

cot の微分公式

$$(\cot \theta)' = -(1 + \cot^2 \theta)$$

証明.

$$(\cot \theta)' = \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)' = \frac{-\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} = -(1 + \cot^2 \theta)$$

(証明終)

cot を用いて $\tan^{-\frac{m}{n}} \theta$ の積分を求めてみよう。引き続き $m > 0$ のまま $\tan^{-\frac{m}{n}} \theta$ の積分を求める方法をとる。

$\tan^{-\frac{m}{n}} \theta$ の積分

$m > 0, |m| > n, \frac{m}{n} = 2p + q$ ($p \in \mathbb{N}, -1 < q < 1, q$ は有理数) とする。

$$x^p = (1+x)p(x) + b$$

($p(x)$ を x の整式とした) として

$$\begin{aligned} \tan^{-\frac{m}{n}} \theta &= \cot^{\frac{m}{n}} \theta = \cot^{2p+q} \theta = (\cot^2 \theta)^p \cot^q \theta \\ &= \{(1 + \cot^2 \theta)p(\cot^2 \theta) + b\} \cot^q \theta \\ &= (1 + \cot^2 \theta) [p(\cot^2 \theta) \cot^q \theta] + b \cot^q \theta \end{aligned}$$

と変形する。すると $P(x) = \int p(x^2)x^q dx$ として

$$\int \tan^{-\frac{m}{n}} \theta d\theta = -P(\tan \theta) + b \int \tan^{-q} \theta d\theta$$

として積分することが可能である。なお計算によって P, b の具体的な形を求めることができるので

$$\int \tan^{-\frac{m}{n}} \theta d\theta = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{k+p} \frac{\tan^{2k+q+1} \theta}{2k+q+1} + (-1)^p \int \tan^q \theta d\theta$$

とすることも可能である。

以上により任意の有理数 r に対して $\tan^r \theta$ を初等関数の範囲で具体的に積分する方法が得られた。

5 今週の積分 #100 の問題

今週の積分 #100 の問題

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x} dx$$