第16卷 第4期
2008年12月

北京石油化工学院学报
Journal of Beijing Institute of Petro-chemical Technology

Vol.16 No.4
Dec. 2008

基于多级惩罚函数的粒子群约束优化算法

张国英 吴艺娟
(北京石油化工学院计算机系, 北京 102617)

摘 要 基于多级惩罚函数和粒子群算法解决多约束优化问题,采用粒子种群中的多个粒子并行寻优,避免多约束优化问题收敛于局部优化解。定义了多级分配函数作为约束因子表达惩罚函数与约束条件间函数关系,约束因子按照约束条件的不同分为多个等级。提出了粒子群多级惩罚函数算法,应用于三个经典约束优化问题,均在较少迭代次数内得到高精度优化解。

关 键 词 粒子群算法; 多约束优化; 多级惩罚函数; 惩罚因子
中图法分类号 TP391 9

约束优化(Constraint Optimization,简称CO)广泛应用于结构优化、工程设计、VLSI设计、经济和分配问题等领域。约束优化问题的核心是约束条件的控制,处理CO问题有确定性方法和随机性方法两种,确定性方法要求目标函数具有连续性和可微性,主要使用梯度下降法,有基于惩罚函数的方法(如拉格朗日法),有区分可行区域和不可行区域的方法(如内点法和外点法)。进化算法是最早处理无约束优化问题的随机性约束优化方法,处理CO问题正显示越来越强的效果。粒子群算法基于种群寻优,具有优化速度快、优化求解精度高的特点,更适应于高维空间的约束优化问题。

随机性方法解决约束优化问题最直接的方法是基于解的可行性,即普通使用的方法是建立惩罚函数,对违反约束的情况进行惩罚,将有约束的优化问题转化为无约束的优化问题。粒子群算法解决约束优化问题时,也是基于惩罚函数进行。传统的惩罚函数方法约束因子和惩罚函数的基数一般固定,约束因子和级数是约束条件依赖的。采用多级惩罚分配函数方法结合粒子群算法进行约束优化,形成基于惩罚函数的规则集,惩罚函数的因子和级数随约束函数值的取值范围变化。

1 粒子群算法

粒子群优化算法(PSO)是大范畴群体智能方法的一个成员,Eberhart 和 Kennedy 1995年首次提出用于解决全局优化问题[1-2]。算法随机初始一群粒子,为每个粒子设置速度和位置两个参数。粒子在搜索过程中以自身的最佳位置为局部最优指导,以种群历史的最优位置为全局最优指导进行运动。每个粒子代表解空间的一个候选解,解的优劣度由适应度函数决定。

速度向量 $\boldsymbol{v}_i=[v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{iD}]$ 为粒子 i 移动一次的位移量[3],位置向量 $\boldsymbol{x}_i=[x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{iD}]$ 表示粒子 i 在 D 维空间的位置,适应度函数由优化目标定义。

粒子通过动态跟踪两个指导更新其速度和位置:一个是粒子 i 从自身搜索过程的局部最优解,$\boldsymbol{p}_{i,\mathrm{best}}=[p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{iD}]$;另一个是种群历史的全局最优解,$\boldsymbol{p}_g=[p_{g1}, p_{g2}, \cdots, p_{gD}]$。粒子根据方程7更新速度、位置[4]:

$$v_{id}^{n+1}=\chi(v_{id}^n+c_1r_1^n(p_{id}^n-x_{id}^n))+c_2r_2^n(p_{gd}^n-x_{id}^n) \tag{1}$$

$$x_{id}^{n+1}=x_{id}^n+v_{id}^{n+1} \tag{2}$$

其中 n 是循环次数,r_1^n 和 r_2^n 是区间[0,1]内的随机数,C_1, C_2 是学习因子,χ 为约束因子。粒子在解空间内不断跟踪局部优化值和全局优化值进行搜索,直到达到迭代次数或满足误差域值。

2 惩罚函数方法

一般的非线性约束优化问题表示为

$$f(\vec{x}), \vec{x}=[x_1, \cdots, x_n]\in \boldsymbol{R}^n \tag{3}$$

满足下面线性或非线性约束

收稿日期: 2008-07-03

$$g_i(\boldsymbol{x}) \leqslant 0, i = 1, \cdots, p \text{ 且}$$

$$h_j(\boldsymbol{x}) = 0, j = p + 1, \cdots, m \quad (4)$$

约束优化问题由 3 个基本部分组成:变量集合、优化的目标函数(最小化或最大化)、将变量约束在可行域内的约束条件。目的是找到满足约束条件且使适应度最优的变量值。

约束优化问题的搜索空间由可行点和不可行点构成,可行点满足所有约束条件,不可行点至少违反一项约束。惩罚函数技术通过惩罚约束条件解决约束优化问题,惩罚函数的惩罚值过高,优化算法易收敛于局部最小解;惩罚值过低,很难发现可行的优化解。

惩罚函数分为固定惩罚值和惩罚值动态修正。惩罚函数是依赖于约束条件的,惩罚值随约束值的变化而动态修正得到的优化结果优于固定惩罚值的方法[5]。

惩罚函数一般定义为

$$F(x) = f(x) + h(k)H(x), x \in S \subset \boldsymbol{R}^n \quad (5)$$

$f(x)$是约束优化问题的初始目标函数,$h(k)$是惩罚函数的因子,k 是粒子群算法的迭代次数,即随机性约束优化方法的惩罚函数值随迭代次数增加而加大。$H(x)$是多级分配惩罚函数,定义为

$$H(x) = \sum_{i=1}^{m} \theta(q_i(x)) q_i(x)^{\gamma(q_i(x))} \quad (6)$$

$$q_i(x) = \max\{0, g_i(x)\}, i = 1, \cdots, m \quad (7)$$

式中,m 是约束条件的个数;函数 $q_i(x)$是相应的违反约束函数;$g_i(x)$是约束函数;$\theta(q_i(x))$是多级分配函数;$\gamma(q_i(x))$是惩罚函数的级数。函数 $q_i(x)$、$\theta(q_i(x))$和 $\gamma(q_i(x))$是依赖于约束优化问题的,取值由下列规则确定:

(1)如果 $q_i(x) < 1$, 则级数 $\gamma(q_i(x)) = 1$;(2)如果 $q_i(x) \geqslant 1$, 则级数 $\gamma(q_i(x)) = 2$;(3)如果 $q_i(x) < 0.001$, 则 $\theta(q_i(x)) = 10$;(4)如果 $0.001 < q_i(x) < 0.1$, 则 $\theta(q_i(x)) = 20$;(5)如果 $0.1 < q_i(x) < 1$, 则 $\theta(q_i(x)) = 100$;(6)如果 $q_i(x) \geqslant 1$, $\theta(q_i(x)) = 300$。

3 基于粒子群的约束优化算法

扩展 PSO 方法处理约束优化的报道很多,采用各种约束处理技术帮助优化过程。测试了几个基准函数,算法优于其它的进化算法,如进化策略和遗传算法。加入动态多级分配惩罚函数将约束优化问题转化为无约束优化问题。

将 PSO 方法进行修正以处理约束优化问题,将约束以惩罚函数的形式加入目标函数成为单目标优化问题,采用多级分配惩罚函数。

多级分配惩罚函数的 PSO 算法如下:

Step1:随机初始化粒子种群,即初始化种群中所有粒子的速度和位置(可行解);

Step2:根据适应度函数对粒子种群进行评价,适应度函数即方程 5;

Step3:更新粒子的局部优化指导;

Step4:更新粒子的全局优化指导;

Step5:根据式(1)和式(2)进行速度和位置的迭代;

Step6:由约束条件判断新种群中的粒子,不满足约束的粒子取上次迭代位置;

Step7:重复 Step2~Step6,直到满足算法停止迭代的条件。

与 PSO 方法相比算法的改进之处在于粒子更新其局部优化指导和全局优化指导时,它们必须在可行域内,更新后的粒子必须在可行域内。

4 实验结果

使用多级分配惩罚函数的 PSO 算法进行约束优化,粒子群算法的参数选择为[6]:种群粒子数通常在 10~40,每个粒子要判断是否在可行域内,高种群数目增加计算时间,种群粒子选为 20 是较好选择。学习因子 $c_1 = c_2 = 0.5$,惯性权重 w 在迭代过程采用线性下降函数方式,初始值从 1.2 下降到 0.2,约束因子$\chi = 0.73$。

约束优化问题如下:

情形 1

$$\min f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$

约束条件:

$$x_1 = 2x_2 - 1; \quad x_1^2/4 + x_2^2 - 1 \leqslant 0$$

情形 2

$$\min f(x) = (x_1 - 10)^3 + (x_2 - 20)^3$$

约束条件:

$$100 - (x_1 - 5)^2 - (x_2 - 5)^2 \leqslant 0$$

$$13 \leqslant x_1 \leqslant 100, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 100$$

$$(x_1 - 6)^2 - (x_2 - 6)^2 - 82.81 \leqslant 0$$

情形 3

$$\min f(x) = (x_1 - 10)^2 + (x_2 - 12)^2 + x_3^2 + 3(x_4 - 11)^2 + 10x_5^6 + 7x_6^2 + x_7^4 - 4x_6x_7 - x_7$$

约束条件:

$$-127 + 2x_1^2 + 3x_2^4 + x_3 + 4x_4^2 + 5x_5 \leqslant 0$$

$$-4x_1^2+x_2^2-3x_1x_3+2x_3^2+5x_6-11x_7\leqslant 0$$
$$-282+7x_1+3x_2+10x_3^2+x_4-x_5\leqslant 0$$
$$-196+23x_1+x_2^2+6x_6^2-8x_7\leqslant 0$$
$$-10\leqslant x_i\leqslant 10,\quad i=1,\cdots,7$$

3 个问题的优化分别采用拉格朗日乘子法和粒子群多级惩罚函数方法进行优化。采用多级惩罚分配的 PSO 方法处理时，惩罚因子$h(k)$的变量 k 取值为迭代次数。对情形 1 问题$h(k)=\sqrt{k}$，对情形 2 和情形 3 问题 $h(k)=k\sqrt{k}$。

优化结果分别如表 1 和表 2 所示，使用 PSO 方法处理多约束优化问题时，多级惩罚分配函数作为约束条件的动态修正惩罚值，各函数均可快速而精确地收敛于全局优化解。

表 1 拉格朗日乘子法的优化结果

项目	情形 1	情形 2	情形 3
最优解	1.415 0	−6 957.912 8	671.610 8
平均解	1.457 6	−6 954.210 3	670.180 3
迭代次数	110	1 346	626

表 2 多级惩罚分配函数的优化结果

项目	情形 1	情形 2	情形 3
惩罚因子	$\sqrt{k}$	$k\sqrt{k}$	$k\sqrt{k}$
最优解	1.393 5	−6 961.813 8	680.631 0
平均解	1.393 6	−6 961.894 5	669.910 1
迭代次数	87	840	336

拉格朗日乘子法优化 3 个问题时，优化解的精度分别比粒子群多级惩罚分配函数低 1.54%、0.88% 和 1.03%，而迭代次数分别增加了 37.9%、60.2% 和 86%。多约束优化问题越复杂，后者的优势越明显。粒子群多级惩罚分配函数是处理多约束优化问题的有效方法。

5 结论

对群体智能技术之一的粒子群算法解决多约束优化问题进行了研究，利用粒子群的并行搜索机制和多级惩罚分配函数解决自适应惩罚机制，避免多约束优化问题收敛于局部优化解，加速了寻优过程，与拉格朗日乘子法优化的 3 个经典的多约束优化问题进行对比，该方法在解的精度和优化迭代次数上均有较大优势。

参考文献

[1] Kennedy J, Eberhart R C. Particle swarm optimization[C]. Proc. IEEE Int. Conf. Neural Networks. Piscataway, NJ, 1995: 1942-1948.

[2] Kennedy J, Eberhart R C. Particle swarm optimization[C]. Proceedings IEEE International Conference on Neural Networks, 1995: 1942-1948.

[3] Omran M, Engelbrecht A, Salman A. Particle swarm optimization method for image clustering [A]. Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2005, 19(3): 297-322.

[4] Parsopoulos K, Vrahatis M. Particle swarm optimization method in multi-objective problems [C]. Proceedings of the 2002 ACM Symposium on Applied Computing (SAC' 2002), Madrid, Spain, ACM Press, 2002: 603-607.

[5] http://www.cs.cinvestav.mx/~constraint/papers/eisci.pdf.

[6] Shi Y, Eberhart R C. Parameter selection in particle swarm optimization[J]. Evolutionary Programming, 1998, VII: 591-600.

Multi-constraint Optimization Algorithm Based on Multistage Punish Function and Particle Swarm Optimization

Zhang Guoying Wu Yijuan

(*Department of Computer Science and Engineering, Beijing Institute of Petro-chemical Technology, Beijing* 102617)

Abstract The paper is based on multistage punishment function and Particle Swarm Optimization to solve multi-constraint optimization problem. It uses the parallel mechanism to search optimal solution in order to avoid trapping into local optimal solution. The paper defines multistage punishment function to describe the relationship between punishing function and constraint condition. Multi-constraint optimization algorithm based on multistage punishing function and Particle Swarm Optimization is presented in this paper, which is used in three classical constrained optical problem and obtain optical solution with high precision in smaller iterative generations.

Key words PSO algorithm; multi-constraint optimization; multi-stage punishment function; punishment factor