的数值解,取 $h=0.1$,梯形公式只迭代一次,并与精确值比较.方程的解析解为 $y=\sqrt{1+2x}$.

解　欧拉公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + 0.1 \times \left(y_n - \dfrac{2x_n}{y_n}\right) = 1.1y_n - \dfrac{0.2x_n}{y_n} \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

梯形公式只校正一次的格式为

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = 1.1y_n - \dfrac{0.2x_n}{y_n} \\ y_{n+1} = y_n + 0.05 \times \left(y_n - \dfrac{2x_n}{y_n} + y_{n+1}^{(0)} - \dfrac{2x_{n+1}}{y_{n+1}^{(0)}}\right) \\ y_0 = 1, \quad x_0 = 0 \end{cases}$$

结果列入下表:

x_n	欧拉方法	梯形法	精确值
0.1	1.100 000	1.095 909	1.095 445
0.2	1.191 818	1.184 097	1.183 216
0.3	1.277 438	1.266 201	1.246 911
0.4	1.358 213	1.343 360	1.341 641
0.5	1.435 133	1.416 402	1.414 214
0.6	1.508 966	1.485 956	1.483 240
0.7	1.580 338	1.552 515	1.549 193
0.8	1.649 783	1.616 475	1.612 452
0.9	1.717 779	1.678 167	1.673 320
1.0	1.784 771	1.737 868	1.732 051

6.2.3　龙格-库塔方法

1. 龙格-库塔方法的基本思想

考察差商 $\dfrac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h}$,根据微分中值定理,存在点 ξ,$x_n<\xi<x_{n+1}$,使得

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} = y'(\xi)$$

从而利用所给方程 $y'=f$ 得

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(\xi,y(\xi)) \tag{5}$$

其中的 $K^*=f(\xi,y(\xi))$,称作区间 $[x_n,x_{n+1}]$ 上的平均斜率.这样,只要对平均斜率提供一种算法,由(5)式便相应地导出一种计算格式.

考察欧拉方法的公式

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n),\quad n=0,1,2,\cdots$$

它简单地取点 x_n 的斜率值 $K_1=f(x_n,y_n)$ 作为平均斜率 K^*,精度自然很低.

再考察(4),它亦可改写成

$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{2}(K_1+K_2)\\K_1=f(x_n,y_n)\\K_2=f(x_{n+1},y_n+hK_1)\end{cases}$$

可以理解为:它用 x_n 与 x_{n+1} 两个点的斜率值 K_1 和 K_2 取算术平均作为平均斜率 K^*,而 x_{n+1} 处的斜率值 K_2 则利用欧拉方法来预报.

这个处理过程启示我们,如果设法在 $[x_n,x_{n+1}]$ 内多预报几个点的斜率值,然后将它们取加权平均作为平均斜率,则有可能构造出具有高精度的计算格式,这就是龙格-库塔方法的基本思想.

2. 二阶龙格-库塔方法

考察区间 $[x_n,x_{n+1}]$ 内一点

$$x_{n+p}=x_n+ph,\quad 0<p\leqslant 1$$

用 x_n 和 x_{n+p} 两个点的斜率值 K_1 和 K_2 加权平均得到平均斜率 K^*,即令

$$y_{n+1}=y_n+h[(1-\lambda)K_1+\lambda K_2]$$

式中的 λ 为待定系数.仍取 $K_1=f(x_n,y_n)$,问题在于该如何预报 x_{n+p} 处的斜率值 K_2?先用欧拉方法提供 $y(x_{n+p})$ 的预报值 y_{n+p}:

$$y_{n+p}=y_n+phK_1$$

然后用 y_{n+p} 通过计算 f 产生斜率值 $K_2=f(x_{n+p},y_{n+p})$.

这样设计出的计算格式具有形式:

$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+h[(1-\lambda)K_1+\lambda K_2]\\K_1=f(x_n,y_n)\\K_2=f(x_n+ph,y_n+phK_1)\end{cases}\tag{6}$$

其中含两个待定参数 λ,p,我们适当选取这些参数的值,使得格式(6)具有较高的精度.

假定 $y_n=y(x_n)$,分别将 K_1 和 K_2 作泰勒展开,有

$$\begin{aligned}K_1&=f(x_n,y_n)=y(x_n)\\K_2&=f(x_{n+p},y_n+phK_1)\\&=f(x_n,y_n)+ph[f_x(x_n,y_n)+f(x_n,y_n)f_y(x_n,y_n)]+O(h^2)\\&=y'(x_n)+phy''(x_n)+O(h^2)\end{aligned}$$

代入(6)式知

$$y_{n+1}=y(x_n)+hy'(x_n)+\lambda ph^2y''(x_n)+O(h^3)$$

和二阶泰勒展开式

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+O(h^3)$$

比较系数即可发现,欲使格式(6)的截断误差为 $O(h^3)$,只要 $\lambda p=\dfrac{1}{2}$.

满足这一条件的一簇格式统称**二阶龙格-库塔格式**. 特别地, 当 $p=1,\lambda=\frac{1}{2}$ 时, 龙格-库塔格式(6)就是梯形公式的预报-校正格式.

3. 四阶龙格-库塔方法

用类似的方法可以确定三阶和四阶龙格-库塔方法的参数, 构造出三阶和四阶的龙格-库塔方法. 常用的是四阶龙格-库塔方法, 四阶龙格-库塔方法也不止一个, 下面给出的是最常用的四阶经典的龙格-库塔公式:

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4) \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_2=f\left(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_1\right) \\ K_3=f\left(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_2\right) \\ K_4=f(x_n+h,y_n+hK_3) \end{cases} \tag{7}$$

例 2 用经典的四阶龙格-库塔方法计算:

$$\begin{cases} y'=y-\frac{2x}{y} \quad (0\leqslant x\leqslant 1) \\ y_0=1 \end{cases}$$

取步长为 0.2, 且与准确值比较.

解 由(7)得

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{0.2}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4) \\ K_1=y_n-\frac{2x_n}{y_n} \\ K_2=y_n+0.1K_1-2\frac{x_n+0.1}{y_n+0.1K_1} \\ K_3=y_n+0.1K_2-2\frac{x_n+0.1}{y_n+0.1K_2} \\ K_4=y_n+0.2K_3-2\frac{x_n+0.2}{y_n+0.2K_3} \end{cases}$$

计算结果列入下表:

x_n	y_n	$y(x_n)$
0	1	1
0.2	1.183 229	1.183 216
0.4	1.341 667	1.341 641
0.6	1.483 281	1.483 240
0.8	1.612 514	1.612 452
1.0	1.732 142	1.732 051

可见,即使用 $h=0.2$ 计算,也比一阶和二阶龙格-库塔方法精度高得多.

6.2.4 一阶常微分方程组和高阶方程

1. 一阶方程组

前面研究了单个方程 $y'=f$ 的差分方法,只要把 y 和 f 理解为向量,则所提供的各种算法即可推广应用到一阶方程组的情形.

对于方程组

$$\begin{cases} y'=f(x,y,z), & y(x_0)=y_0 \\ z'=g(x,y,z), & z(x_0)=z_0 \end{cases}$$

令 $x_n=x_0+nh, n=1,2,\cdots$,以 y_n,z_n 表示结点 x_n 上的近似解,则其梯形公式的预报-校正格式具有形式:

$$\text{预报}\quad \begin{aligned} \bar{y}_{n+1} &= y_n + hf(x_n,y_n,z_n) \\ \bar{z}_{n+1} &= z_n + hg(x_n,y_n,z_n) \end{aligned}$$

$$\text{校正}\quad \begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}[f(x_n,y_n,z_n)+f(x_{n+1},\bar{y}_{n+1},\bar{z}_{n+1})] \\ z_{n+1} &= z_n + \frac{h}{2}[g(x_n,y_n,z_n)+g(x_{n+1},\bar{y}_{n+1},\bar{z}_{n+1})] \end{aligned}$$

相应的四阶龙格-库塔格式为

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4) \\ z_{n+1}=z_n+\dfrac{h}{6}(L_1+2L_2+2L_3+L_4) \\ K_1=f(x_n,y_n,z_n) \\ L_1=g(x_n,y_n,z_n) \\ K_2=f\left(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{h}{2}K_1,z_n+\dfrac{h}{2}L_1\right) \\ L_2=g\left(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{h}{2}K_1,z_n+\dfrac{h}{2}L_1\right) \\ K_3=f\left(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{h}{2}K_2,z_n+\dfrac{h}{2}L_2\right) \\ L_3=g\left(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{h}{2}K_2,z_n+\dfrac{h}{2}L_2\right) \\ K_4=f(x_{n+1},y_n+hK_3,z_n+hL_3) \\ L_4=g(x_{n+1},y_n+hK_3,z_n+hL_3) \end{cases}$$

2. 高阶常微分方程

高阶微分方程的初值问题,原则上总可以归结为一阶方程组来求解. 以二阶常微分方程为例:

$$\begin{cases} y''(x)=f(x,y,y'), & x_0 \leqslant x \leqslant x_n \\ y(x_0)=y_0, y'(x_0)=z_0 \end{cases}$$

则可令 $z=y'$，化为一阶方程组求解：

$$\begin{cases} y'(x)=z, & y(x_0)=y_0, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_n \\ z'(x)=f(x,y,z), & z(x_0)=z_0 \end{cases}$$

6.3　用 MATLAB 解微分方程

6.3.1　微分方程(组)的解析解

求微分方程(组)的解析解用函数 dsolve.

求解微分方程时，需要将微分方程包含在 dsolve 的表达式中. 在表达微分方程时，用字母 D 表示求微分，D2，D3 等表示求高阶微分. 任何 D 后所跟的字母为因变量，自变量可以指定或由 symvar 规则选定为缺省. 例如，微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ 应表达为：D2y=0.

下面举几个例子.

例 1　求 $\frac{du}{dt}=1+u^2$ 的通解.

解　命令为：dsolve('Du=1+u^2','t')

结果为：ans =

```
tan(t-C1)
```

例 2　求下列微分方程的特解.

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+29y=0 \\ y(0)=0, y'(0)=15 \end{cases}$$

解　命令为：y=dsolve('D2y+4*Dy+29*y=0','y(0)=0,Dy(0)=15','x')

结果为：y =

```
3*exp(-2*x)*sin(5*x)
```

例 3　求下列微分方程组的通解.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=2x-3y+3z \\ \frac{dy}{dt}=4x-5y+3z \\ \frac{dz}{dt}=4x-4y+2z \end{cases}$$

解　命令为：

```
[x,y,z]=dsolve('Dx=2*x-3*y+3*z','Dy=4*x-5*y+3*z','Dz=4*x
```