

定理 3. 0 から $\frac{\pi}{2}$ までの定積分

$m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ として, $|m| < n$ かつ $m > 0$ のもとで以下の等式が成り立つ。

$$\lim_{\theta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \int_0^{\theta_1} \tan^{\frac{m}{n}} \theta d\theta = \frac{\pi}{2 \cos\left(\frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}\right)}$$

証明.

$$f(0) = \sum_{k=1}^n \left[-\frac{1}{2} \cos(n+m)\theta_{n,k} \log\left(\tan^{\frac{2}{n}} \theta - 2 \tan^{\frac{1}{n}} \theta \cos \theta_{n,k} + 1\right) \right. \\ \left. + \sin(n+m)\theta_{n,k} \arctan\left(\frac{\tan^{\frac{1}{n}} \theta - \cos \theta_{n,k}}{\sin \theta_{n,k}}\right) \right]$$

第 1 項は \log の中身が 1 なので 0。ここで

$$-\frac{\cos \theta_{n,k}}{\sin \theta_{n,k}} = \frac{\sin\left(\theta_{n,k} - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta_{n,k} - \frac{\pi}{2}\right)} = \tan\left(\theta_{n,k} - \frac{\pi}{2}\right)$$

であり $1 \leq k \leq n$ において $0 < \theta_{n,k} = \frac{2k-1}{2n}\pi < \pi$ より $-\frac{\pi}{2} < \theta_{n,k} - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$ であることに注意して

$$f(0) = \sum_{k=1}^n \sin((n+m)\theta_{n,k}) \cdot \left(\theta_{n,k} - \frac{\pi}{2}\right)$$

である。 $\theta_0 = \frac{n+m}{2n}\pi$ として定理 2 において θ, φ をそれぞれ $2\theta_0, -\theta_0$ とすると

$$\sum_{k=1}^n \cos(n+m)\theta_{n,k} = \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)\theta_0 = \frac{\sin n\theta_0}{\sin \theta_0} \cos n\theta_0 = \frac{\sin 2n\theta_0}{\sin \theta_0} = \frac{\sin(n+m)\pi}{\sin \theta_0} = 0$$