本节可配合第五讲观看

正态分布均值的假设检验

在第五讲学习相关系数的时候，我给大家简单的回顾了《概率论与数理统计》这门科目要学的假设检验的原理，当时限于主题，我们只学习了相关系数的显著性检验。

在本讲中，我将带大家一起学习任何一本《概率论与数理统计》教材都会学到的均值假设检验。大家如果没有学过这门科目，请先再去回顾一下第五讲的第二部分，特别是里面的假设检验的步骤。假设检验的步骤可以归纳如下：(1)写出原假设和备择假设；(2)在原假设成立的条件下，构造一个统计量，该统计量服从某一分布；(3)用已知的样本数据带入统计量的公式，得到一个检验值；（4）给定置信水平来得到一个接受域的区间，看检验值是否落在接受域中，或者用检验值和区间的临界值进行比较，来判断是否接受原假设（或者计算该检验值对应于其分布的p值，并将p值和指定的显著性水平比较从而来确定是否接受原假设）。

下面，我就以浙江大学概率论与数理统计（第四版）为参考教材来为大家讲解均值假设检验，这也是我们建模中可能用到的统计方法。

温馨提示

（1）视频中提到的附件可在**售后群的群文件**中下载。

包括**讲义、代码、我视频中推荐的资料**等。

- 拓展资料(暂时不需要下载，视频中用到了再来下载)
- 赠品(有需要的同学可以下载)
- 播放器和帮助文档(进群后先下载帮助文档观看)
- 上课用的课件和代码(下载后记得解压，所有视频配套的都在里面)
- 免费更新的视频_下载后解压了才能用播放器打开

（2）关注我的**微信公众号《数学建模学习交流》**，后台发送**"软件"**两个字，可获得常见的建模软件下载方法；发送**"数据"**两个字，可获得建模数据的获取方法；发送**"画图"**两个字，可获得数学建模中常见的画图方法。另外，也可以看看公众号的历史文章，里面发布的都是对大家有帮助的技巧。

（3）**购买更多优质精选的数学建模资料**，可关注我的微信公众号《数学建模学习交流》，在后台发送**"买"**这个字即可进入店铺进行购买。

（4）视频价格不贵，但价值很高。单人购买观看只需要**58元**，和另外两名队友一起购买人均仅需**46元**，视频本身也是下载到本地观看的，所以请大家**不要侵犯知识产权**，对视频或者资料进行二次销售。

P178例题

例1：某车间用一台包装机包装葡萄糖。袋装糖的净重是一个随机变量，它服从正态分布。当机器正常时，其均值为0.5kg，标准差为0.015kg。某日开工后为检验包装机是否正常，随机地抽取它所包装的糖9袋，称得净重(kg)为:

0.497 0.506 0.518 0.524 0.498 0.511 0.520 0.515 0.512

问机器是否正常?

总体: X表示机器正常时袋装糖的净重

那么$X \sim N(u_0, \sigma^2)$ 其中$u_0 = 0.5$ $\sigma^2 = 0.015^2$

样本: 我们观测到的9袋糖的净重$X_i (i = 1, 2, \cdots, 9)$

注意，只有机器正常时，$X_i \sim N(0.5, 0.015^2)$

如果不正常时，说明$u_0 \neq 0.5$(和0.5有显著的差异)

P178例题的求解

题目问我们机器是否正常，首先我们定义什么是机器正常。

以 μ,σ 分别表示这一天袋装糖的净重总体 X 的均值和标准差. 由于长期实践表明标准差比较稳定，我们就设 $\sigma=0.015$. 于是 $X\sim N(\mu,0.015^2)$，这里 μ 未知. 问题是根据样本值来判断 $\mu=0.5$ 还是 $\mu\neq0.5$. 为此，我们提出两个相互对立的假设

$$H_0:\mu=\mu_0=0.5$$

和

$$H_1:\mu\neq\mu_0.$$

根据上面的原假设和备择假设的定义，我们知道：

如果原假设H_0成立，或者说我们不能拒绝原假设时，机器正常。

如果备择假设H_1成立，或者说我们拒绝了原假设时，机器不正常。

P178例题的求解

假设检验的步骤可以归纳如下：(1)写出原假设和备择假设；**(2)在原假设成立的条件下，构造一个统计量，该统计量服从某一分布；**(3)用已知的样本数据带入统计量的公式，得到一个检验值；（4）给定置信水平来得到一个接受域的区间，看检验值是否落在接受域中，或者用检验值和区间的临界值进行比较，来判断是否接受原假设（或者计算该检验值对应于其分布的p值，并将p值和指定的显著性水平比较从而来确定是否接受原假设）。

$$H_0: u = 0.5 \ , H_1: u \neq 0.5$$

样本: 我们观测到的9袋糖的净重$X_i(i=1,2,\cdots,9)$

注意，只有机器正常时，$X_i \sim N(0.5, 0.015^2)$

我们定义样本均值：$\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{9} X_i}{9}$，根据正态分布的性质：$\overline{X} \sim N(u_0, \dfrac{\sigma^2}{n})$

我们构造的统计量$\overline{X} \sim N(0.5, \dfrac{0.015^2}{9})$

P178例题的求解

假设检验的步骤可以归纳如下：(1)写出原假设和备择假设；**(2)在原假设成立的条件下，构造一个统计量，该统计量服从某一分布；**(3)用已知的样本数据带入统计量的公式，得到一个检验值；（4）给定置信水平来得到一个接受域的区间，看检验值是否落在接受域中，或者用检验值和区间的临界值进行比较，来判断是否接受原假设（或者计算该检验值对应于其分布的p值，并将p值和指定的显著性水平比较从而来确定是否接受原假设）。

注意：这里的分布一般是标准正态分布、t分布、χ^2分布和F分布

我们构造的统计量$\overline{X}\sim N(u_0,\dfrac{\sigma^2}{n})=N(0.5,\dfrac{0.015^2}{9})$

因此需要将其转换为一个标准正态分布：$\dfrac{\overline{X}-u_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}\sim N(0,1)$

构造新的统计量$z=\dfrac{\overline{X}-0.5}{\sqrt{\dfrac{0.015^2}{9}}}\sim N(0,1)$

P178例题的求解

假设检验的步骤可以归纳如下：(1)写出原假设和备择假设；(2)在原假设成立的条件下，构造一个统计量，该统计量服从某一分布；**(3)用已知的样本数据带入统计量的公式，得到一个检验值；**（4）给定置信水平来得到一个接受域的区间，看检验值是否落在接受域中，或者用检验值和区间的临界值进行比较，来判断是否接受原假设（或者计算该检验值对应于其分布的p值，并将p值和指定的显著性水平比较从而来确定是否接受原假设）。

统计量$z=\dfrac{\overline{X}-0.5}{\sqrt{\dfrac{0.015^2}{9}}}\sim N(0,1)$，下面我们计算检验值$z*$

$$\overline{X}=\frac{0.497+0.506+0.518+0.524+0.498+0.511+0.520+0.515+0.512}{9}=0.511222$$

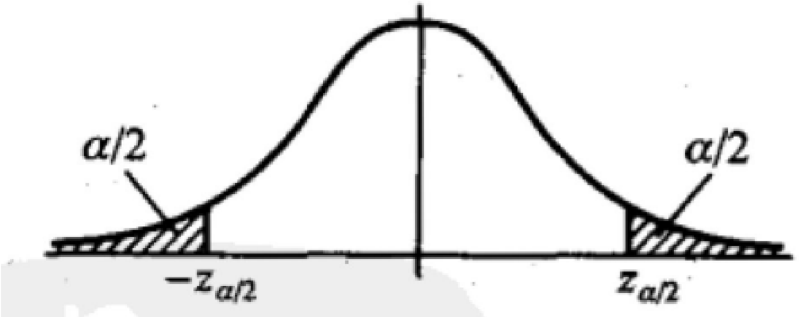
$$\sqrt{\frac{0.015^2}{9}}=0.005$$

$$z*=\frac{0.511222-0.5}{0.005}=2.24444$$

P178例题的求解

假设检验的步骤可以归纳如下：(1)写出原假设和备择假设；(2)在原假设成立的条件下，构造一个统计量，该统计量服从某一分布；(3)用已知的样本数据带入统计量的公式，得到一个检验值；**（4）给定置信水平来得到一个接受域的区间，看检验值是否落在接受域中，或者用检验值和区间的临界值进行比较，来判断是否接受原假设（或者计算该检验值对应于其分布的p值，并将p值和指定的显著性水平比较从而来确定是否接受原假设）。**

一般我们常取的置信水平为0.95，对应的显著性水平α=0.05



查询正态分布临界值表格可以得到：$z_{0.025}=1.96$，所以，我们可以得到接受域为[−1.96,1.96]
由于检验值z*=2.24不在接受域，所以我们拒绝原假设，认为机器不正常。

α	0.400	.0300	0.200	0.100	0.050	0.025	0.020	0.010
z_α	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326
$z_{\alpha/2}$	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.240	2.326	2.576

临界值表格：https://wenku.baidu.com/view/ec61299eb7360b4c2f3f6413.html

P178例题的求解

假设检验的步骤可以归纳如下：(1)写出原假设和备择假设；(2)在原假设成立的条件下，构造一个统计量，该统计量服从某一分布；(3)用已知的样本数据带入统计量的公式，得到一个检验值；**（4）给定置信水平来得到一个接受域的区间，看检验值是否落在接受域中，或者用检验值和区间的临界值进行比较，来判断是否接受原假设（或者计算该检验值对应于其分布的p值，并将p值和指定的显著性水平比较从而来确定是否接受原假设）。**

$$z^* = \frac{0.511222 - 0.5}{0.005} = 2.24444$$

下面我们从p值的角度重新来看这个问题。

由于在H_0成立的条件下，我们有$z \sim N(0,1)$

我们可以计算出z^*对应的p值(双侧检验p值是单侧的两倍)：

$$p = 2 * P(z > z^*) = 2 * (1 - \Phi(z^*)) = 0.0248 < 0.05$$

所以我们可以在95%的置信水平下拒绝原假设，即认为机器不正常。

($\Phi(x)$是标准正态分布的累积密度函数,用$matlab$的$normcdf$函数可以求解)

单侧检验的例子

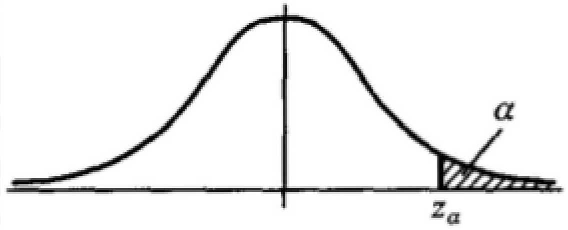
例2：公司从生产商购买牛奶。公司怀疑生产商在牛奶中掺水以谋利。通过测定牛奶的冰点，可以检验出牛奶是否掺水。天然牛奶的冰点温度近似服从正 态分布，均值$u_0 = -0.545$°C，标准差$\sigma = 0.008$ °C, 牛奶掺水可使冰点温度升高而接近于水的冰点温度(0 °C). 测得生产商提交的5 批牛奶的冰点温度，其均值$\bar{x}$为-0. 535°C，问是否可以认为生产商在牛奶中掺了水？取$\alpha = 0.05$.

解 按题意需检验假设

$$H_0: \mu \leqslant \mu_0 = -0.545\text{（即设牛奶未掺水）},$$
$$H_1: \mu > \mu_0\text{（即设牛奶已掺水）}$$

这是右边检验问题，其拒绝域如(1.6)式所示，即为

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geqslant z_{0.05} = 1.645.$$



现在 $z = \dfrac{-0.535-(-0.545)}{0.008/\sqrt{5}} = 2.7951 > 1.645$，$z$ 的值落在拒绝域中，所以我们在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0，即认为牛奶商在牛奶中掺了水. □

也可以计算出p值： p = 1-normcdf(2.7951)=0.0026

从Z检验到t检验

1. σ^2 已知，关于 μ 的检验（Z 检验）

在§1中已讨论过正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 当 σ^2 已知时关于 μ 的检验问题(1.2)，(1.3)，(1.4)。在这些检验问题中，我们都是利用统计量 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 来确定拒绝域的。这种检验法常称为 Z 检验法。

我们前面解决的两个例题都用到了Z检验法，Z检验法的核心是总体服从正态分布，且该正态分布的均值未知，需要我们检验，但方差已知。

然而，在现实问题中，总体的方差也往往是未知的，如果总体方差未知，那么我们就不能构造出服从标准正态分布的统计量，但令人高兴的是，我们可以通过引入样本方差，来构造出一个服从t分布的统计量。那么，接下来的步骤就和之前一样了，在t分布的前提下找出接受域和拒绝域，看t检验值是否落在接受域内即可判断原假设是否成立。

t检验（用的较多，比如第7讲的回归里面）

2. σ^2 未知，关于 μ 的检验（t 检验）

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 未知，我们来求检验问题

$$H_0:\mu=\mu_0,\quad H_1:\mu\neq\mu_0$$

的拒绝域（显著性水平为 α）.

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本. 由于 σ^2 未知，现在不能利用 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 来确定拒绝域了. 注意到 S^2 是 σ^2 的无偏估计，我们用 S 来代替 σ，采用

$$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

H_0成立时服从自由度为$n-1$的t分布

作为检验统计量. 当观察值 $|t|=\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|$ 过分大时就拒绝 H_0，拒绝域的形式为

$$|t|=\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\geqslant k.$$

由第六章 §3 定理三知，当 H_0 为真时，$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，故由

$$P\{当\ H_0\ 为真拒绝\ H_0\}=P_{\mu_0}\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|\geqslant k\right\}=\alpha$$

得 $k=t_{\alpha/2}(n-1)$，即得拒绝域为

$$|t|=\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\geqslant t_{\alpha/2}(n-1). \tag{2.1}$$

对于正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，当 σ^2 未知时，关于 μ 的单边检验的拒绝域在表 8.1 中给出.

上述利用 t 统计量得出的检验法称为 t **检验法**.

t检验的例题

在实际中，正态总体的方差常为未知，所以我们常用 t 检验法来检验关于正态总体均值的检验问题.

例 1 某种元件的寿命 X(以 h 计)服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 均未知. 现测得 16 只元件的寿命如下：

159	280	101	212	224	379	179	264
222	362	168	250	149	260	485	170

问是否有理由认为元件的平均寿命大于 225 h?

解 按题意需检验

$$H_0:\mu\leqslant\mu_0=225,\quad H_1:\mu>225.$$

取 $\alpha=0.05$. 由表 8.1 知此检验问题的拒绝域为

$$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\geqslant t_\alpha(n-1).$$

现在 $n=16$，$t_{0.05}(15)=1.7531$. 又算得 $\overline{x}=241.5$，$s=98.7259$，即有

$$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=0.6685<1.7531.$$

t 没有落在拒绝域中，故接受 H_0，即认为元件的平均寿命不大于 225 h. □

我们可以利用matlab计算出检验值对应的p值：1 - tcdf(0.6685,15)=0.257>0.05

两个正态总体均值差的检验

前面我们探讨的问题都只有一组服从同一正态分布的样本，并要我们根据样本数据来检验总体均值与某一常数是否有显著差异。现实生活中，可能要我们比较两组正态分布的总体的均值差异是否显著，这时候就有两组样本供我们检验。

假设$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$是来自正态总体$N(u_1,\sigma_1^2)$的样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$是来自正态总体$N(u_2,\sigma_2^2)$的样本，且假设两组样本独立。

现在要我们检验u_1和u_2的差与一个常数δ是否有显著差异。

注意，和之前只有一组样本一样，我们这里的检验也要分为Z检验和t检验：
若总体的方差σ_1^2和σ_2^2都是已知的，那么我们构造的检验统计量服从标准正态分布，应使用Z检验；如果总体的方差σ_1^2和σ_2^2都未知，我们构造的检验统计量就服从t分布，就应该使用t检验，但是要注意，这里我们要假设$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，否则t分布是构造不出来的，这个条件看起来很强，但实际上还是容易满足的，比如我们要检验男女生的平均结婚年龄是否有显著差异。

（在实际建模中，我们用的最多的还是t检验，因为总体的方差我们一般是不知道的）

来看一张表格吧（P189）

	原假设 H_0	检验统计量	备择假设 H_1	拒绝域	服从的分布
1	$\mu\leqslant\mu_0$ $\mu\geqslant\mu_0$ $\mu=\mu_0$ (σ^2 已知)	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu\neq\mu_0$	$z\geqslant z_\alpha$ $z\leqslant -z_\alpha$ $\|z\|\geqslant z_{\alpha/2}$	标准正态分布
2	$\mu\leqslant\mu_0$ $\mu\geqslant\mu_0$ $\mu=\mu_0$ (σ^2 未知)	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu\neq\mu_0$	$t\geqslant t_\alpha(n-1)$ $t\leqslant -t_\alpha(n-1)$ $\|t\|\geqslant t_{\alpha/2}(n-1)$	自由度为n-1的t分布
3	$\mu_1-\mu_2\leqslant\delta$ $\mu_1-\mu_2\geqslant\delta$ $\mu_1-\mu_2=\delta$ (σ_1^2,σ_2^2 已知)	$Z=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\mu_1-\mu_2>\delta$ $\mu_1-\mu_2<\delta$ $\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$z\geqslant z_\alpha$ $z\leqslant -z_\alpha$ $\|z\|\geqslant z_{\alpha/2}$	标准正态分布
4	$\mu_1-\mu_2\leqslant\delta$ $\mu_1-\mu_2\geqslant\delta$ $\mu_1-\mu_2=\delta$ ($\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知)	$t=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$	$\mu_1-\mu_2>\delta$ $\mu_1-\mu_2<\delta$ $\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$t\geqslant t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $t\leqslant -t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $\|t\|\geqslant t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$	自由度为n_1+n_2-2的t分布

P185例题（两个正态总体均值差的检验）

例 2 用两种方法（A 和 B）测定冰自 -0.72 ℃转变为 0 ℃的水的融化热（以 cal/g 计）. 测得以下的数据：

方法 A：	79.98	80.04	80.02	80.04	80.03	80.03		
	80.04	79.97	80.05	80.03	80.02	80.00	80.02	
方法 B：	80.02	79.94	79.98	79.97	79.97	80.03	79.95	78.97

设这两个样本相互独立，且分别来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma^2)$，μ_1,μ_2,σ^2 均未知. 试检验假设（取显著性水平 $\alpha=0.05$）

$$H_0:\mu_1-\mu_2\leqslant 0,\ H_1:\mu_1-\mu_2>0.$$

解 分别画出对应于方法 A 和方法 B 的数据的箱线图，如图 8－3. 这两种方法所得的结果是有明显差异的，现在来检验上述假设.

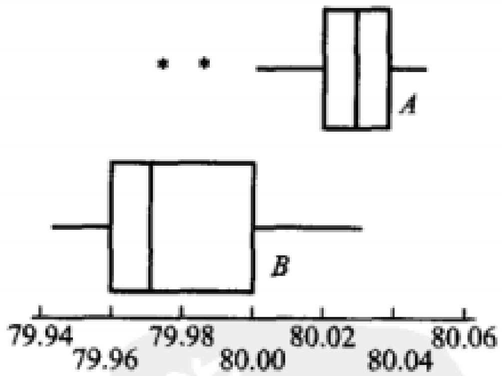


图 8－3

教材上这个数据的计算有点问题，大家以自己计算得到的结果为准。

$$n_1=13,\ \bar{x}_A=80.02,\ s_A^2=0.024^2$$

$$n_2=8,\ \bar{x}_B=79.98,\ s_B^2=0.03^2$$

$$s_w^2=\frac{12\times s_A^2+7\times s_B^2}{19}=0.000\,717\,8.$$

$$t=\frac{\bar{x}_A-\bar{x}_B}{s_w\sqrt{1/13+1/8}}=3.33>t_{0.05}(13+8-2)=1.729\,1.$$

故拒绝 H_0，认为方法 A 比方法 B 测得的融化热要大. □

关于常见统计图的画法，售后群有对应的更新的视频。

逐对比较法

有时为了比较两种产品、两种仪器 、两种方法等的差异，我们常在相同的条件下做对比试验，得到一批成对的观察值，然后分析观察数据作出推断。这种方法常称为**逐对比较法**。

这个方法在数学建模中用的也比较多。

例 3 有两台光谱仪 I_x, I_y，用来测量材料中某种金属的含量，为鉴定它们的测量结果有无显著的差异，制备了 9 件试块(它们的成分、金属含量、均匀性等均各不相同)，现在分别用这两台仪器对每一试块测量一次，得到 9 对观察值如下.

$x(\%)$	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
$y(\%)$	0.10	0.21	0.52	0.32	0.78	0.59	0.68	0.77	0.89
$d=x-y(\%)$	0.10	0.09	−0.12	0.18	−0.18	0.11	0.12	0.13	0.11

问能否认为这两台仪器的测量结果有显著的差异(取 $\alpha=0.01$)?

区别两个正态总体均值差的检验

解 本题中的数据是成对的，即对同一试块测出一对数据. 我们看到一对与另一对之间的差异是由各种因素，如材料成分、金属含量、均匀性等因素引起的. 由于各试块的特性有广泛的差别，就不能将仪器 I_x 对 9 个试块的测量结果(即表中第一行)看成是同分布随机变量的观察值. 因而表中第一行不能看成是一个样本的样本值. 同样，表中第二行也不能看成是一个样本的样本值. 再者，对于每一对数据而言，它们是同一试块用不同仪器 I_x，I_y 测得的结果，因此，它们不是两个独立的随机变量的观察值. 综上所述，我们不能用表 8.1 中第 4 栏的检验法来作检验. 而同一对中两个数据的差异则可看成是仅由这两台仪器性能的差异所引起的，这样，局限于各对中两个数据来比较就能排除种种其他因素，而只考虑单独由仪器的性能所产生的影响. 从而能比较这两台仪器的测量结果是否有显著的差异.

每一台仪器测量的9个试块均是来自不同的总体，它们对应的测量指标服从的分布不同。

解决方法

一般，设有 n 对相互独立的观察结果：$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$，令 $D_1=X_1-Y_1,D_2=X_2-Y_2,\cdots,D_n=X_n-Y_n$，则 $D_1,D_2,\cdots,D_n$ 相互独立．又由于 $D_1,D_2,\cdots,D_n$ 是由同一因素所引起的，可认为它们服从同一分布．今假设 $D_i\sim N(\mu_D,\sigma_D^2),i=1,2,\cdots,n$. 这就是说 $D_1,D_2,\cdots,D_n$ 构成正态总体 $N(\mu_D,\sigma_D^2)$ 的一个样本，其中 μ_D,σ_D^2 未知．我们需要基于这一样本检验假设：

(1) $H_0:\mu_D=0$， $H_1:\mu_D\neq 0$；

(2) $H_0:\mu_D\leqslant 0$， $H_1:\mu_D>0$；

(3) $H_0:\mu_D\geqslant 0$， $H_1:\mu_D<0$.

现在回过来讨论本例的检验问题．先作出同一试块分别由仪器 I_x,I_y 测得的结果之差，列于上表的第三行．按题意需检验假设

$$H_0:\mu_D=0,\quad H_1:\mu_D\neq 0.$$

现在 $n=9,t_{\alpha/2}(8)=t_{0.005}(8)=3.3554$ 即知拒绝域为

$$|t|=\left|\frac{\bar{d}}{s_D/\sqrt{n}}\right|\geqslant 3.3554.$$

由观察值得 $\bar{d}=0.06,s_D=0.1227,|t|=\dfrac{0.06}{0.1227/\sqrt{9}}=1.467<3.3554$. 现 $|t|$ 的值不落在拒绝域内，故接受 H_0，认为两台仪器的测量结果并无显著差异． □

P187例题

例 4 做以下的实验以比较人对红光或绿光的反应时间（以 s 计）. 实验在点亮红光或绿光的同时，启动计时器，要求受试者见到红光或绿光点亮时，就按下按钮，切断计时器，这就能测得反应时间. 测量的结果如下表：

红光(x)	0.30	0.23	0.41	0.53	0.24	0.36	0.38	0.51
绿光(y)	0.43	0.32	0.58	0.46	0.27	0.41	0.38	0.61
$d=x-y$	−0.13	−0.09	−0.17	0.07	−0.03	−0.05	0.00	−0.10

设 $D_i=X_i-Y_i$ $(i=1,2,\cdots,8)$ 是来自正态总体 $N(\mu_D,\sigma_D^2)$ 的样本，μ_D,σ_D^2 均未知. 试检验假设（取显著性水平 $\alpha=0.05$）

$$H_0:\mu_D\geqslant 0,\quad H_1:\mu_D<0.$$

解 现在 $n=8,\overline{x}_d=-0.0625,s_d=0.0765$，而

$$\frac{\overline{x}_d}{s_d/\sqrt{8}}=-2.311<-t_{0.05}(7)=-1.8946,$$

故拒绝 H_0，认为 $\mu_D<0$，即认为人对红光的反应时间小于对绿光的反应时间，也就是人对红光的反应要比绿光快. □

分布拟合检验P199

上面介绍的各种检验法都是在总体分布形式为正态分布的前提下进行讨论的。但在实际问题中，有时不能知道总体服从什么类型的分布，这时就需要根据样本 来检验关于分布的假设。课本上介绍的卡方拟合检验法，它可以用来检验总体是否具有某一个指定的分布或属于某一个分布族。

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i}\left(\frac{f_i}{n} - p_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i^2}{np_i} - n \tag{6.3}$$

作为检验统计量.

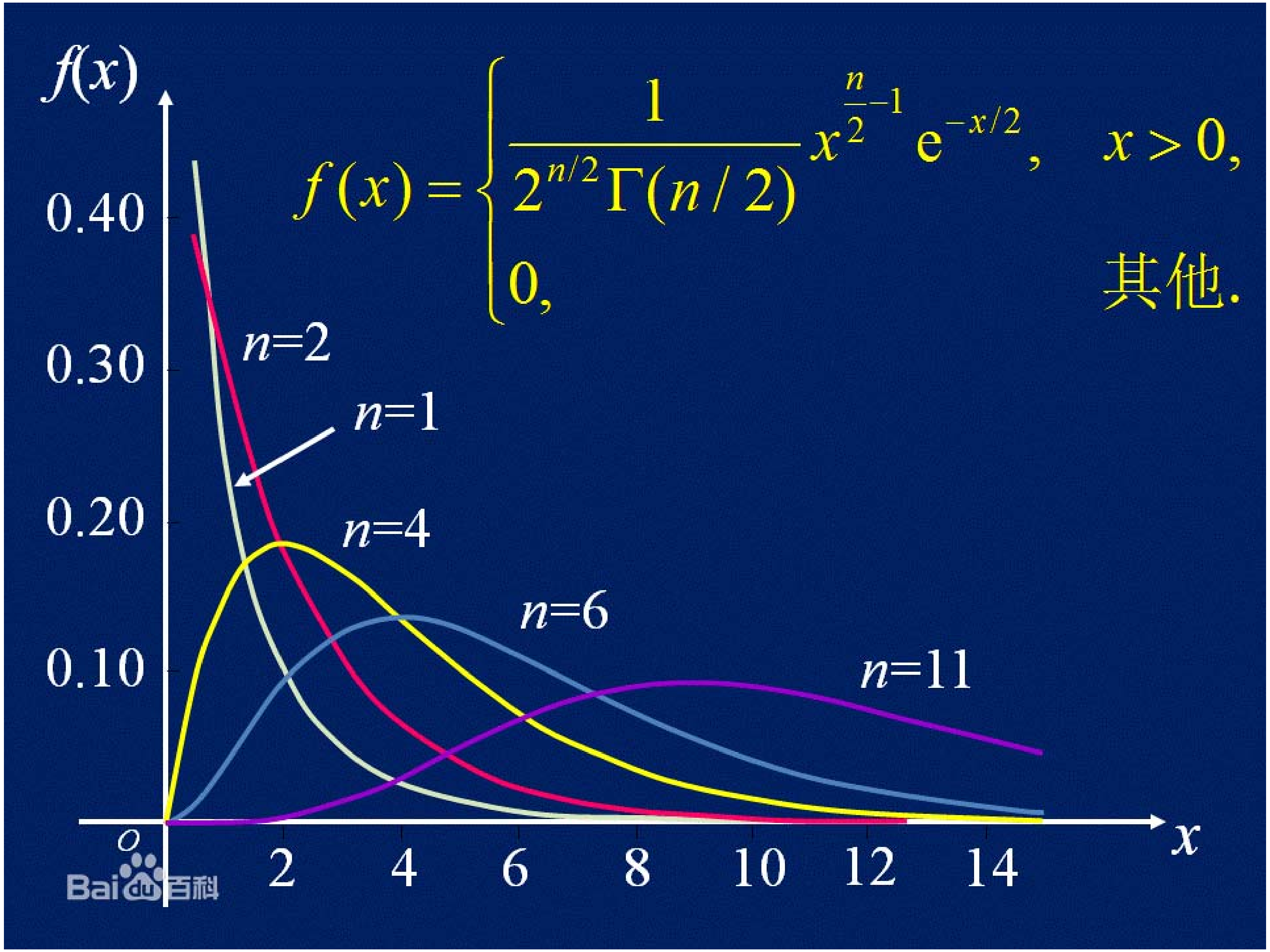
定理 若 n 充分大($n \geqslant 50$)，则当 H_0 为真时统计量(6.3)近似服从 $\chi^2(k-1)$分布.(证略)

据以上的讨论，当 H_0 为真时，(6.3)式中的 χ^2 不应太大，如 χ^2 过分大就拒绝 H_0，拒绝域的形式为

$$\chi^2 \geqslant G \quad (G \text{ 为正常数}).$$

注意：这里服从的分布是卡方分布，卡方分布的概率密度函数图像和自由度有很大的关系。

卡方分布的概率密度函数



教材上的两个例子

例 1 下表列出了某一地区在夏季的一个月中由 100 个气象站报告的雷暴雨的次数.

i	0	1	2	3	4	5	$\geqslant 6$
f_i	22	37	20	13	6	2	0
A_i	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6

其中 f_i 是报告雷暴雨次数为 i 的气象站数. 试用 χ^2 拟合检验法检验雷暴雨的次数 X 是否服从均值 $\lambda=1$ 的泊松分布(取显著性水平 $\alpha=0.05$).

例 2 在研究牛的毛色与牛角的有无，这样两对性状分离现象时，用黑色无角牛与红色有角牛杂交，子二代出现黑色无角牛 192 头，黑色有角牛 78 头，红色无角牛 72 头，红色有角牛 18 头，共 360 头，问这两对性状是否符合孟德尔遗传规律中 9:3:3:1的遗传比例?

如果对这方面有兴趣，大家自己见教材，教材说的还是很详细的。

怎么计算?

这一讲介绍的假设检验的方法都很简单，事实上给你一个科学计算机你就能算出检验值，再给你一张统计分布临界表你就能查出临界值，比较检验值和临界值，你就可以得到假设检验的结果。书上的例题解答也写得很详细，你可以看看，解答步骤基本上就是套路。

当然，如果你想计算p值的话，就需要用到Matlab，具体可参考前面的例题、第五讲的第二部分和第五讲斯皮尔曼相关系数的假设检验的作业程序。

（对于没学过概率论与数理统计这门课的同学来说，可能有些难度，但这也没办法，里面涉及到的知识太多了，包括概率密度、分布函数、统计量、常见的分布等，这里给大家推荐去bilibili观看下考研名师对于概率论这门科目的讲解，可以先看基础班，再看强化班）