq l\leqq N\\ l\neq k}} a_l \coloneqq a_1\cdot a_2\cdots a_{k-1}\cdot a_{k+1}\cdots a_N$ と定めて

$$z^{n+m-1} = \sum_{k=1}^{2n} a_{n,\,m,\,k}\prod_{\substack{1\leqq l\leqq 2n\\ l\neq k}}(z-z_{n,\,l})$$

が恒等式である仮定する。そうなるには $p=1,\,\ldots,\,2n$ として $z=z_{n,\,p}$ を代入した

$$z_{n,\,p}^{n+m-1} = \sum_{k=1}^{2n} a_{n,\,m,\,k}\prod_{\substack{1\leqq l\leqq 2n\\ l\neq k}}\underbrace{(z_{n,\,p}-z_{n,\,l})}_{k=p\ \text{のとき以外どれかが}\ 0\ \text{になる}} = a_{n,\,m,\,p}\prod_{\substack{1\leqq l\leqq 2n\\ l\neq p}}(z_{n,\,p}-z_{n,\,l}) \tag{2}$$

が成立する必要がある。ここで $z \neq z_{n,\,p}$ において以下の等式が常に成り立つことに注意する。

$$\prod_{\substack{1\leqq l\leqq 2n\\ l\neq p}}(z-z_{n,\,l}) = \frac{z^{2n}+1}{z-z_{n,\,p}} = \frac{z^{2n}-z_{n,\,p}^{2n}}{z-z_{n,\,p}} = \frac{(z/z_{n,\,p})^{2n}-1}{(z/z_{n,\,p})-1}\cdot z_{n,\,p}^{2n-1} = \sum_{l'=0}^{2n-1}\left(\frac{z}{z_{n,\,p}}\right)^{l'}\cdot\frac{-1}{z_{n,\,p}}$$

$$\therefore \prod_{\substack{1\leqq l\leqq 2n\\ l\neq p}}(z-z_{n,\,l}) = \sum_{l'=0}^{2n-1}\left(\frac{z}{z_{n,\,p}}\right)^{l'}\cdot\frac{-1}{z_{n,\,p}} \tag{3}$$