

であるからこれを用いると

$$\begin{aligned}
& \lim_{\theta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} f(\theta_1) \\
&= \lim_{\theta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \sum_{k=1}^n \left[-\frac{1}{2} \cos(n+m)\theta_{n,k} \log \left(\tan^{\frac{2}{n}} \theta_1 - 2 \tan^{\frac{1}{n}} \theta_1 \cos \theta_{n,k} + 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \sin(n+m)\theta_{n,k} \arctan \left(\frac{\tan^{\frac{1}{n}} \theta_1 - \cos \theta_{n,k}}{\sin \theta_{n,k}} \right) \right] \\
&= \lim_{\theta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \left(\sum_{k=1}^n \left[-\frac{1}{2} \cos(n+m)\theta_{n,k} \underbrace{\log \left(1 - 2 \tan^{-\frac{1}{n}} \theta_1 + \tan^{-\frac{2}{n}} \theta_1 \right)}_{\rightarrow 0} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sin(n+m)\theta_{n,k} \arctan \left(\frac{\tan^{\frac{1}{n}} \theta_1 - \cos \theta_{n,k}}{\sin \theta_{n,k}} \right) \right] + \log \left(\tan^{\frac{2}{n}} \theta_1 \right) \underbrace{\sum_{k=1}^n -\frac{1}{2} \cos(n+m)\theta_{n,k}}_{=0} \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{2} \sin(n+m)\theta_{n,k}
\end{aligned}$$

である*3。したがって

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \int_0^{\theta_1} \tan^{\frac{m}{n}} \theta d\theta &= \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{2} \sin(n+m)\theta_{n,k} - \sum_{k=1}^n \left(\theta_{n,k} - \frac{\pi}{2} \right) \sin(n+m)\theta_{n,k} \\
&= \sum_{k=1}^n (\pi - \theta_{n,k}) \sin(n+m)\theta_{n,k} \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\pi - \frac{2k-1}{2n} \pi \right) \sin \left(\frac{n+m}{n} \frac{2k-1}{2} \pi \right)
\end{aligned}$$

が得られる。ここで $l = n - k + 1$ とおくと

$$\begin{aligned}
(\text{上式}) &= \sum_{l=1}^n \left(\pi - \frac{2(n-l+1)-1}{2n} \pi \right) \sin \left(\frac{n+m}{n} \frac{2(n-l+1)-1}{2} \pi \right) \\
&= \frac{(-1)^{n+m+1} \pi}{2n} \sum_{l=1}^n (2l-1) \sin(2l-1)\theta \quad \left(\theta = \frac{n+m}{2n} \pi \text{ とした。} \right)
\end{aligned} \tag{6}$$

になる。sin の中については以下の変形をした。

$$\begin{aligned}
\sin \left(\frac{n+m}{n} \frac{2(n-l+1)-1}{2} \pi \right) &= \sin[(n+m)\pi - (2l-1)\theta] \\
&= \sin(n+m)\pi \cos(2l-1)\theta - \cos(n+m)\pi \sin(2l-1)\theta \\
&= (-1)^{n+m+1} \sin(2l-1)\theta
\end{aligned}$$

*3 $\sum_{k=1}^n -\frac{1}{2} \cos(n+m)\theta_{n,k}$ は「 $\theta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ で 0 に漸近する」のではなく「0 そのものになる」ので不定形ではないことに注意。