補題 2. $n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R}$ として以下の等式が成り立つ。

$$\sum_{l=1}^{n}(2l-1)\sin(2l-1)\theta = \frac{1}{2\sin^2\theta}[-2n\cos 2n\theta\sin\theta + \sin 2n\theta\cos\theta]$$

補題 2 の証明. 一般の θ に対して

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{n}(2l-1)\sin(2l-1)\theta = \frac{1}{\sin\theta}\sum_{l=1}^{n}(2l-1)\sin(2l-1)\theta\sin\theta \\
&= \frac{1}{\sin\theta}\sum_{l=1}^{n}(2l-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(\cos(2l\theta)-\cos(2(l-1)\theta)) \\
&= -\frac{1}{2\sin\theta}\left[\sum_{l=1}^{n}\{(2l+1)\cos(2l\theta)-(2(l-1)+1)\cos(2(l-1)\theta)\} - \sum_{l=1}^{n}2\cos(2l\theta)\right] \\
&= -\frac{1}{2\sin\theta}\left[(2n+1)\cos 2n\theta - 1 - 2\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\cos(n+1)\theta\right] \quad \text{（和の中抜けと定理 2 を用いた。）} \\
&= -\frac{1}{2\sin\theta}\left[2n\cos 2n\theta + \cos 2n\theta - 1 - \frac{2}{\sin\theta}\sin n\theta\cdot(\cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta)\right] \\
&= -\frac{1}{2\sin\theta}\left[2n\cos 2n\theta + \cos 2n\theta - 1 - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin 2n\theta + 2\sin^2 n\theta\right] \\
&= -\frac{1}{2\sin\theta}\left[2n\cos 2n\theta - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin 2n\theta\right] \quad \text{（2 倍角の公式より）} \\
&= \frac{1}{2\sin^2\theta}[-2n\cos 2n\theta\sin\theta + \sin 2n\theta\cos\theta]
\end{aligned}$$

である。

（補題 2 証明終）

これを用いると，$\sin 2n\theta = \sin(n+m)\pi = 0$, $\cos 2n\theta = \cos(n+m)\pi = (-1)^{n+m}$ より (6) の式は

$$\frac{(-1)^{n+m+1}\pi}{2n}\cdot\frac{(-2n)\cdot(-1)^{n+m}\sin\theta}{2\sin^2\theta} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sin\theta} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sin\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\cos\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)}$$

と変形できる。よって示された。

（証明終）

定理 4. 0 から $\frac{\pi}{4}$ までの定積分

$m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ として，$|m| < n$ かつ $m > 0$ のもとで以下の等式が成り立つ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{\frac{m}{n}}\theta\, d\theta = \frac{\pi}{4\cos\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(n+m)\theta_{n,k}\log(2(1-\cos\theta_{n,k}))$$