最後の変形において等比数列の和の公式と $z_{n,\,p}^{2n} = -1$ であることを用いた。$z = z_{n,\,p}$ 以外の任意の複素数について成立するということは $2n$ 個以上の解をもつということだから (3) は恒等式である。したがって $z = z_{n,\,p}$ を代入した

$$\prod_{\substack{1 \leqq l \leqq 2n \\ l \neq p}} (z_{n,\,p} - z_{n,\,l}) = \sum_{l'=0}^{2n-1} \left(\frac{z_{n,\,p}}{z_{n,\,p}} \right)^{l'} \cdot \frac{-1}{z_{n,\,p}} = -\frac{2n}{z_{n,\,p}}$$

が成り立つ。したがって (2) は

$$z_{n,\,p}^{n+m-1} = a_{n,\,m,\,p} \cdot \left(-\frac{2n}{z_{n,\,p}} \right) \quad \text{すなわち} \quad a_{n,\,m,\,p} = -\frac{1}{2n} z_{n,\,p}^{n+m}$$

と言い換えられて，$p = 1,\,\ldots,\,2n$ においてこれが成り立つことが必要条件であるとわかる。逆に p を k に変えて $a_{n,\,m,\,k} = -\dfrac{1}{2n} z_{n,\,k}^{n+m}$ を代入した

$$z^{n+m-1} = \sum_{k=1}^{2n} \left[-\frac{1}{2n} z_{n,\,k}^{n+m} \prod_{\substack{1 \leqq l \leqq 2n \\ l \neq k}} (z - z_{n,\,l}) \right] \tag{4}$$

は $z = z_{n,\,p}$ を各々代入することによって $p = 1,\,\ldots,\,2n$ の $2n$ 個の $z_{n,\,p}$ が確かに解になることがわかる。すると，$|m| < n$ により (4) は両辺いずれも $2n-1$ 次以下の式であるはずなのに $p = 1,\,\ldots,\,2n$ の $2n$ 個の $z = z_{n,\,p}$ を解に持っていることになる。したがって確かに恒等式であるとわかる。すると (4) の両辺 $1 + z^{2n}$ で割った

$$\frac{z^{n+m-1}}{1+z^{2n}} = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{z_{n,\,k}^{n+m}}{z - z_{n,\,k}}$$

が得られる。

（補題 1 証明終）

引き続き z のまま積分の中身を変形する。

$$\frac{z^{n+m-1}}{1+z^{2n}} = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{z_{n,\,k}^{n+m}}{z - z_{n,\,k}} = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{z_{n,\,k}^{n+m}}{z - z_{n,\,k}} + \frac{z_{n,\,2n+1-k}^{n+m}}{z - z_{2n+1-k}} \right)$$

ここで

$$\theta_{n,\,2n+1-k} = \frac{2(2n+1-k)-1}{2n}\pi = 2\pi - \frac{2k-1}{2n} = 2\pi - \theta_{n,\,k}$$

より $z_{n,\,2n+1-k} = z_{n,\,k}^{-1}$ であり

$$\begin{cases} z_{n,\,k} + z_{n,\,2n+1-k} = 2\cos\theta_{n,\,k} \\ z_{n,\,k} z_{n,\,2n+1-k} = 1 \end{cases}$$

である。また

$$\begin{aligned} &z_{n,\,k}^{n+m} z_{n,\,2n+1-k} + z_{n,\,2n+1-k}^{n+m} z_{n,\,k} = z_{n,\,k}^{n+m-1} + z_{n,\,k}^{-(n+m-1)} \\ &= e((n+m-1)\theta_{n,\,k}) + e(-(n+m-1)\theta_{n,\,k}) = 2\cos(n+m-1)\theta_{n,\,k} \end{aligned}$$