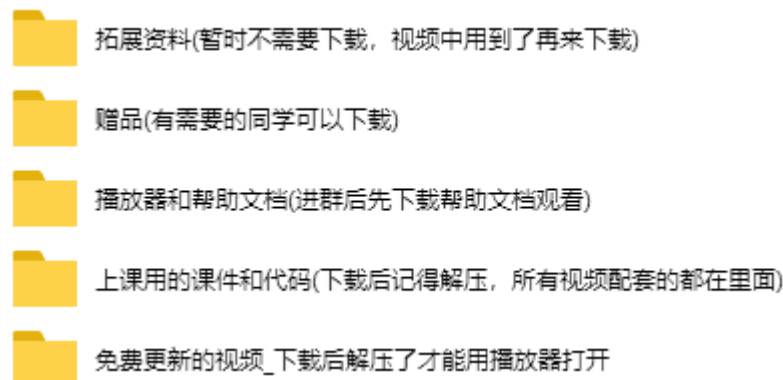


基于熵权法对Topsis模型的修正

温馨提示

- (1) 视频中提到的附件可在**售后群的群文件**中下载。
包括**讲义、代码、我视频中推荐的资料**等。



(2) 关注我的**微信公众号《数学建模学习交流》**，后台发送**“软件”**两个字，可获得常见的建模软件下载方法；发送**“数据”**两个字，可获得建模数据的获取方法；发送**“画图”**两个字，可获得数学建模中常见的画图方法。另外，也可以看看公众号的历史文章，里面发布的都是对大家有帮助的技巧。

(3) **购买更多优质精选的数学建模资料**，可关注我的微信公众号《数学建模学习交流》，在后台发送**“买”**这个字即可进入店铺进行购买。

(4) 视频价格不贵，但价值很高。单人购买观看只需要**58元**，和另外两名队友一起购买人均仅需**46元**，视频本身也是下载到本地观看的，所以请大家**不要侵犯知识产权**，对视频或者资料进行二次销售。

基于熵权法对Topsis模型的修正

有 n 个要评价的对象, m 个评价指标的标准化矩阵:

$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1m} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nm} \end{bmatrix}$$

可以使用[层次分析法](#)给这 m 个评价指标确定权重:

$$\sum_{j=1}^m \omega_j = 1$$

层次分析法最大的缺点

判断矩阵的确定依赖于专家, 如果专家的判断存在主观性的话, 会对结果产生很大的影响。

(主观性太强)

熵权法是一种客观赋权方法

依据的原理: 指标的变异程度越小, 所反映的信息量也越少, 其对应的权值也应该越低。(客观 = 数据本身就可以告诉我们权重)

(一种极端的例子: 对于所有的样本而言, 这个指标都是相同的数值, 那么我们认为这个指标的权值为0, 即这个指标对于我们的评价起不到任何帮助)

如何度量信息量的大小

小张和小王是两个高中生。小张学习很差, 而小王是全校前几名的尖子生。

高考结束后, 小张和小王都考上了清华。小王考上了清华, 大家都会觉得很正常, 里面没什么信息量, 因为学习好上清华, 天经地义, 本来就应该如此的事情。

然鹅, 如果是小张考上了清华, 这就不一样了, 这里面包含的信息量就非常大。怎么说? 因为小张学习那么差, 怎么会考上清华呢? 把不可能的事情变成可能, 这里面就有很多信息量。

注: 本例子来自微信公众号: “小宇治水”



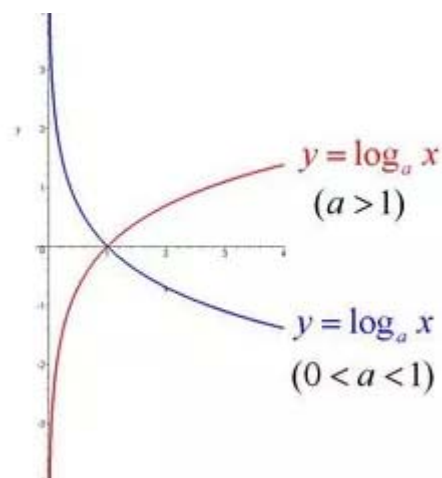
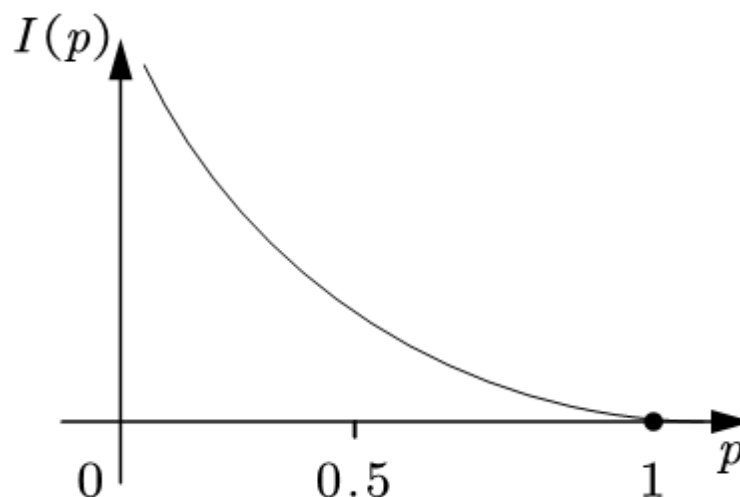
上面的小例子告诉我们:

**越有可能发生的事情, 信息量越少,
越不可能发生的事情, 信息量就越多。**

**怎么衡量事情发生的可能性大小?
概率**

如何度量信息量的大小

如果把信息量用字母 I 表示, 概率用 p 表示, 那么我们可以将它们建立一个函数关系:



假设 x 表示事件 X 可能发生的某种情况,
 $p(x)$ 表示这种情况发生的概率

我们可以定义: $I(x) = -\ln(p(x))$

因为 $0 \leq p(x) \leq 1$, 所以 $I(x) \geq 0$

信息熵的定义

假设 x 表示事件 X 可能发生的某种情况, $p(x)$ 表示这种情况发生的概率

我们可以定义: $I(x) = -\ln(p(x))$, 因为 $0 \leq p(x) \leq 1$, 所以 $I(x) \geq 0$

如果事件 X 可能发生的情况分别为: x_1, x_2, \dots, x_n

那么我们可以定义事件 X 的信息熵为:

$$H(X) = \sum_{i=1}^n [p(x_i) I(x_i)] = - \sum_{i=1}^n [p(x_i) \ln(p(x_i))]$$

从上面的公式可以看出, 信息熵的本质就是对信息量的期望值。

可以证明的是:

当 $p(x_1) = p(x_2) = \dots = p(x_n) = \frac{1}{n}$ 时, $H(x)$ 取最大值, 此时 $H(x) = \ln n$

熵越大信息量越大还是越小?

知乎: 信息熵越大, 信息量到底是越大还是越小?

<https://www.zhihu.com/question/274997106>

有些说: 熵越大, 不确定性越大, 包含的信息越多。

百科和一些资料中说: 指标的信息熵越小, 提供的信息越大。

还各举出了一些例子, 感觉都很有道理。

甚至同一资料描述都相反, 例如浅谈信息熵(熵权法的应用) - 不矜不伐的小学生 - 博客园: 第四段说"高信息度的信息熵是很低的, 低信息度的熵则高。"。而第六段的举例说"如果中国100%夺冠, 那么熵是0, 相当于没有任何信息。"

到底哪个正确? 是我哪里理解错了吗

关注问题

写回答

邀请回答

添加评论

分享

收起

9 个回答

默认排序

傅铁强
战!

3 人赞同了该回答

随机变量的信息熵越大, 则它的值(内容)能给你补充的信息量越大, 而知道这个值前你已有的信息量越小。

编辑于 2018-04-27

赞同 3

1 条评论

分享

收藏

感谢

对于熵权法而言,
因为我们关注的是
已有的信息, 所以
答案是越小。
(后面大家看到计
算步骤就会明白)

熵权法的计算步骤

- (1) 判断输入的矩阵中是否存在负数, 如果有则要重新标准化到非负区间
(后面计算概率时需要保证每一个元素为非负数)

假设有 n 个要评价的对象, m 个评价指标 (已经正向化了) 构成的正向化矩阵如下:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}$$

那么, 对其标准化的矩阵记为 Z , Z 中的每一个元素: $z_{ij} = x_{ij} / \sqrt{\sum_{i=1}^n x_{ij}^2}$

判断 Z 矩阵中是否存在负数, 如果存在的话, 需要对 X 使用另一种标准化方法

对矩阵 X 进行一次标准化得到 \tilde{Z} 矩阵, 其标准化的公式为:

$$\tilde{z}_{ij} = \frac{x_{ij} - \min\{x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{nj}\}}{\max\{x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{nj}\} - \min\{x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{nj}\}}$$

熵权法的计算步骤

(2) 计算第 j 项指标下第 i 个样本所占的比重, 并将其看作相对熵计算中用到的概率

假设有 n 个要评价的对象, m 个评价指标, 且经过了上一步处理得到的非负矩阵为:

$$\tilde{Z} = \begin{bmatrix} \tilde{z}_{11} & \tilde{z}_{12} & \cdots & \tilde{z}_{1m} \\ \tilde{z}_{21} & \tilde{z}_{22} & \cdots & \tilde{z}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{z}_{n1} & \tilde{z}_{n2} & \cdots & \tilde{z}_{nm} \end{bmatrix}$$

我们计算概率矩阵 P , 其中 P 中每一个元素 p_{ij} 的计算公式如下:

$$p_{ij} = \frac{\tilde{z}_{ij}}{\sum_{i=1}^n \tilde{z}_{ij}}$$

容易验证: $\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1$, 即保证了每一个指标所对应的概率和为1.

熵权的计算步骤

(3) 计算每个指标的信息熵, 并计算信息效用值, 并归一化得到每个指标的熵权

对于第 j 个指标而言, 其信息熵的计算公式为:
$$e_j = -\frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^n p_{ij} \ln(p_{ij}) \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

(1) 为什么这里要除以 $\ln n$ 这个常数?

在前面说过, 当 $p(x_1) = p(x_2) = \dots = p(x_n) = \frac{1}{n}$ 时, $H(x)$ 取最大值, 此时 $H(x) = \ln n$

这里除以 $\ln n$ 能够使得信息熵的始终位于 $[0, 1]$ 区间上面。

(2) e_j 越大, 即第 j 个指标的信息熵越大, 表明第 j 个指标的信息越多还是越少?

答案是越少, 当 $p_{1j} = p_{2j} = \dots = p_{nj}$ 时, $e_j = 1$, 此时上面定义的信息熵达到最大,

但是, 因为 $p_{ij} = \tilde{z}_{ij} / \sum_{i=1}^n \tilde{z}_{ij}$, 所以 $\tilde{z}_{1j} = \tilde{z}_{2j} = \dots = \tilde{z}_{nj}$, 即所有样本的这个指标值都相同。

信息效用值的定义: $d_j = 1 - e_j$, 那么信息效用值越大, 其对应的信息就越多。

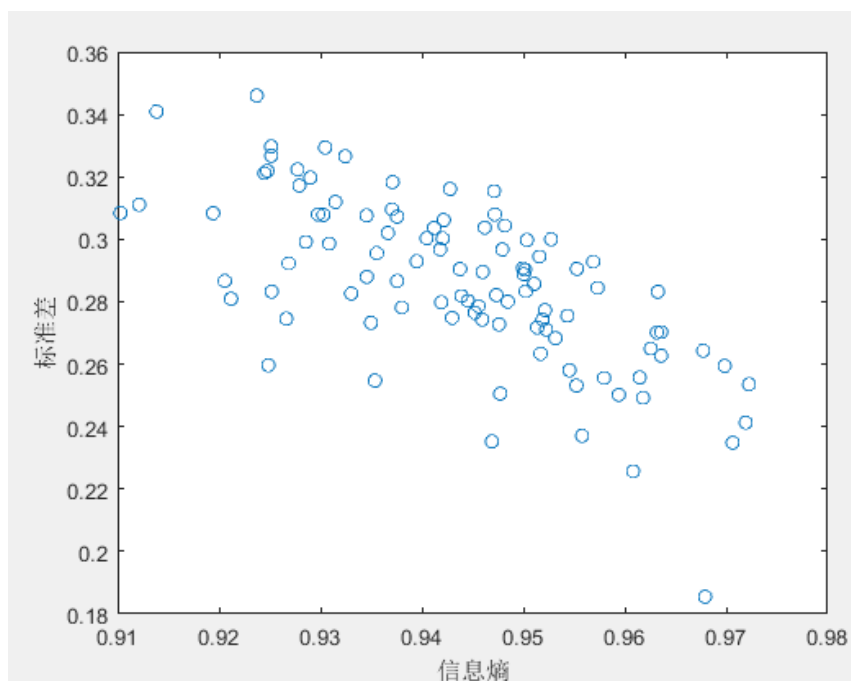
将信息效用值进行归一化, 我们就能够得到每个指标的**熵权**:
$$W_j = d_j / \sum_{j=1}^m d_j \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

熵权法背后的原理

熵权法是一种客观赋权方法

依据的原理: 指标的变异程度越小, 所反映的信息量也越少, 其对应的权值也应该越低。(客观 = 数据本身就可以告诉我们权重)

我们可以用指标的标准差来衡量样本的变异程度, 指标的标准差越大, 其信息熵越小。



左图是蒙特卡洛的结果
随机生成一组有30个样本且位于区间[0,1]上的数据, 计算其信息熵和标准差; 将上述步骤重复100次, 我们能够得到100组信息熵和标准差的取值, 将其绘制成散点图。
可以发现, 两个指标之间有很明显的负相关关系。

code_Monte_Carlo.m

熵权法的讨论



熵权法的讨论



星巴克西南交通车辆工程

方差大, 对总体影响不就大了吗, 权就该大一些吧

群主清风



熵权法就是不用我们定权重 样本数据自己的分布决定了权重

群主清风



这不扯淡吗

22:12

群主清风



举个很简单的例子

群主清风



X Y两个指标 用来评定班上谁是三好学生



希殇

我是之前看到一篇论文里这样子写😓

群主清风



X表示大家违纪上档案的次数 Y表示大家逃课的次数

22:14

群主清风



你们觉得哪个对与评定的影响程度大



星巴克西南交通车辆工程

x吧

群主清风



但是几乎所有人X都是0



数学建模学习交流

熵权法的讨论













熵权法的另一个问题:

因为概率 p 是位于0-1之间, 因此需要对原始数据进行标准化, 我们应该选择哪种方式进行标准化呢? 查看知网的文献会发现, 并没有约定俗成的标准, 每个人的选取可能都不一样。但是不同方式标准化得到的结果可能有很大差异, 所以说熵权法也是存在着一定的问题的。

以上是我之前的看法
现在我给大家一个答复吧
如果大家的论文要发表, 别用熵权法
如果大家只是用这个方法进行比赛
那么可以随使用
因为这个方法总比你自己随意定义好

熵权法的代码实现

 20条河流的水质情况数据.xlsx	2019/07/11 20:25	Microsoft Excel ...	13 KB
 code_Monte_Carlo.m	2019/08/18 18:50	M 文件	1 KB
 data_water_quality.mat	2019/06/30 13:08	MATLAB Data	1 KB
 Entropy_Method.m	2019/08/18 19:53	M 文件	1 KB
 Inter2Max.m	2019/08/07 14:20	M 文件	1 KB
 Mid2Max.m	2019/08/07 14:20	M 文件	1 KB
 Min2Max.m	2019/08/07 14:20	M 文件	1 KB
 mylog.m	2019/08/18 19:00	M 文件	1 KB
 Positivization.m	2019/08/07 14:20	M 文件	2 KB
 topsis.m	2019/08/18 19:55	M 文件	6 KB

```
function [W] = Entropy_Method(Z)
```

```
% 计算有n个样本, m个指标的样本所对应的的熵权
```

```
% 输入
```

```
% Z: n*m的矩阵 (要经过正向化和标准化处理, 且元素中不存在负数)
```

```
% 输出
```

```
% W: 熵权, 1*m的行向量
```

运行结果

共有20个评价对象, 4个评价指标

这4个指标是否需要经过正向化处理, 需要请输入1, 不需要输入0: 1

请输入需要正向化处理的指标所在的列, 例如第2、3、6三列需要处理, 那么你需要输入[2,3,6]: [2,3,4]

请输入需要处理的这些列的指标类型 (1: 极小型, 2: 中间型, 3: 区间型)

例如: 第2列是极小型, 第3列是区间型, 第6列是中间型, 就输入[1,3,2]: [2,1,3]

第2列是中间型

请输入最佳的那一个值: 7

第2列中间型正向化处理完成

~~~~~分界线~~~~~

第3列是极小型, 正在正向化

第3列极小型正向化处理完成

~~~~~分界线~~~~~

第4列是区间型

请输入区间的下界: 10

请输入区间的上界: 20


第4列区间型正向化处理完成

正向化后的矩阵 X =

| | | | |
|--------|--------|---------|--------|
| 4.6900 | 0.7172 | 3.0000 | 1.0000 |
| 2.0300 | 0.4069 | 35.0000 | 0.6940 |
| 9.1100 | 0.5241 | 8.0000 | 0.9058 |
| 8.6100 | 0.9655 | 8.0000 | 0.4443 |

标准化矩阵 Z =

| | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| 0.1622 | 0.2483 | 0.0245 | 0.3065 |
| 0.0702 | 0.1408 | 0.2863 | 0.2127 |
| 0.3150 | 0.1814 | 0.0655 | 0.2776 |
| 0.2977 | 0.3342 | 0.0655 | 0.1361 |

 数学建模学习交流

运行结果

请输入是否需要增加权重向量, 需要输入1, 不需要输入0

请输入是否需要增加权重: 1

使用熵权法确定权重请输入1, 否则输入0: 1

熵权法确定的权重为:

0.1411 0.2267 0.4409 0.1913

最后的得分为:

stand_S =

0.0390
0.0552
0.0411
0.0428
0.0362
0.0441
0.0489
0.0525

sorted_S =

0.0755
0.0750
0.0716
0.0653
0.0643
0.0578
0.0552
0.0543

index =

11
9
10
12
20
15
2
13