3　定積分（$|m| < n$ のとき）

3.1　指数の分子が正のとき

ここでは簡単のため $m > 0$ の範囲に限って考える。先にこの先の証明において必要になる定理を示しておく。$e(\theta) := \cos\theta + i\sin\theta$ とする。

定理 2. 三角関数の総和公式

$\theta, \varphi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ とする。以下の等式が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta+\varphi) = \frac{\sin\frac{n}{2}\theta\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta+\varphi\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} \qquad \sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta+\varphi) = \frac{\sin\frac{n}{2}\theta\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta+\varphi\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

証明.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta+\varphi) + i\sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta+\varphi) = \sum_{k=1}^{n}[\cos(k\theta+\varphi)+i\sin(k\theta+\varphi)] = \sum_{k=1}^{n} e(k\theta+\varphi) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} e(\varphi+\theta)e(\theta)^k \quad \text{（ド・モアブルの公式より）} \\
&= e(\varphi+\theta)\frac{1-e(\theta)^n}{1-e(\theta)} \quad \text{（等比数列の和の公式より）} \\
&= e(\varphi+\theta)\frac{1-e(n\theta)}{1-e(\theta)}
\end{aligned} \tag{5}$$

である。ここで一般に

$$\begin{aligned}
1-e(\theta) &= 1-(\cos\theta+i\sin\theta) = (1-\cos\theta) - i\sin\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2} - 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\
&= -2i\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right) = -2i\sin\frac{\theta}{2}e\left(\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

であることを用いると (5) の式は

$$e(\varphi+\theta)\frac{-2i\sin\frac{n}{2}\theta e\left(\frac{n}{2}\theta\right)}{-2i\sin\frac{\theta}{2}e\left(\frac{\theta}{2}\right)} = e(\varphi+\theta)\frac{e\left(\frac{n}{2}\theta\right)}{e\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cdot\frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}e\left(\frac{n+1}{2}\theta+\varphi\right)$$

と変形できる。はじめの式と実部と虚部を比較して

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta+\varphi) = \frac{\sin\frac{n}{2}\theta\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta+\varphi\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} \qquad \sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta+\varphi) = \frac{\sin\frac{n}{2}\theta\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta+\varphi\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

を得る。