

例題

次の積分を求めよ。

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan^{-\frac{5}{2}} \theta d\theta$$

解法；置換積分で範囲を変える

$\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$ とする。 $d\theta = -d\varphi$ より

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan^{-\frac{5}{2}} \theta d\theta &= \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \tan^{-\frac{5}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{\frac{5}{2}} \varphi d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 \varphi) \cdot \tan^{\frac{1}{2}} \varphi d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{\frac{1}{2}} \varphi d\varphi \\ &= \left[\frac{2}{3} \tan^{\frac{3}{2}} \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \pi - \frac{\sqrt{2}}{2} \log(1 + \sqrt{2}) \right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{4} \pi + \frac{\sqrt{2}}{2} \log(1 + \sqrt{2}) \cdots \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

6 応用例

公式

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{2}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{\frac{2}{n}-1} \theta d\theta$$

解答

$x = \tan^{\frac{2}{n}} \theta$ とおいて置換積分する。

ここからさらに一般化して $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$ の積分を n で表すこともできる。 $(n > 1 \text{ とする。})$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = \frac{1}{n} \left(\frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi}{n}} - \sum_{k=1}^n \cos 2\theta_{n,k} \log[2(1 - \cos \theta_{n,k})] \right)$$

裏技公式的に暗記しておいても損はないかもしれない。だがあえて一般化しないメリットもある。以下の問題を見ていただきたい。