定理 6.

指数の分子が負の場合も定理 4 が成立する。

証明. $m > 0$ として指数を $\dfrac{-m}{n}$ とする。

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{\frac{-m}{n}} \theta \, d\theta &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{\frac{-m}{n}} \varphi \, d\varphi \quad \left(\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta \text{と置換}\right) \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan^{\frac{m}{n}} \varphi \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{\frac{m}{n}} \varphi \, d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{\frac{m}{n}} \varphi \, d\varphi \\
&= \frac{\pi}{2\cos\left(\dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)} - \left[\frac{\pi}{4\cos\left(\dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \cos(n+m)\theta_{n,\,k} \log(2(1 - \cos\theta_{n,\,k})) \right]
\end{aligned}$$

である。ここで三角関数の和積公式より

$$\cos(n-m)\theta_{n,\,k} + \cos(n+m)\theta_{n,\,k} = 2\cos n\theta_{n,\,k} \cos n\theta_{n,\,k}$$

であり $2k-1$ は奇数なので

$$\cos n\theta_{n,\,k} = \cos n \cdot \frac{2k-1}{2n}\pi = \cos \frac{2k-1}{2}\pi = 0$$

よって

$$\cos(n+m)\theta_{n,\,k} = -\cos(n-m)\theta_{n,\,k}$$

以上より

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{\frac{-m}{n}} \theta \, d\theta &= \frac{\pi}{4\cos\left(\dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (-\cos(n-m)\theta_{n,\,k}) \cdot \log(2(1 - \cos\theta_{n,\,k})) \\
&= \frac{\pi}{4\cos\left(\dfrac{-m}{n} \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \cos(n-m)\theta_{n,\,k} \cdot \log(2(1 - \cos\theta_{n,\,k}))
\end{aligned}$$

であり，指数の分子が負の場合も定理 4 を適用可能なことが示された。

（証明終）

以上の議論により，$|m| < n$ すなわち絶対値が 1 より小さい有理数 r に対して $\tan^r \theta$ の積分を求められるという事実とその方法が得られた。

4 $|m| > n$ のとき

4.1 指数の分子が正のとき

ここまでの議論では $|m| < n$ のもののみを考えていた。ここからは $|m| > n$ すなわち指数の絶対値が 1 より大きくなるものを取り扱う。とはいえ 2 節の部分分数分解の議論が成り立たないのでそのままの形で $|m| < n$ の公式を用い