問題

次の積分を求めよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+x^6}$$

解答

公式を用いる。

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{2}{6}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{\frac{2}{6}-1}\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{-\frac{2}{3}}\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\frac{\pi}{4\cos\left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\right)} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\cos\left[(-2+3)\frac{2k-1}{2\cdot 3}\pi\right]\log\left(2\left(1-\cos\frac{2k-1}{2\cdot 3}\right)\pi\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\frac{\pi}{4\cdot\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\log\left(2-\sqrt{3}\right)+0+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\log\left(2+\sqrt{3}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\log\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}\log\left(2+\sqrt{3}\right)\cdots\cdots(\text{答})$$

実は途中で $\frac{2}{6}-1=-\frac{4}{6}$ を $-\frac{2}{3}$ に約分することによって計算する項数が半分になっている。おわかりいただけただろうか。ちなみにこの問題，普通に解くと部分分数分解が難しい骨のある問題である。

7　おわりに

任意の有理数 r に対して $\tan^r\theta$ が初等関数の範囲で積分可能であることを示し，具体的な求め方を考えてみました。はじめは 2 節の不定積分の内容のみで済ませる予定でしたが

- 特定の範囲の定積分の値が綺麗になった
- 任意の有理数に対して示したくなった
- 定石として汎用的に使う方法を思いついてしまった

ことから非常に長い内容になってしまいました。欲を言うと実数全体について示したくなってしまったのですが，今は近似分数列が収束するということにして納得しています[*4]。

論旨から外れるので書きませんでしたが，もし実数全体について示すことができれば Γ 関数の相反公式等を示すことができます。

[*4] この辺もいつかちゃんと証明したいと思っています。