ることは不可能である（desmos でも実験してみたが違う値になってしまうようである)。そこで「次数を下げる」というわゆる「$\tan^n\theta$ の積分」を解く方法を参考にしてみる。$(\tan\theta)' = 1+\tan^2\theta$ の公式をもとにしている。

$\tan^n\theta$ の積分

$n\in\mathbb{N}$ とする。整式の割り算によって

$$\tan^n\theta = \left(1+\tan^2\theta\right)p(\tan\theta)+a\tan\theta+b$$

（$p(x)$ を x の整式とした。）と変形することによって $P(x)=\displaystyle\int p(x)\,dx$ として

$$\int\tan^n\theta\,d\theta = P(\tan\theta)-a\log|\cos\theta|+b\theta+C\quad（C \text{ は積分定数}）$$

として積分することが可能。

試行錯誤の結果，以下のようにすると積分可能であることがわかった。

$\tan^{\frac{m}{n}}\theta$ の積分

$m>0,\ |m|>n,\ \dfrac{m}{n}=2p+q$（$p\in\mathbb{N},\ -1<q<1,\ q$ は有理数）とする。

$$x^p=(1+x)p(x)+b$$

（$p(x)$ を x の整式とした）として

$$\begin{aligned}\tan^{\frac{m}{n}}\theta &= \tan^{2p+q}\theta = \left(\tan^2\theta\right)^p\tan^q\theta\\ &= \left\{\left(1+\tan^2\theta\right)p\left(\tan^2\theta\right)+b\right\}\tan^q\theta\\ &= \left(1+\tan^2\theta\right)\left[p\left(\tan^2\theta\right)\tan^q\theta\right]+b\tan^q\theta\end{aligned}$$

と変形する。すると $P(x)=\displaystyle\int p\left(x^2\right)x^q\,dx$ として

$$\int\tan^{\frac{m}{n}}\theta\,d\theta = P(\tan\theta)+b\int\tan^q\theta\,d\theta$$

として積分することが可能である。なお計算によって $P,\,b$ の具体的な形を求めることができるので

$$\int\tan^{\frac{m}{n}}\theta\,d\theta = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{k+p-1}\frac{\tan^{2k+q+1}\theta}{2k+q+1}+(-1)^p\int\tan^q\theta\,d\theta$$

とすることも可能である。

新しい受験数学の定石がまたひとつできた。

4.2　指数の分子が負のとき

ここからは煩雑な分数表記を避けるために $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$ を用いて表す。