証明.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{1}{2}\cos(n+m)\theta_{n,\,k}\log(2(1-\cos\theta_{n,\,k}))+\sin(n+m)\theta_{n,\,k}\arctan\left(\frac{1-\cos\theta_{n,\,k}}{\sin\theta_{n,\,k}}\right)\right]$$

である。ここで

$$\frac{1-\cos\theta_{n,\,k}}{\sin\theta_{n,\,k}}=\frac{2\sin^2\dfrac{\theta_{n,\,k}}{2}}{2\sin\dfrac{\theta_{n,\,k}}{2}\cos\dfrac{\theta_{n,\,k}}{2}}=\tan\frac{\theta_{n,\,k}}{2}$$

であり，$1\leqq k\leqq n$ より $0<\theta_{n,\,k}<\pi$ であるから $0<\dfrac{\theta_{n,\,k}}{2}<\dfrac{\pi}{2}$。よって以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{\frac{m}{n}}\theta\,d\theta=f\left(\frac{\pi}{4}\right)-f(0)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left\{-\frac{1}{2}\cos(n+m)\theta_{n,\,k}\log[2(1-\cos\theta_{n,\,k})]+\frac{1}{2}(\pi-\theta_{n,\,k})\sin(n+m)\theta_{n,\,k}\right\}\\
&=\frac{\pi}{4\cos\left(\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(n+m)\theta_{n,\,k}\log[2(1-\cos\theta_{n,\,k})]
\end{aligned}$$

最後の変形で第 2 項の値は定理 3 の証明の結果の半分になることを用いて求めた。

（証明終）

3.2 指数の分子が負のとき

以下，簡単のため広義積分を lim を使わずに表す。また，ややこしさを避けるために $m<0$ とするのではなく「$m>0$ として $\tan^{\frac{-m}{n}}\theta$ の積分を求める」ことによって負数に拡張していることに注意。

定理 5.

指数の分子が負の場合も定理 3 が成立する。

証明. $m>0$ として指数を $\dfrac{-m}{n}$ とする。

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{\frac{-m}{n}}\theta\,d\theta&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\tan^{\frac{-m}{n}}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)d\varphi\quad\left(\varphi=\frac{\pi}{2}-\theta\text{と置換}\right)\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{\frac{m}{n}}\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{4\cos\left(\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)}=\frac{\pi}{4\cos\left(\dfrac{-m}{n}\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)}
\end{aligned}$$

（証明終）