

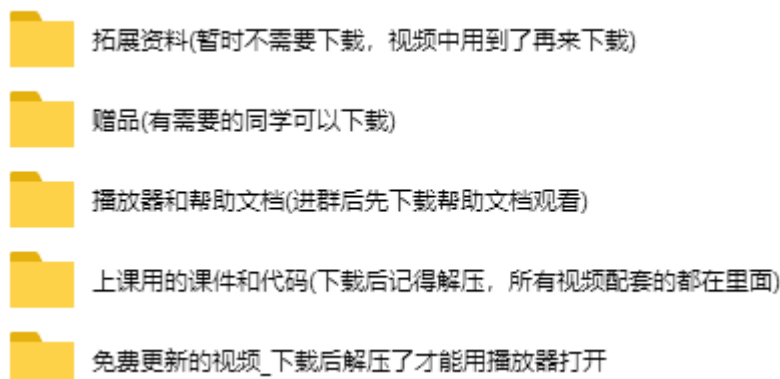
第一讲:层次分析法

(The analytic hierarchy process, 简称AHP)

建模比赛中最基础的模型之一, 其主要用于解决评价类问题 (例如: 选择哪种方案最好、哪位运动员或者员工表现的更优秀)。

温馨提示

- (1) 视频中提到的附件可在**售后群的群文件**中下载。
包括讲义、代码、我视频中推荐的资料等。



(2) 关注我的**微信公众号《数学建模学习交流》**, 后台发送**“软件”**两个字, 可获得常见的建模软件下载方法; 发送**“数据”**两个字, 可获得建模数据的获取方法; 发送**“画图”**两个字, 可获得数学建模中常见的画图方法。另外, 也可以看看公众号的历史文章, 里面发布的都是对大家有帮助的技巧。

(3) **购买更多优质精选的数学建模资料**, 可关注我的微信公众号《数学建模学习交流》, 在后台发送**“买”**这个字即可进入店铺进行购买。

(4) 视频价格不贵, 但价值很高。单人购买观看只需要**58元**, 和另外两名队友一起购买人均仅需**46元**, 视频本身也是下载到本地观看的, 所以请大家**不要侵犯知识产权**, 对视频或者资料进行二次销售。

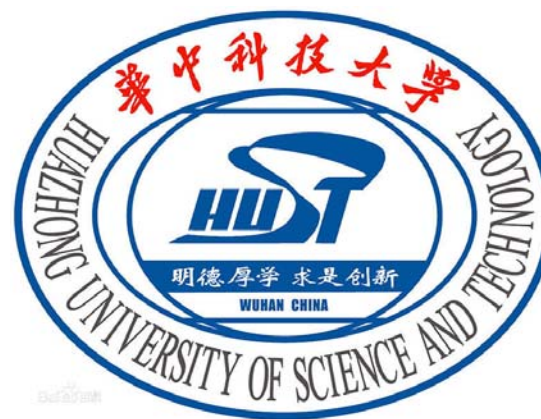
1

模型介绍

评价类问题可用**打分**解决

高考结束了,
我该选华科还是武大呢?

只需要给2个学校分别打分即可。



评价类问题可用打分解决

小明最关心大学里面的这四个方面:

学习氛围 (0.4)

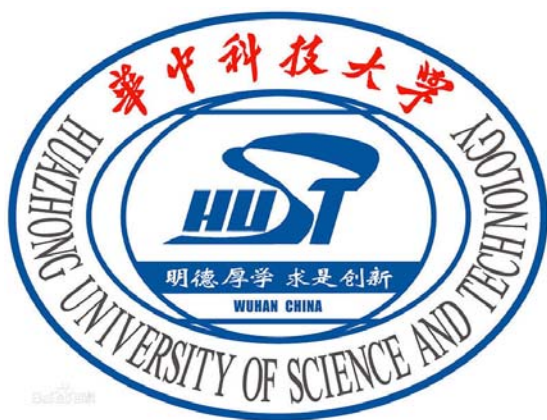
就业前景 (0.3)

男女比例 (0.2)

校园景色 (0.1)

权重和要为1。

括号里面的数值表示小明认为的重要性程度 (权重), 其和为1。



注: 本例子仅用于学习, 大家可暂时忽略真实情况下应考虑到的更多细节 (例如学校中的具体专业)。

评价类问题可用打分解决

学习氛围

随州论坛 [学在华工,玩在武大,爱在华师,吃在湖大](#) 哈哈 - 教育...

9条回复 - 发帖时间: 2007年1月20日

2007年1月20日 - [学在华工,玩在武大,爱在华师,吃在湖大](#) 哈哈-华工缺女生,所以都只能学习武大人,气质浓,华师女生多,环境好,嘿嘿,随州论坛(随州论坛网www.szbbs.org)是...

[www.szbbs.org/thread-2...](#) - 百度快照

[“爱在华师”的真正内涵](#) 搜狐



2017年2月27日 - 这个“[爱在华师](#)”我不好讲是哪个学校的,总之是贬低我们学校的,过去三句话“[爱在华师](#)、[玩在武大](#)、[学在华工](#)”,这个一听就知道是一个贬义词,一个就...

[搜狗网](#) - 百度快照

[“顺口溜”里的大学-走近“学在华科、玩在武大、爱在华师”](#) 道客巴巴

2016年5月31日 - 出“[攀在华科](#)、[玩在武大](#)、[爱在华师](#)”说起在武汉如此之多的高校,走一走,逛一逛,瞧一瞧。你总会有意想不到的惊喜。有这样一句顺口溜:“[学在华科](#)、...

[www.doc88.com/p-806154...](#) - 百度快照

[...一解读“学在华科,玩在武大,爱在华师”背后的精彩](#)... 新浪博客

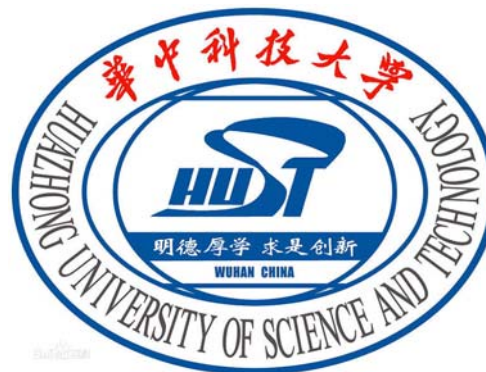
2015年6月25日 - 原文地址:“顺口溜”里的大学——解读“[学在华科](#)、[玩在武大](#)、[爱在华师](#)”背后的精彩作者:高校招生杂志社 都说“天上九头鸟,地上湖北佬”,想必湖北佬也是...

[blog.sina.com.cn/s/blo...](#) - 百度快照

[...一走近“学在华科、玩在武大、爱在华师”背后的精彩](#) - ... 豆丁

2016年4月15日 - “顺口溜”里的大学——走近“[学在华科](#)、[玩在武大](#)、[爱在华师](#)”背后的精彩出“[攀在华科](#)、[玩在武大](#)、[爱在华师](#)”说起 在武汉如此之多的高校,走一走,逛...

[豆丁网](#) - 百度快照



0.7



0.3

注: 本例子对涉及到的学校并无恶意, 仅用于教学使用
(请观看到此视频的华科武大同学别吐槽哦)

评价类问题可用打分解决

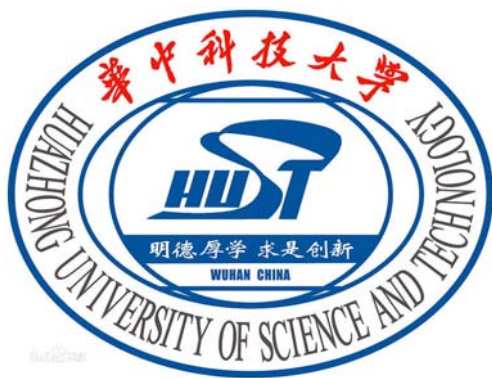
就业前景

2019年**高考填报志愿**时, 华中科技大学**就业率**情况怎么样是广大考生和家长朋友们十分关心的问题, 根据华中科技大学就业指导中心2019年最新发布的华中科技大学就业质量报告可知:

1、华中科技大学就业率

华中科技大学本科就业率为96.36%, 硕士就业率为96.99%。

武汉大学2018届共有13195名毕业生, 总体就业率为95.48%。其中本科生7015名, 就业率为93.81%; 硕士生5121名, 就业率为97.64%; 博士生1059人, 就业率为96.03%。该校男女生比例大致在1: 1左右。



=



= 0.5

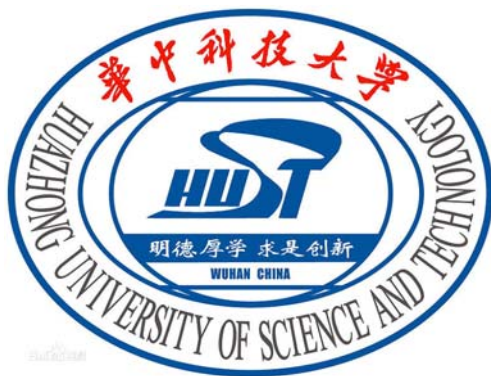
评价类问题可用打分解决

男女比例

华中科技大学

男女生比例接近2:1

2日, 华中科技大学迎来2017级7395名本科新生, 其中男生5029名, 女生2366名, 男女生比例是2.1:1, 接近于两男一女的比例;



0.3



0.7

评价类问题可用打分解决

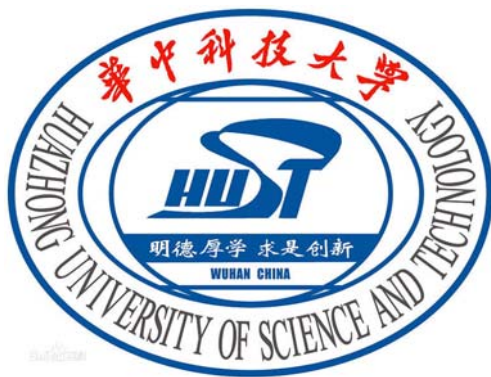
校园景色



华科玉兰

VS

武大樱花



0.25



0.75

根据权重表格计算得分

小明整理好了这张权重表格:

| | 指标权重 | 华科 | 武大 |
|------|------|------|------|
| 学习氛围 | 0.4 | 0.7 | 0.3 |
| 就业前景 | 0.3 | 0.5 | 0.5 |
| 男女比例 | 0.2 | 0.3 | 0.7 |
| 校园景色 | 0.1 | 0.25 | 0.75 |

华科最终得分: 0.515

$$0.7 \times 0.4 + 0.5 \times 0.3 + 0.3 \times 0.2 + 0.25 \times 0.1$$

武大最终得分: 0.485

$$0.3 \times 0.4 + 0.5 \times 0.3 + 0.7 \times 0.2 + 0.75 \times 0.1$$



华科最终得分: 0.515

武大最终得分: 0.485

由于华科分数高于武大, 小明最终选择了华科。。。

一个小小的总结

使用打分法解决评价问题, 只需要我们补充完成下面这张表格即可:

| | 指标权重 | 华科 | 武大 |
|------|------|------|------|
| 学习氛围 | 0.4 | 0.7 | 0.3 |
| 就业前景 | 0.3 | 0.5 | 0.5 |
| 男女比例 | 0.2 | 0.3 | 0.7 |
| 校园景色 | 0.1 | 0.25 | 0.75 |

| | 指标权重 | 方案1 | 方案2 | |
|-------|------|-----|-----|-------|
| 指标1 | | | | |
| 指标2 | | | | |
| 指标3 | | | | |
| | | | | |

同颜色的单元格的和为1, 它们表示的针对某一因素所占的权重(或得分)。

一道引出层次分析法的例题

填好志愿后, 小明同学想出去旅游。在查阅了网上的攻略后, 他初步选择了苏杭、北戴河和桂林三地之一作为目标景点。

请你确定评价指标、形成评价体系来为小明同学选择最佳的方案。

- 1、评价的目标；
- 2、可选择的方案；
- 3、评价指标。

一道引出层次分析法的例题

填好志愿后, 小明同学想出去旅游。在查阅了网上的攻略后, 他初步选择了苏杭、北戴河和桂林三地之一作为目标景点。

请你**确定评价指标、形成评价体系**来为小明同学选择最佳的方案。

评价类问题

一道引出层次分析法的例题

填好志愿后, 小明同学想出去旅游。在查阅了网上的攻略后, 他初步选择了苏杭、北戴河和桂林三地之一作为目标景点。

请你**确定评价指标、形成评价体系**来为小明同学选择最佳的方案。

评价类问题

解决评价类问题, 大家首先要想到以下三个问题:

- ① 我们评价的**目标**是什么?
- ② 我们为了达到这个目标有哪几种**可选的方案**?
- ③ **评价的准则或者说指标**是什么? (我们根据什么东西来评价好坏)

一道引出层次分析法的例题

填好志愿后, 小明同学想出去旅游。在查阅了网上的攻略后, 他初步选择了苏杭、北戴河和桂林三地之一作为目标景点。

请你**确定评价指标、形成评价体系**来为小明同学选择最合适的方案。

解决评价类问题, 大家首先要想到以下三个问题:

① 我们评价的目标是什么? **评价目标**

答: 为小明同学选择最佳的旅游景点。

② 我们为了达到这个目标有哪几种可选的方案? **可选择的方案**

答: 三种, 分别是去苏杭、去北戴河和去桂林。

③ 评价的准则或者说指标是什么? (我们根据什么东西来评价好坏)

答: 题目没给相关数据支撑, 需要我们确定。

评价指标

一道引出层次分析法的例题

解决评价类问题，大家首先要想到以下三个问题：

① 我们评价的目标是什么？

答：为小明同学选择最佳的旅游景点。

② 我们为了达到这个目标有哪几种可选的方案？

答：三种，分别是去苏杭、去北戴河和去桂林。

③ 评价的准则或者说指标是什么？（我们根据什么东西来评价好坏）

答：题目没给相关数据支撑，需要我们查阅相关的资料。

一般而言，前两个问题的答案是显而易见的，第三个问题的答案需要我们根据题目中的背景材料、常识以及网上搜集到的参考资料进行结合，从中筛选出最合适的指标。

优先选择知网（或者万方、百度学术、谷歌学术等平台）搜索相关的文献：

| <input type="checkbox"/> | 题名 | 作者 | 来源 | 发表时间 | 数据库 | 被引 | 下载 | 阅读 | 收藏 |
|-----------------------------|--|--|------------------------------------|------------------|-----------------|----|-----|------|----|
| <input type="checkbox"/> 1 | 中小城市周边旅游调查及分析——以湖南省衡阳市为例 | 汪凤麟;李珊;蔡达成;朱欣碧;欧阳昊 | 现代营销(下旬刊) | 2019-05-16 15:50 | 期刊 | | 134 | HTML | ☆ |
| <input type="checkbox"/> 2 | 高铁时代下贵阳市旅游目的地供给情况评价——基于旅游者选择出游目的地的影响因素视角 | 陈长;樊海水 | 经济研究导刊 | 2019-01-25 | 期刊 | | 137 | HTML | ☆ |
| <input type="checkbox"/> 3 | 乡村旅游目的地选择及产品偏好的影响因素研究 | 付强;尹佳文 | 资源开发与市场 | 2018-11-12 | 期刊 | 1 | 822 | HTML | ☆ |
| <input type="checkbox"/> 4 | 全域旅游背景下新型城镇化路径选择影响因素研究——以乐山为例 | 潘娟 | 农村经济与科技 | 2018-04-20 | 期刊 | | 139 | HTML | ☆ |
| <input type="checkbox"/> 5 | 大学生毕业旅游目的地选择决策影响因素——以扬州市为例 | 耿捷 | 旅游纵览(下半月) | 2018-03-23 | 期刊 | | 676 | HTML | ☆ |
| <input type="checkbox"/> 6 | 影响旅游者选择旅游网站的因素研究 | 张玉梅;刘梦思 | 首都师范大学学报(自然科学版) | 2018-02-05 | 期刊 | 2 | 243 | HTML | ☆ |
| <input type="checkbox"/> 7 | 海南岛热带森林旅游线路游客选择偏好影响因素研究 | 钟衣海;曾银芳;李东瑾;毕华 | 四川师范大学学报(自然科学版) | 2018-01-20 | 期刊 | 2 | 216 | HTML | ☆ |
| <input type="checkbox"/> 8 | 中学生研学旅游基地选择的影响因素研究——基于TPB模型的研究 | 程珊珊;刘婷;白帆;唐月亮 | 河北旅游职业学院学报 | 2017-12-20 | 期刊 | 1 | 910 | HTML | ☆ |
| <input type="checkbox"/> 9 | A RIDIT approach to evaluate factors influencing tourist destination brand selection behaviour pertaining to Indian tourism sector | Subhajit Bhattacharya;Rohit Vishal Kumar | Journal of Modelling in Management | 2017-11-06 | Emerald Journal | | | | ☆ |
| <input type="checkbox"/> 10 | 大学生周末旅游目的地选择影响因素研究——以广州市为例 | 陈建斌;李亮宏 | 统计与管理 | 2017-06-20 | 期刊 | 1 | 412 | HTML | ☆ |



大学生啦!
一定要知道知网哦。

为什么优先在别人发表的论文中寻找指标?

显得专业

- 1、可以引用别人的文章;
- 2、学习别人的研究方法

另外, 别人研究使用的方法你也可以借鉴

假如你没找到相关的文献怎么办?

和小组成员来场头脑风暴

+

在平台上搜索别人或者专家的看法呗



和我说话请投币

强烈推荐一个很腻害的网站:

虫部落-快搜 : <https://search.chongbuluo.com/>

优先级:



- 谷歌搜索 (国内进不去的话就使用百度搜索吧)
- 微信搜索
- 知乎搜索

例如本题我们可以搜索关键字:

旅游选择因素、根据什么因素选择旅游景点、旅游景点评价指标等

填好志愿后, 小明同学想出去旅游。在查阅了网上的攻略后, 他初步选择了苏杭、北戴河和桂林三地之一作为目标景点。

请你确定评价指标、形成评价体系来为小明同学选择最佳的方案。

假如我们查询了资料后选择了以下五个指标:

- ①景点景色
- ②旅游花费
- ③居住环境
- ④饮食情况
- ⑤交通便利程度

解决评价类问题，大家首先要想到以下三个问题：

① 我们评价的目标是什么？

答：为小明同学选择最佳的旅游景点。

② 我们为了达到这个目标有哪几种可选的方案？

答：三种，分别是去苏杭、去北戴河和去桂林。

③ 评价的准则或者说指标是什么？（我们根据什么东西来评价好坏）

答：景色、花费、居住、饮食、交通。

脑洞：假如现在小明就在我们面前，我们要对他提哪些问题才能帮他合理的做决定？

还记得这张权重表格吗?

| | 指标权重 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|----|------|----|-----|----|
| 景色 | | | | |
| 花费 | | | | |
| 居住 | | | | |
| 饮食 | | | | |
| 交通 | | | | |

直接问权重的弊端

有同学可能会想, 直接叫小明填好这张表不就完事啦~
这样往往比较片面和不周全
(隔一天问他答案可能就变了)



你想的太简单了

在确定影响某因素的诸因子在该因素中所占的比重时, 遇到的主要困难是这些比重常常不易定量化。此外, 当影响某因素的因子较多时, 直接考虑各因子对该因素有多大程度的影响时, 常常会因考虑不周全、顾此失彼而使决策者提出与他实际认为的重要性程度不相一致的数据, 甚至有可能提出一组隐含矛盾的数据。

——选自司守奎[kuí]老师的《数学建模算法与应用》

分而治之的思想

| | 指标权重 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|----|------|----|-----|----|
| 景色 | | | | |
| 花费 | | | | |
| 居住 | | | | |
| 饮食 | | | | |
| 交通 | | | | |

分而治之：我们先来确定指标的权重吧~

问题：

一次性考虑这五个指标之间的关系，往往考虑不周。

解决方法：

两个两个指标进行比较，最终根据两两比较的结果来推算出权重。

层次分析法的思想登场

如果用1-9表示重要程度（见下表），请你两两比较上述这五个指标对于选择最终的旅游景点的重要性。

| 标度 | 含义 |
|------------|--------------------------|
| 1 | 表示两个因素相比，具有同样重要性 |
| 3 | 表示两个因素相比，一个因素比另一个因素稍微重要 |
| 5 | 表示两个因素相比，一个因素比另一个因素明显重要 |
| 7 | 表示两个因素相比，一个因素比另一个因素强烈重要 |
| 9 | 表示两个因素相比，一个因素比另一个因素极端重要 |
| 2, 4, 6, 8 | 上述两相邻判断的中值 |
| 倒数 | A和B相比如果标度为3，那么B和A相比就是1/3 |

（注：这里的重要性有时候解释为满意度更方便理解）

| | 景色 | 花费 | 居住 | 饮食 | 交通 |
|----|-----|-----|----|----|----|
| 景色 | 1 | 1/2 | 4 | | |
| 花费 | 2 | 1 | | | |
| 居住 | 1/4 | | 1 | | |
| 饮食 | | | | 1 | |
| 交通 | | | | | 1 |

| 标度 | 含义 |
|------------|---------------------------|
| 1 | 同样重要性 |
| 3 | 稍微重要 |
| 5 | 明显重要 |
| 7 | 强烈重要 |
| 9 | 极端重要 |
| 2, 4, 6, 8 | 上述两相邻判断的中值 |
| 倒数 | A和B相比如果标度为3, 那么B和A相比就是1/3 |

Q1: 根据右边这个表, 请你在选择旅游目的地时, 比较景色和花费的重要程度。

A1: 我认为花费比景色略微重要(介于同等重要1和稍微重要3之间吧)

Q2: 根据右边这个表, 请你在选择旅游目的地时, 比较景色和居住的重要程度。

A2: 我认为景色比居住要重要一点(介于稍微重要3和明显重要5之间吧)

| | 景色 | 花费 | 居住 | 饮食 | 交通 |
|----|-----|-----|----|-----|-----|
| 景色 | 1 | 1/2 | 4 | 3 | 3 |
| 花费 | 2 | 1 | 7 | 5 | 5 |
| 居住 | 1/4 | 1/7 | 1 | 1/2 | 1/3 |
| 饮食 | 1/3 | 1/5 | 2 | 1 | 1 |
| 交通 | 1/3 | 1/5 | 3 | 1 | 1 |

| 标度 | 含义 |
|------------|---------------------------|
| 1 | 同样重要性 |
| 3 | 稍微重要 |
| 5 | 明显重要 |
| 7 | 强烈重要 |
| 9 | 极端重要 |
| 2, 4, 6, 8 | 上述两相邻判断的中值 |
| 倒数 | A和B相比如果标度为3, 那么B和A相比就是1/3 |

就这样, 小明回答了10次【组合数 $C(5,2)$ 】, 你根据他所回答的填好了上面这张表。

注: 实际上没有小明帮我们回答, 层次分析法中这张表是交给‘专家’填的, 具体我们等后面再说。

| | 景色 | 花费 | 居住 | 饮食 | 交通 |
|----|-----|-----|----|-----|-----|
| 景色 | 1 | 1/2 | 4 | 3 | 3 |
| 花费 | 2 | 1 | 7 | 5 | 5 |
| 居住 | 1/4 | 1/7 | 1 | 1/2 | 1/3 |
| 饮食 | 1/3 | 1/5 | 2 | 1 | 1 |
| 交通 | 1/3 | 1/5 | 3 | 1 | 1 |

| 标度 | 含义 |
|------------|---------------------------|
| 1 | 同样重要性 |
| 3 | 稍微重要 |
| 5 | 明显重要 |
| 7 | 强烈重要 |
| 9 | 极端重要 |
| 2, 4, 6, 8 | 上述两相邻判断的中值 |
| 倒数 | A和B相比如果标度为3, 那么B和A相比就是1/3 |

总结: 上面这个表是一个 5×5 的**方阵**, 我们记为A, 对应的元素为 a_{ij} .

这个方阵有如下特点:

行和列相等的矩阵称之为方阵

- (1) a_{ij} 表示的意义是, 与指标 j 相比, i 的重要程度。
- (2) 当 $i = j$ 时, 两个指标相同, 因此同等重要记为1, 这就解释了主对角线元素为1。
- (3) $a_{ij} > 0$ 且满足 $a_{ij} \times a_{ji} = 1$ (我们称满足这一条件的矩阵为**正互反矩阵**)

实际上, 上面这个矩阵就是层次分析法中的**判断矩阵**。



| | 景色 | 花费 | 居住 | 饮食 | 交通 |
|----|-----|-----|----|-----|-----|
| 景色 | 1 | 1/2 | 4 | 3 | 3 |
| 花费 | 2 | 1 | 7 | 5 | 5 |
| 居住 | 1/4 | 1/7 | 1 | 1/2 | 1/3 |
| 饮食 | 1/3 | 1/5 | 2 | 1 | 1 |
| 交通 | 1/3 | 1/5 | 3 | 1 | 1 |

得到了判断矩阵, 就可以计算出权重了。
具体方法我们稍后再讲。

有3种方法来根据判断矩阵来计算权重。

如何计算苏杭、北戴河与桂林在景色方面所占的权重（得分）呢？

| | 指标权重 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|----|------|----|-----|----|
| 景色 | | | | |
| 花费 | | | | |
| 居住 | | | | |
| 饮食 | | | | |
| 交通 | | | | |

填写判断矩阵

| 景色 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|-----|-----|-----|----|
| 苏杭 | 1 | 2 | 5 |
| 北戴河 | 1/2 | 1 | 2 |
| 桂林 | 1/5 | 1/2 | 1 |

| 标度 | 含义 |
|------------|---------------------------|
| 1 | 同样重要性 |
| 3 | 稍微重要 |
| 5 | 明显重要 |
| 7 | 强烈重要 |
| 9 | 极端重要 |
| 2, 4, 6, 8 | 上述两相邻判断的中值 |
| 倒数 | A和B相比如果标度为3, 那么B和A相比就是1/3 |

Q1: 你觉得苏杭的风景和北戴河相比如何?

A1: 稍微好一点点吧 (介于1-3之间)

Q2: 你觉得苏杭的风景和桂林相比如何?

A2: 要明显的好哦 (5)

Q3: 你觉得北戴河的风景和桂林相比如何?

A3: 稍微好一点点吧 (介于1-3之间)

注意: 判断矩阵中的元素只能是1至9和它们的倒数, 有些文章中填入了其他的数 (例如3/2、5/4), 这是不可以的。

注意: 北戴河的花费要低于苏杭哦, 视频讲解中口误了。

| 花费 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|-----|----|-------|-------|
| 苏杭 | 1 | $1/3$ | $1/8$ |
| 北戴河 | 3 | 1 | $1/3$ |
| 桂林 | 8 | 3 | 1 |

| 饮食 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|-----|-------|-----|----|
| 苏杭 | 1 | 3 | 4 |
| 北戴河 | $1/3$ | 1 | 1 |
| 桂林 | $1/4$ | 1 | 1 |

| 居住 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|-----|-------|-------|----|
| 苏杭 | 1 | 1 | 3 |
| 北戴河 | 1 | 1 | 3 |
| 桂林 | $1/3$ | $1/3$ | 1 |

| 交通 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|-----|----|-----|-------|
| 苏杭 | 1 | 1 | $1/4$ |
| 北戴河 | 1 | 1 | $1/4$ |
| 桂林 | 4 | 4 | 1 |

一个有可能出问题的地方:

| 景色 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|-----|-----|-----|----|
| 苏杭 | 1 | 2 | 5 |
| 北戴河 | 1/2 | 1 | 2 |
| 桂林 | 1/5 | 1/2 | 1 |

| 标度 | 含义 |
|------------|---------------------------|
| 1 | 同样重要性 |
| 3 | 稍微重要 |
| 5 | 明显重要 |
| 7 | 强烈重要 |
| 9 | 极端重要 |
| 2, 4, 6, 8 | 上述两相邻判断的中值 |
| 倒数 | A和B相比如果标度为3, 那么B和A相比就是1/3 |

| 景色 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|-----|-----|-----|----|
| 苏杭 | 1 | 2 | 1 |
| 北戴河 | 1/2 | 1 | 2 |
| 桂林 | 1 | 1/2 | 1 |

苏杭 = A 北戴河 = B 桂林 = C
 苏杭比北戴河景色好一点 $A > B$
 苏杭和桂林景色一样好 $A = C$
 北戴河比桂林景色好一点 $B > C$

出现了矛盾之处 (不一致的现象)

(要是把左表中的2换成更大的数, 那么不一致会更加严重)

一致矩阵

| 景色 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|-----|-----|-----|----|
| 苏杭 | 1 | 2 | 4 |
| 北戴河 | 1/2 | 1 | 2 |
| 桂林 | 1/4 | 1/2 | 1 |

| 标度 | 含义 |
|------------|---------------------------|
| 1 | 同样重要性 |
| 3 | 稍微重要 |
| 5 | 明显重要 |
| 7 | 强烈重要 |
| 9 | 极端重要 |
| 2, 4, 6, 8 | 上述两相邻判断的中值 |
| 倒数 | A和B相比如果标度为3, 那么B和A相比就是1/3 |

$$a_{ij} = \frac{i \text{ 的重要程度}}{j \text{ 的重要程度}}, \quad a_{jk} = \frac{j \text{ 的重要程度}}{k \text{ 的重要程度}}$$

$$a_{ik} = \frac{i \text{ 的重要程度}}{k \text{ 的重要程度}} = a_{ij} \times a_{jk}$$

一致矩阵的例子

| 景色 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|-----|-----|-----|----|
| 苏杭 | 1 | 2 | 4 |
| 北戴河 | 1/2 | 1 | 2 |
| 桂林 | 1/4 | 1/2 | 1 |

$$a_{ik} = a_{ij} \times a_{jk}$$



| | 景色 | 花费 | 居住 | 饮食 | 交通 |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 景色 | 1 | 1/2 | 4 | 3 | 3 |
| 花费 | 2 | 1 | 8 | 6 | 6 |
| 居住 | 1/4 | 1/8 | 1 | 3/4 | 3/4 |
| 饮食 | 1/3 | 1/6 | 4/3 | 1 | 1 |
| 交通 | 1/3 | 1/6 | 4/3 | 1 | 1 |

观察上面这两个矩阵的特点:

各行（各列）之间成倍数关系

注意：在右边的矩阵中出现了3/4和4/3这两个元素，这实际上在层次分析法中是不允许的。这里我只用于演示一致矩阵的特点，再次强调，判断矩阵中的元素只能是1至9和它们的倒数。

一致矩阵

若矩阵中每个元素 $a_{ij} > 0$ 且满足 $a_{ij} \times a_{ji} = 1$ ，则我们称该矩阵为**正互反矩阵**。

在层次分析法中，我们构造的判断矩阵均是正互反矩阵。

若正互反矩阵满足 $a_{ij} \times a_{jk} = a_{ik}$ ，则我们称其为**一致矩阵**。

注意：在使用判断矩阵求权重之前，必须对其进行一致性检验。

| 景色 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|-----|-----|-----|----|
| 苏杭 | 1 | 2 | 5 |
| 北戴河 | 1/2 | 1 | 2 |
| 桂林 | 1/5 | 1/2 | 1 |

| 景色 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|-----|-----|-----|----|
| 苏杭 | 1 | 2 | 4 |
| 北戴河 | 1/2 | 1 | 2 |
| 桂林 | 1/4 | 1/2 | 1 |

一致性检验

原理： 检验我们构造的判断矩阵和一致矩阵是否有太大的差别。



下面的知识需要用到线性代数的知识, 没学过的同学可以忽略掉证明过程, 只需要了解如何计算即可。

| 景色 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|-----|-----|-----|----|
| 苏杭 | 1 | 2 | 4 |
| 北戴河 | 1/2 | 1 | 2 |
| 桂林 | 1/4 | 1/2 | 1 |

| | 景色 | 花费 | 居住 | 饮食 | 交通 |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 景色 | 1 | 1/2 | 4 | 3 | 3 |
| 花费 | 2 | 1 | 8 | 6 | 6 |
| 居住 | 1/4 | 1/8 | 1 | 3/4 | 3/4 |
| 饮食 | 1/3 | 1/6 | 4/3 | 1 | 1 |
| 交通 | 1/3 | 1/6 | 4/3 | 1 | 1 |

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ 为一致矩阵的充要条件: } \begin{cases} a_{ij} > 0 \\ a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1 \\ [a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}] = k_i [a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}] \end{cases}$$

引理: A 为 n 阶方阵, 且 $r(A) = 1$, 则 A 有一个特征值为 $tr(A)$, 其余特征值均为 0.

因为一致矩阵的各行成比例且不是零矩阵, 所以一致矩阵的秩一定为 1.

由引理可知: 一致矩阵有一个特征值为 n , 其余特征值均为 0.

另外, 我们很容易得到, 特征值为 n 时, 对应的特征向量刚好为 $k \left[\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{12}}, \cdots, \frac{1}{a_{1n}} \right]^T$ ($k \neq 0$)

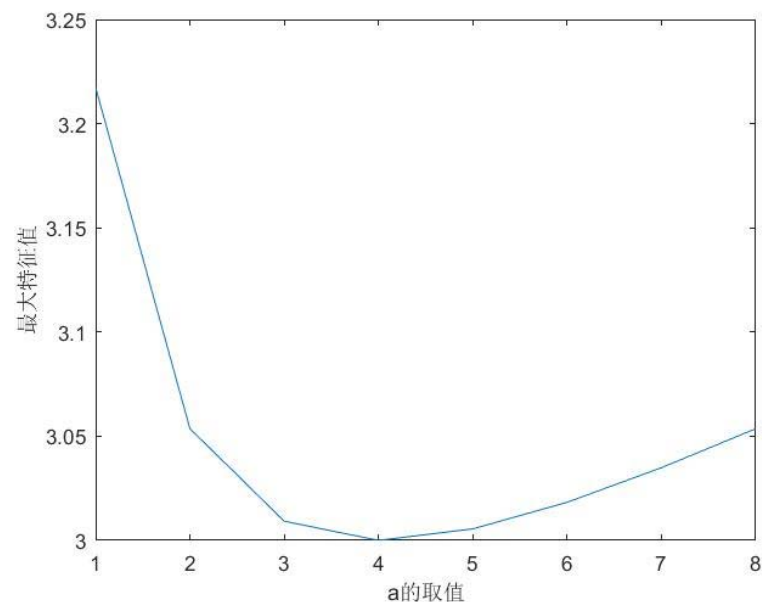
计算可看: `EIG_consistent_matrix.m`

若正互反矩阵（判断矩阵）满足 $a_{ij} \times a_{jk} = a_{ik}$ ，则我们称其为一致矩阵。

引理: n 阶正互反矩阵 A 为一致矩阵时当且仅当最大特征值 $\lambda_{\max} = n$ 。

且当正互反矩阵 A 非一致时，一定满足 $\lambda_{\max} > n$ 。

| 景色 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|-----|-------|-------|-----|
| 苏杭 | 1 | 2 | a |
| 北戴河 | $1/2$ | 1 | 2 |
| 桂林 | $1/a$ | $1/2$ | 1 |



判断矩阵越不一致时，最大特征值与 n 相差就越大。

代码文件名称: PPT_1.m

一致性检验的步骤

第一步: 计算**一致性指标CI**

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

第二步: 查找对应的**平均随机一致性指标RI**

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|------|---|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| RI | 0 | 0 | 0.52 | 0.89 | 1.12 | 1.26 | 1.36 | 1.41 | 1.46 | 1.49 | 1.52 | 1.54 | 1.56 | 1.58 | 1.59 |

注: 在实际运用中, n 很少超过10, 如果指标的个数大于10, 则可考虑建立二级指标体系, 或使用我们以后要学习的模糊综合评价模型。

第三步: 计算**一致性比例CR**

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

如果 $CR < 0.1$, 则可认为判断矩阵的一致性可以接受; 否则需要对判断矩阵进行修正。

注: 特征值可用matlab软件进行计算, 没学过线性代数的同学也不需要担心。如果特征值中有虚数, 则比较的是特征值的模长。

两个小问题

$$\text{一致性指标 } CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}, \text{ 一致性比例 } CR = \frac{CI}{RI} \begin{cases} < 0.1, \text{ 判断矩阵一致} \\ \geq 0.1, \text{ 判断矩阵不一致} \end{cases}$$

(1) 平均随机一致性指标RI怎么计算来的?

RI 的值是这样得到的, 用随机方法构造 500 个样本矩阵: 随机地从 1~9 及其倒数中抽取数字构造正互反矩阵, 求得最大特征根的平均值 λ'_{\max} , 并定义

$$RI = \frac{\lambda'_{\max} - n}{n - 1}。$$

(2) 为什么要这样构造CI, 为什么要以0.1为划分依据?

大家有兴趣的话可以去查看作者的原论文, 作者是通过多次蒙特卡罗模拟得到的最佳的方案。

注意: RI 我们只需要会查表即可, 不用管怎么来的, 另外有些地方给的 RI 的表格和我给的有细微区别, 以我的为准, 我给的这个表格使用的人最多。

一致矩阵怎么计算权重?

从简单的开始入手, 先来看一致矩阵:

| 景色 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|-----|-----|-----|----|
| 苏杭 | 1 | 2 | 4 |
| 北戴河 | 1/2 | 1 | 2 |
| 桂林 | 1/4 | 1/2 | 1 |

| 标度 | 含义 |
|------------|---------------------------|
| 1 | 同样重要性 |
| 3 | 稍微重要 |
| 5 | 明显重要 |
| 7 | 强烈重要 |
| 9 | 极端重要 |
| 2, 4, 6, 8 | 上述两相邻判断的中值 |
| 倒数 | A和B相比如果标度为3, 那么B和A相比就是1/3 |

对于景色这点而言: (注: 这里的重要性有时候解释为满意度更方便理解)
苏杭的重要性如果是1, 那么北戴河的重要性就是1/2, 桂林的重要性就是1/4.

注意, 权重一定要进行归一化处理:

$$\text{苏杭} = 1 / (1 + 0.5 + 0.25)$$

$$\text{北戴河} = 0.5 / (1 + 0.5 + 0.25)$$

$$\text{桂林} = 0.25 / (1 + 0.5 + 0.25)$$

判断矩阵计算权重

| 景色 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|-----|-----|-----|----|
| 苏杭 | 1 | 2 | 5 |
| 北戴河 | 1/2 | 1 | 2 |
| 桂林 | 1/5 | 1/2 | 1 |

仅使用第一列的数据, 计算出来的权重:

$$\text{苏杭} = 1 / (1+0.5+0.2) = 0.5882$$

$$\text{北戴河} = 0.5 / (1+0.5+0.2) = 0.2941$$

$$\text{桂林} = 0.2 / (1+0.5+0.2) = 0.1177$$

判断矩阵计算权重

| 景色 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|-----|-----|-----|----|
| 苏杭 | 1 | 2 | 5 |
| 北戴河 | 1/2 | 1 | 2 |
| 桂林 | 1/5 | 1/2 | 1 |

仅使用第一列的数据, 计算出来的权重:

$$\text{苏杭} = 1 / (1 + 0.5 + 0.2) = 0.5882$$

$$\text{北戴河} = 0.5 / (1 + 0.5 + 0.2) = 0.2941$$

$$\text{桂林} = 0.2 / (1 + 0.5 + 0.2) = 0.1177$$

使用第二列的数据, 计算出来的权重:

$$\text{苏杭} = 2 / (2 + 1 + 0.5) = 0.5714$$

$$\text{北戴河} = 1 / (2 + 1 + 0.5) = 0.2857$$

$$\text{桂林} = 0.5 / (2 + 1 + 0.5) = 0.1429$$

使用第三列的数据, 计算出来的权重:

$$\text{苏杭} = 5 / (5 + 2 + 1) = 0.625$$

$$\text{北戴河} = 2 / (5 + 2 + 1) = 0.25$$

$$\text{桂林} = 1 / (5 + 2 + 1) = 0.125$$

方法1: 算术平均法求权重

仅使用第一列的数据, 计算出来的权重:

$$\text{苏杭} = 1 / (1+0.5+0.2) = 0.5882$$

$$\text{北戴河} = 0.5 / (1+0.5+0.2) = 0.2941$$

$$\text{桂林} = 0.2 / (1+0.5+0.2) = 0.1177$$

使用第二列的数据, 计算出来的权重:

$$\text{苏杭} = 2 / (2+1+0.5) = 0.5714$$

$$\text{北戴河} = 1 / (2+1+0.5) = 0.2857$$

$$\text{桂林} = 0.5 / (2+1+0.5) = 0.1429$$

使用第三列的数据, 计算出来的权重:

$$\text{苏杭} = 5 / (5+2+1) = 0.625$$

$$\text{北戴河} = 2 / (5+2+1) = 0.25$$

$$\text{桂林} = 1 / (5+2+1) = 0.125$$

综合上述三列, 我们求平均权重:

$$\text{苏杭} = (0.5882+0.5714+0.625)/3=0.5949$$

$$\text{北戴河} = (0.2941+0.2857+0.25)/3=0.2766$$

$$\text{桂林} = (0.1177+0.1429+0.125)/3=0.1285$$



方法1: 算术平均法求权重

**第一步: 将判断矩阵按照列归一化
(每一个元素除以其所在列的和)**

| 景色 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|-----|--------|--------|-------|
| 苏杭 | 0.5882 | 0.5714 | 0.625 |
| 北戴河 | 0.2941 | 0.2857 | 0.25 |
| 桂林 | 0.1177 | 0.1429 | 0.125 |

第二步: 将归一化的各列相加(按行求和)

| | 未归一化的权重 |
|-----|--------------------------------|
| 苏杭 | $0.5882+0.5714+0.625 = 1.7846$ |
| 北戴河 | $0.2941+0.2857+0.25=0.8298$ |
| 桂林 | $0.1177+0.1429+0.125=0.3856$ |

第三步: 将相加后得到的向量中每个元素除以n即可得到权重向量

| | 权重 |
|-----|-----------------------|
| 苏杭 | $1.7846 / 3 = 0.5949$ |
| 北戴河 | $0.8298 / 3 = 0.2766$ |
| 桂林 | $0.3856 / 3 = 0.1285$ |

| 景色 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|-----|-----|-----|----|
| 苏杭 | 1 | 2 | 5 |
| 北戴河 | 1/2 | 1 | 2 |
| 桂林 | 1/5 | 1/2 | 1 |

方法1: 算术平均法求权重

第一步: 将判断矩阵按照列归一化
(每一个元素除以其所在列的和)

第二步: 将归一化的各列相加(按行求和)

第三步: 将相加后得到的向量中每个元素除以n即可得到权重向量

假设判断矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

那么算术平均法求得的权重向量 $\omega_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^n a_{kj}}$ (ω 读作 $omega$)

$(i = 1, 2, \cdots, n)$

方法2: 几何平均法求权重

几何平均法求权重也有三步:

第一步: 将A的元素按照行相乘得到一个新的列向量

第二步: 将新的向量的每个分量开n次方

第三步: 对该列向量进行归一化即可得到权重向量

假设判断矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

那么几何平均法求得的权重向量 $\omega_i = \frac{(\prod_{j=1}^n a_{ij})^{\frac{1}{n}}}{\sum_{k=1}^n (\prod_{j=1}^n a_{kj})^{\frac{1}{n}}}$, $(i = 1, 2, \dots, n)$

| | 算术平均法权重 | 几何平均法权重 |
|-----|---------|---------|
| 苏杭 | 0.5949 | 0.5954 |
| 北戴河 | 0.2766 | 0.2764 |
| 桂林 | 0.1285 | 0.1283 |

注: 权重和应为1, 这里由于四舍五入所以会有可以忽略的差距。

方法3: 特征值法求权重

一致矩阵有一个特征值为 n , 其余特征值均为0.

另外, 我们很容易得到, 特征值为 n 时, 对应的特征向量刚好为 $k[\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{12}}, \dots, \frac{1}{a_{1n}}]^T$ ($k \neq 0$)

这一特征向量刚好就是一致矩阵的第一列。

| 景色 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|-----|-----|-----|----|
| 苏杭 | 1 | 2 | 4 |
| 北戴河 | 1/2 | 1 | 2 |
| 桂林 | 1/4 | 1/2 | 1 |

注意, 权重一定要进行归一化处理:

$$\text{苏杭} = 1 / (1 + 0.5 + 0.25)$$

$$\text{北戴河} = 0.5 / (1 + 0.5 + 0.25)$$

$$\text{桂林} = 0.25 / (1 + 0.5 + 0.25)$$

方法3: 特征值法求权重

假如我们的判断矩阵一致性可以接受, 那么我们可以仿照一致矩阵权重的求法。

第一步: 求出矩阵A的最大特征值以及其对应的特征向量

第二步: 对求出的特征向量进行归一化即可得到我们的权重

| 景色 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|-----|-----|-----|----|
| 苏杭 | 1 | 2 | 5 |
| 北戴河 | 1/2 | 1 | 2 |
| 桂林 | 1/5 | 1/2 | 1 |

最大特征值为3.0055, 一致性比例 $CR = 0.0053$

对应的特征向量: $[-0.8902, -0.4132, -0.1918]$

对其归一化: $[0.5954, 0.2764, 0.1283]$

| | 算术平均法 | 几何平均法 | 特征值法 |
|-----|--------|--------|--------|
| 苏杭 | 0.5949 | 0.5954 | 0.5954 |
| 北戴河 | 0.2766 | 0.2764 | 0.2764 |
| 桂林 | 0.1285 | 0.1283 | 0.1283 |

将计算结果填入权重表

| | 算术平均法 | 几何平均法 | 特征值法 |
|-----|--------|--------|--------|
| 苏杭 | 0.5949 | 0.5954 | 0.5954 |
| 北戴河 | 0.2766 | 0.2764 | 0.2764 |
| 桂林 | 0.1285 | 0.1283 | 0.1283 |

| | 指标权重 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|----|------|--------|--------|--------|
| 景色 | | 0.5954 | 0.2764 | 0.1283 |
| 花费 | | | | |
| 居住 | | | | |
| 饮食 | | | | |
| 交通 | | | | |

代码演示 (代码的详解在后续的视频)

| | 景色 | 花费 | 居住 | 饮食 | 交通 |
|----|-----|-----|----|-----|-----|
| 景色 | 1 | 1/2 | 4 | 3 | 3 |
| 花费 | 2 | 1 | 7 | 5 | 5 |
| 居住 | 1/4 | 1/7 | 1 | 1/2 | 1/3 |
| 饮食 | 1/3 | 1/5 | 2 | 1 | 1 |
| 交通 | 1/3 | 1/5 | 3 | 1 | 1 |

求左边这个判断矩阵的权重

代码文件名称: ccfx.m

| | 算术平均法 | 几何平均法 | 特征值法 |
|----|--------|--------|--------|
| 景色 | 0.2623 | 0.2636 | 0.2636 |
| 花费 | 0.4744 | 0.4773 | 0.4758 |
| 居住 | 0.0545 | 0.0531 | 0.0538 |
| 饮食 | 0.0985 | 0.0988 | 0.0981 |
| 交通 | 0.1103 | 0.1072 | 0.1087 |

| | 算术平均法 | 几何平均法 | 特征值法 |
|----|--------|--------|--------|
| 景色 | 0.2623 | 0.2636 | 0.2636 |
| 花费 | 0.4744 | 0.4773 | 0.4758 |
| 居住 | 0.0545 | 0.0531 | 0.0538 |
| 饮食 | 0.0985 | 0.0988 | 0.0981 |
| 交通 | 0.1103 | 0.1072 | 0.1087 |

| | 指标权重 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|----|--------|--------|--------|--------|
| 景色 | 0.2636 | 0.5954 | 0.2764 | 0.1283 |
| 花费 | 0.4758 | | | |
| 居住 | 0.0538 | | | |
| 饮食 | 0.0981 | | | |
| 交通 | 0.1087 | | | |

| 花费 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|-----|----|-------|-------|
| 苏杭 | 1 | $1/3$ | $1/8$ |
| 北戴河 | 3 | 1 | $1/3$ |
| 桂林 | 8 | 3 | 1 |

| 饮食 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|-----|-------|-----|----|
| 苏杭 | 1 | 3 | 4 |
| 北戴河 | $1/3$ | 1 | 1 |
| 桂林 | $1/4$ | 1 | 1 |

| 居住 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|-----|-------|-------|----|
| 苏杭 | 1 | 1 | 3 |
| 北戴河 | 1 | 1 | 3 |
| 桂林 | $1/3$ | $1/3$ | 1 |

| 交通 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|-----|----|-----|-------|
| 苏杭 | 1 | 1 | $1/4$ |
| 北戴河 | 1 | 1 | $1/4$ |
| 桂林 | 4 | 4 | 1 |

汇总结果得到权重矩阵

我们可以得到使用特征值法求得的权重矩阵, 根据此矩阵, 我们可以计算出每个旅游景点的得分。

| | 指标权重 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|----|--------|--------|--------|--------|
| 景色 | 0.2636 | 0.5954 | 0.2764 | 0.1283 |
| 花费 | 0.4758 | 0.0819 | 0.2363 | 0.6817 |
| 居住 | 0.0538 | 0.4286 | 0.4286 | 0.1429 |
| 饮食 | 0.0981 | 0.6337 | 0.1919 | 0.1744 |
| 交通 | 0.1087 | 0.1667 | 0.1667 | 0.6667 |

计算各方案的得分

| | 指标权重 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|----|--------|--------|--------|--------|
| 景色 | 0.2636 | 0.5954 | 0.2764 | 0.1283 |
| 花费 | 0.4758 | 0.0819 | 0.2363 | 0.6817 |
| 居住 | 0.0538 | 0.4286 | 0.4286 | 0.1429 |
| 饮食 | 0.0981 | 0.6337 | 0.1919 | 0.1744 |
| 交通 | 0.1087 | 0.1667 | 0.1667 | 0.6667 |

苏杭得分: $0.5954 \times 0.2636 + 0.0819 \times 0.4758 + 0.4286 \times 0.0538 +$
 $0.6337 \times 0.0981 + 0.1667 \times 0.1087 = 0.299$

类似的, 我们可以得到北戴河得分为0.245,
桂林得分为0.455.
因此最佳的旅游景点是桂林。

这里用EXCEL计算可大大减轻工作量哦。
文件: 根据权重矩阵计算得分.xlsx

要点: F4可以锁定单元格

层次分析法

层次分析法 (The Analytic Hierarchy Process即 AHP)是由美国运筹学家、匹兹堡大学教授T. L. Saaty于20世纪70年代创立的一种系统分析与决策的综合评价方法, 是在充分研究了人类思维过程的基础上提出来的, 它较合理地解决了定性问题定量化的处理过程。

AHP的主要特点是通过建立递阶层次结构, 把人类的判断转化到若干因素两两之间重要度的比较上, 从而把难于量化的定性判断转化为可操作的重要度的比较上面。在许多情况下, 决策者可以直接使用AHP进行决策, 极大地提高了决策的有效性、可靠性和可行性, 但其本质是一种思维方式, 它把复杂问题分解成多个组成因素, 又将这些因素按支配关系分别形成递阶层次结构, 通过两两比较的方法确定决策方案相对重要度的总排序。整个过程体现了人类决策思维的基本特征, 即分解、判断、综合, 克服了其他方法回避决策者主观判断的缺点。

三个问题对我们的启发

填好志愿后, 小明同学想出去旅游。在查阅了网上的攻略后, 他初步选择了苏杭、北戴河和桂林三地之一作为目标景点。

请你确定评价指标、形成评价体系来为小明同学选择最佳的方案。

解决评价类问题, 大家首先要想到以下三个问题:

① 我们评价的**目标**是什么?

答: 为小明同学选择最佳的旅游景点。

② 我们为了达到这个目标有哪几种可选的**方案**?

答: 三种, 分别是去苏杭、去北戴河和去桂林。

③ 评价的**准则**或者说指标是什么? (我们根据什么东西来评价好坏)

答: 景色、花费、居住、饮食、交通。

层次分析法第一步

1.分析系统中各因素之间的关系, 建立系统的递阶**层次结构**.

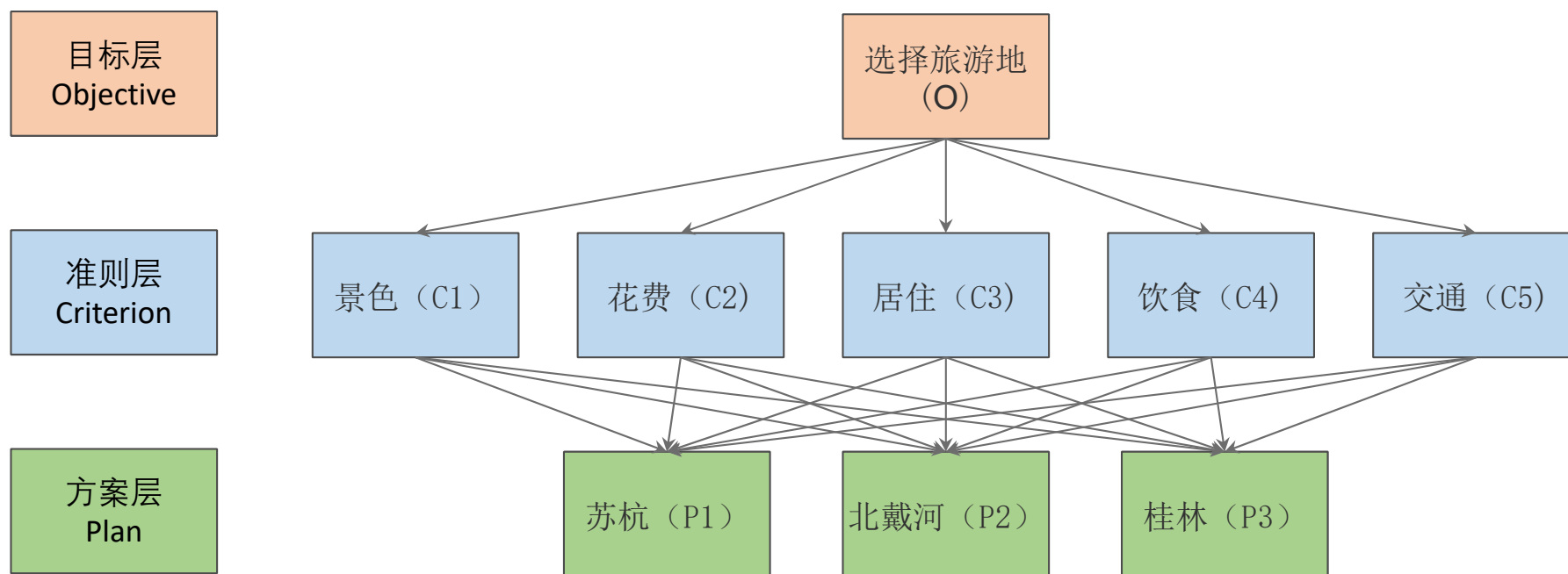


图1.1.旅游地选择层次结构图

注意: 如果你用到了层次分析法, 那么这个层次结构图要放在你的建模论文中哦。

使用SmartArt生成

选择最佳旅游地(O)

景色 (C1)

花费 (C2)

居住 (C3)

饮食 (C4)

交通 (C5)

苏杭 (P1)

北戴河 (P2)

去桂林 (P3)



使用专业软件: 亿图图示

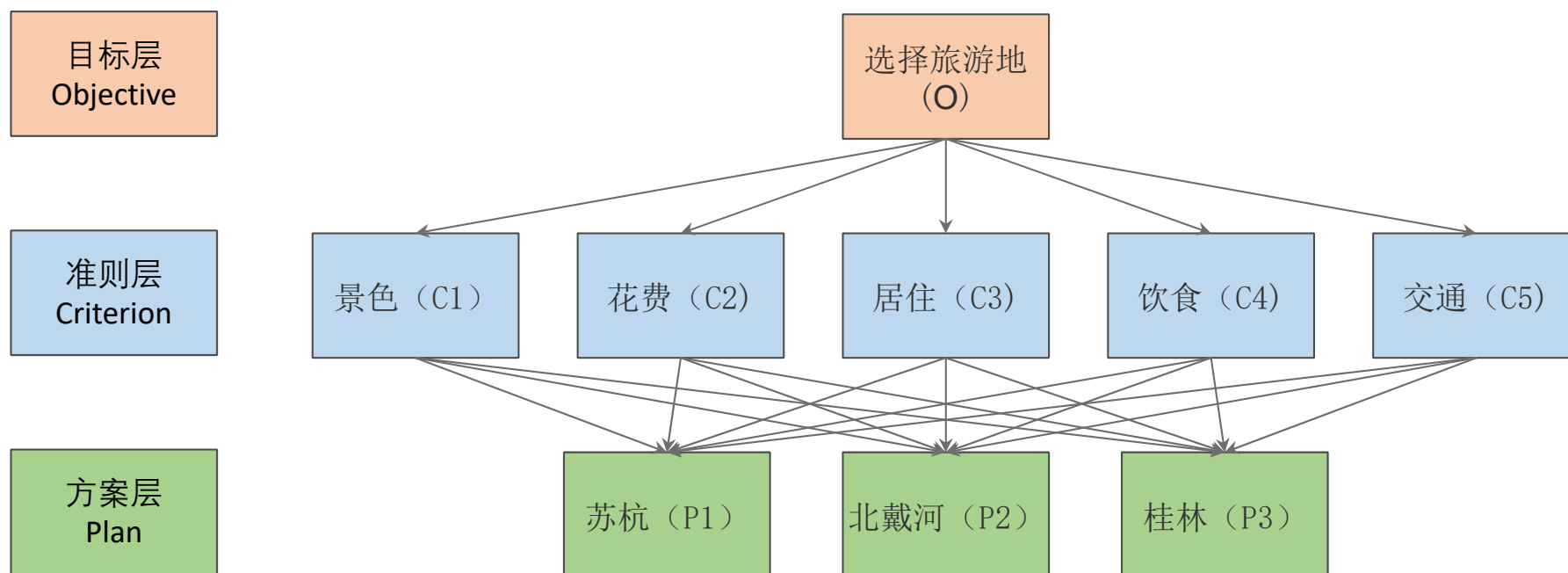
简单演示:

注: 同类型的软件如Visio也是可以的~
如果不想下载软件, 可以使用在线的ProcessOn, 也很方便。

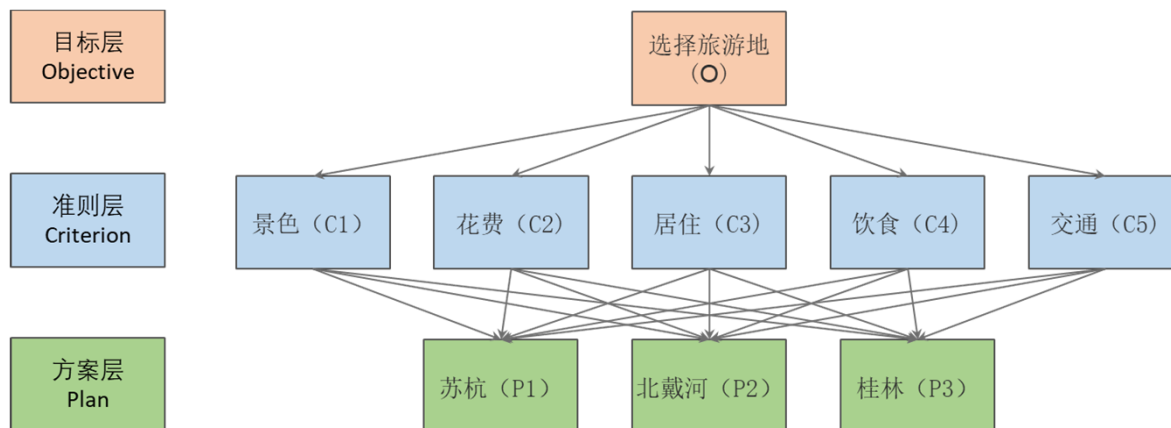
- (1) 新建组织结构图——自定义组织结构图
- (2) 1个长方形方格, 并复制出8个和它同大小的长方形
- (3) 将这9个长方形排成3行 (1+5+3)
- (4) 使用对齐和分布这两个功能让它们排列的有序
- (5) 选择文本工具, 在这些长方形里面输入文字
- (6) 使用箭头连接线工具中的直线连接上这些长方形
- (7) 保存后选择文件——导出&发送——Word
- (8) 将Word中的图像复制到你的论文中即可, 别忘了加上标题。

层次分析法第二步

2. 对于同一层次各元素关于上一层次中某一准则的重要性进行两两比较, 构造两两比较矩阵 (判断矩阵)。



构造判断矩阵



| O | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 |
|----|-----|-----|----|-----|-----|
| C1 | 1 | 1/2 | 4 | 3 | 3 |
| C2 | 2 | 1 | 7 | 5 | 5 |
| C3 | 1/4 | 1/7 | 1 | 1/2 | 1/3 |
| C4 | 1/3 | 1/5 | 2 | 1 | 1 |
| C5 | 1/3 | 1/5 | 3 | 1 | 1 |

左边这个矩阵的名称是：
判断矩阵O — C

任何评价类模型都具有主观性：
理想：采用专家群体判断
现实：几乎都是自己填的

看看优秀论文的做法吧

4.1.2 层次分析法求出各个影响因素的权重

注意: 箭头一般是朝下标。
他的画法有点问题哦~

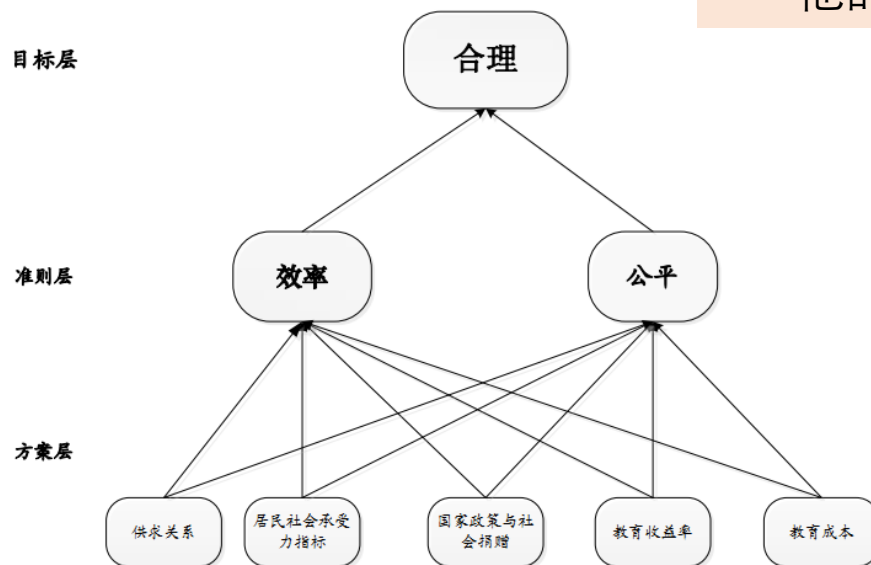


图6 层次分析法示意图

层次分析法是一种定性分析和定量计算相结合的方法, 首先构造因素间的成对比较矩阵

效率与公平比较矩阵 m_0 =

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

权重向量 $\omega_0=[0.75 \quad 0.25]$

【2008年国赛B题一等奖】关于高等教育学费标准的评价及建议

看看优秀论文的做法吧

1) 建立层次结构模型。

将决策问题分解为三个层次, 最上层为目标层 M, 即选择最合适的评价开放小区对周边道路通行的影响的关键指标; 最下层为方案层, 即九个影响因素 P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9; 中间层为准则层, 包括通行能力 C1、安全性 C2、便捷度 C3 三个指标 (如图 1 所示):

目标层 M

准则层 C

方案层 P

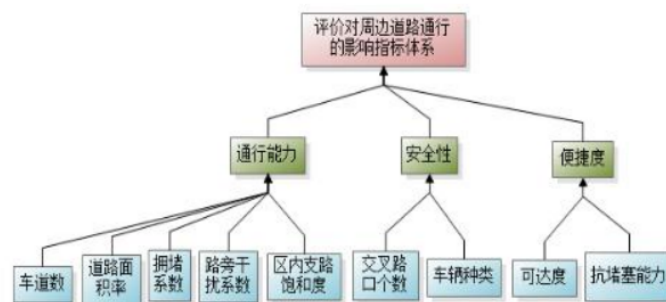


图 1 层次分析图示

2) 模型求解。

①构造判断矩阵 M-C: 将基准层 C 中三个元素 C1, C2, C3 两两比较, 得成对比较矩阵。

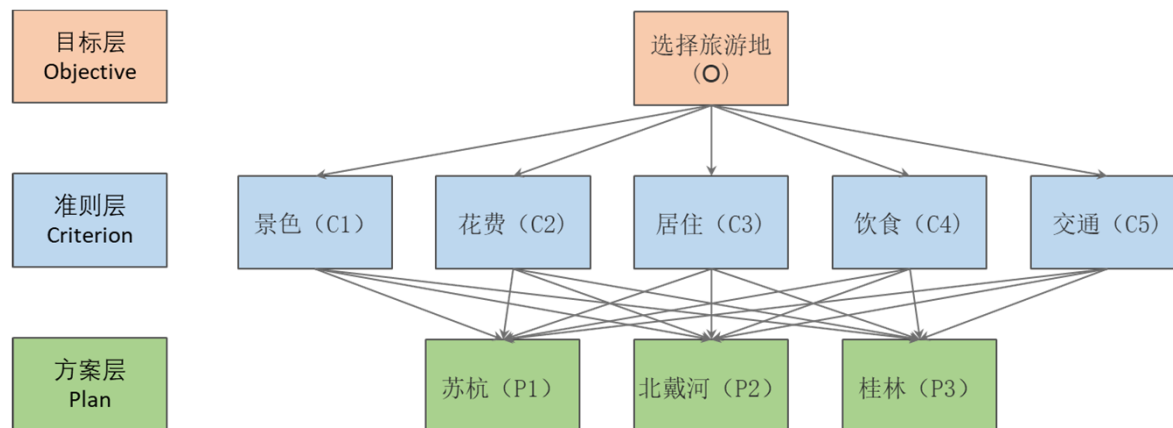
| M | C ₁ | C ₂ | C ₃ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| C ₁ | 1.0000 | 3.0000 | 4.0000 |
| C ₂ | 0.3333 | 1.0000 | 2.0000 |
| C ₃ | 0.2500 | 0.5000 | 1.0000 |

表 1 比较矩阵

求解 M-C 的特征值, 易解得 $\lambda_{\max} = 3.0184$, 且权重向量 $\omega_i = (0.6250, 0.2385, 0.1365)^T$,

由公式 $CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$, 于是根据 $CR = \frac{CI}{RI}$, 计算得到 $CR = 0.0176 < 0.1$, 通过了一致性检验。

[2016年国赛MATLAB创新奖B题]中国人民大学-小区开放道路通行影响



| C1 | P1 | P2 | P3 |
|-----------|-----|-----|----|
| P1 | 1 | 2 | 4 |
| P2 | 1/2 | 1 | 2 |
| P3 | 1/4 | 1/2 | 1 |

判断矩阵C1-P

| C2 | P1 | P2 | P3 |
|-----------|----|-----|-----|
| P1 | 1 | 1/3 | 1/8 |
| P2 | 3 | 1 | 1/3 |
| P3 | 8 | 3 | 1 |

判断矩阵C2-P

| C3 | P1 | P2 | P3 |
|-----------|-----|-----|----|
| P1 | 1 | 1 | 3 |
| P2 | 1 | 1 | 3 |
| P3 | 1/3 | 1/3 | 1 |

判断矩阵C3-P

| C4 | P1 | P2 | P3 |
|-----------|-----|----|----|
| P1 | 1 | 3 | 4 |
| P2 | 1/3 | 1 | 1 |
| P3 | 1/4 | 1 | 1 |

判断矩阵C4-P

| C5 | P1 | P2 | P3 |
|-----------|----|----|-----|
| P1 | 1 | 1 | 1/4 |
| P2 | 1 | 1 | 1/4 |
| P3 | 4 | 4 | 1 |

判断矩阵C5-P

准则层—方案层的判断矩阵的数值要结合实际来填写, 如果题目中有其他数据, 可以考虑利用这些数据计算。

例如: 有一个指标是交通安全程度, 现在要比较开放小区、半开放小区和封闭小区, 而且你收集到了这些小区车流量的数据, 那么就可以根据这个数据进行换算作为你的判断矩阵。

层次分析法第三步

3. 由判断矩阵计算被比较元素对于该准则的相对权重, 并进行一致性检验 (检验通过权重才能用) .

三种方法计算权重:

(1) 算术平均法 (2) 几何平均法 (3) 特征值法



你懂我意思吧

强烈建议大家在比赛时三种方法都使用:

以往的论文利用层次分析法解决实际问题时, 都是采用其中某一种方法求权重, 而不同的计算方法可能会导致结果有所偏差。为了保证结果的**稳健性**, 本文采用了三种方法分别求出了权重后计算平均值, 再根据得到的权重矩阵计算各方案的得分, 并进行排序和综合分析, 这样避免了采用单一方法所产生的偏差, 得出的结论将更全面、更有效。

注: (1) 一致矩阵不需要进行一致性检验, 只有非一致矩阵的判断矩阵才需要进行一致性检验; (2) 在论文写作中, 应该先进行一致性检验, 通过检验后再计算权重, 视频中讲解的只是为了顺应计算过程。

一致性检验的步骤

第一步: 计算**一致性指标CI**

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

第二步: 查找对应的**平均随机一致性指标RI**

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|------|---|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| RI | 0 | 0 | 0.52 | 0.89 | 1.12 | 1.26 | 1.36 | 1.41 | 1.46 | 1.49 | 1.52 | 1.54 | 1.56 | 1.58 | 1.59 |

注: 在实际运用中, n 很少超过10, 如果指标的个数大于10, 则可考虑建立二级指标体系, 或使用我们以后要学习的模糊综合评价模型。

第三步: 计算**一致性比例CR**

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

如果 $CR < 0.1$, 则可认为判断矩阵的一致性可以接受; 否则需要对判断矩阵进行修正。

注: 特征值可用matlab软件进行计算, 没学过线性代数的同学也不需要担心。如果特征值中有虚数, 则比较的是特征值的模长。

CR > 0.1 如何修正?

| 景色 | 苏杭A | 北戴河B | 桂林C |
|------|-----|------|-----|
| 苏杭A | 1 | 2 | 1 |
| 北戴河B | 1/2 | 1 | 2 |
| 桂林C | 1 | 1/2 | 1 |

一致性指标CI=
0.1087

一致性比例CR=
0.2090

注意: CR >= 0.10, 因此该判断矩阵A需要进行修改!

往一致矩阵上调整~~~
一致矩阵各行成倍数关系



层次分析法第四步

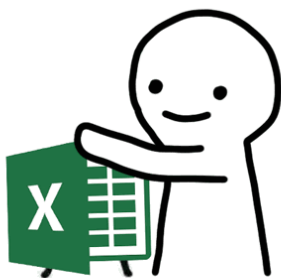
4. 根据权重矩阵计算得分, 并进行排序。

| | 指标权重 | 方案1 | 方案2 | |
|-------|------|-----|-----|-------|
| 指标1 | | | | |
| 指标2 | | | | |
| 指标3 | | | | |
| | | | | |

权重矩阵

| | 指标权重 | 苏杭 | 北戴河 | 桂林 |
|----|--------|--------|--------|--------|
| 景色 | 0.2636 | 0.5954 | 0.2764 | 0.1283 |
| 花费 | 0.4758 | 0.0819 | 0.2363 | 0.6817 |
| 居住 | 0.0538 | 0.4286 | 0.4286 | 0.1429 |
| 饮食 | 0.0981 | 0.6337 | 0.1919 | 0.1744 |
| 交通 | 0.1087 | 0.1667 | 0.1667 | 0.6667 |

$$0.5954 \times 0.2636 + 0.0819 \times 0.4758 + 0.4286 \times 0.0538 + 0.6337 \times 0.0981 + 0.1667 \times 0.1087 = 0.299$$



Excel, 你是个成熟的软件了
该学会自己统计数据了

层次分析法的一些局限性

(1) 评价的决策层不能太多, 太多的话 n 会很大, 判断矩阵和一致矩阵差异可能会很大。

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|------|---|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| RI | 0 | 0 | 0.52 | 0.89 | 1.12 | 1.26 | 1.36 | 1.41 | 1.46 | 1.49 | 1.52 | 1.54 | 1.56 | 1.58 | 1.59 |

平均随机一致性指标 RI 的表格中 n 最多是15。

(2) 如果决策层中指标的数据是已知的, 那么我们如何利用这些数据来使得评价的更加准确呢?

| 学生 | 加权成绩 | 工时数 | 课外竞赛得分 |
|-------|-------|-------|--------|
| 蒋虹 | 89.7 | 32 | 5 |
| 时迎春 | 86.5 | 20 | 4 |
| | | | |
| 陶访枫 | 87.9 | 12 | 9 |
| 梁冷安 | 90.1 | 10 | 6 |
| 姜秀芳 | 82.6 | 12 | 3 |

2

代码详解



乖, 听话

温馨提示

代码讲解部分针对的是Matlab新手哦~
如果你Matlab已经学的很不错, 可以跳过这部分哦, 直接看代码即可。

文件: ccfx_base.m和ccfx_Learn.m

本节代码部分知识点索引

1. Matlab基本的小常识

分号的作用、注释的快捷键、clc和clear、disp和input

2. sum函数

3. Matlab中如何提取矩阵中指定位置的元素?

4. size函数

5. repmat函数

6. Matlab中矩阵的运算(加点和不加点)

7. Matlab中求特征值和特征向量

8. find函数的基本用法

9. 矩阵与常数的大小判断运算

10. 判断和循环语句

3

模型拓展

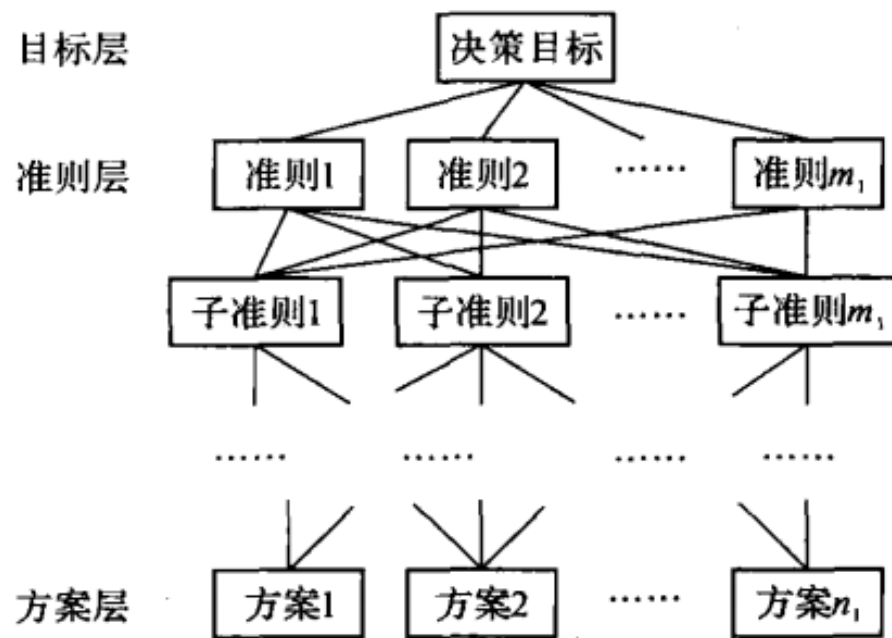


图 3.1 层次分析法框架图

1. 从上到下顺序地存在支配关系,并用直线段表示. 除目标层外,每个元素至少受上一层一个元素支配. 除最后一层外,每个元素至少支配下一层次一个元素,上下层元素的联系比同一层次强,以避免同一层次中不相邻元素存在支配关系;
2. 整个结构中,层数不受限制;
3. 最高层只有一个元素,每一个元素所支配的元素一般不超过 9 个,元素过多时可进一步分组;

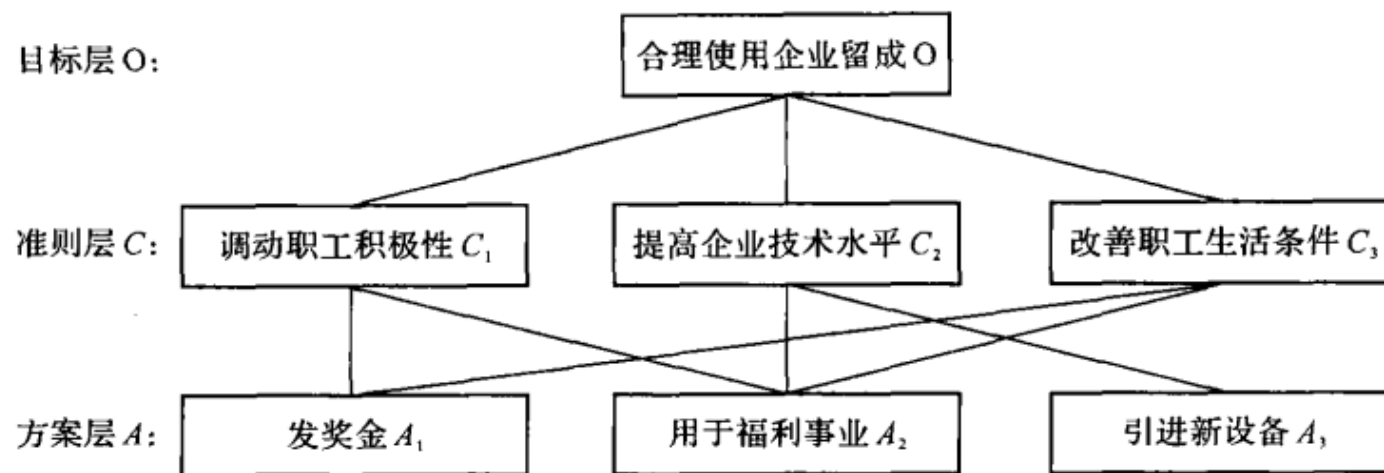


图 3.2 企业资金分配层次结构图

企业资金分配问题.pdf

表 3 太阳镜产品质量评价体系结构

| 目标层 | 准则层 | 方案层 |
|-------------------|----------------------|-----------------------------|
| 太阳镜 产品 质量 A | 外观与结构 B ₁ | 镜片材料和表面质量 C ₁ |
| | | 镜架外观质量 C ₂ |
| | | 装配精度和整形要求 C ₃ |
| | 透射性能 B ₂ | 可见光透射比 C ₄ |
| | | 光透射比相对偏差 C ₅ |
| | | 平均透射比(紫外光谱区) C ₆ |
| | | 色极限 C ₇ |
| | | 交通讯号透射比 C ₈ |
| | 光学性能 B ₃ | 球镜顶焦度偏差 C ₉ |
| | | 柱镜顶焦度偏差 C ₁₀ |
| | | 棱镜度偏差 C ₁₁ |
| | 安全性能 B ₄ | 抗冲击性能 C ₁₂ |
| | | 阻燃性 C ₁₃ |
| | 耐久性能 B ₅ | 耐疲劳 C ₁₄ |
| | | 抗汗腐蚀 C ₁₅ |
| | | 高温尺寸稳定性 C ₁₆ |
| | 力学性能 B ₆ | 抗拉性能 C ₁₇ |
| | | 鼻梁变形 C ₁₈ |
| | | 镜片夹持力 C ₁₉ |
| | | 镀层结合力 C ₂₀ |

注：在更新的视频中会讲解这种结构的层次分析法。

- ▶ 更新1_第5部分_用EXCEL绘制统计图_散点图.ev1
- ▶ 更新1_第6部分_用EXCEL绘制统计图_箱线图.ev1
- ▶ 更新2_第1部分_了解_因子分析理论部分.ev1
- ▶ 更新2_第2部分_重要_因子分析例题讲解.ev1
- ▶ 更新3_一个比较重要的层次分析法作业讲解.ev1
- ▶ 更新4_第1部分_岭回归和Lasso回归的基础_OLS回归的矩阵推导.ev1
- ▶ 更新4_第2部分_岭回归和Lasso回归的原理.ev1
- ▶ 更新4_第3部分_应用_利用Stata进行变量筛选.ev1

层次分析法在太阳镜产品质量评价中的应用 .pdf

4

课后练习

课后训练

代码优化:

- (1) 请对代码进行优化, 例如输入判断矩阵 A 时, 是否能自动检查矩阵 A 为正互反矩阵?
- (2) 如果我们输入的是一个二阶的判断矩阵, 请观察结果有什么问题? 怎么改进代码来修正这个问题。(提示: 二阶判断矩阵一定是一致矩阵)

论文写作训练:

你要购置一台个人电脑, 考虑功能、价格等的因素, 如何作出决策.

为大学毕业的青年建立一个选择志愿的层次结构模型.

你的家乡准备集资兴办一座小型饲养场, 是养猪, 还是养鸡、养鸭、养兔…….

从上面三个题目中选择一个完成一篇论文。

题目来源: 姜启源《数学建模》第四版

也可以自选题目, 你感兴趣的评价类问题都行。

下一讲预告: TOPSIS法

题目: 评价下表中20条河流的水质情况。

注: 含氧量越高越好; PH值越接近7越好; 细菌总数越少越好; 植物性营养物量介于10-20之间最佳, 超过20或低于10均不好。

| 河流 | 含氧量 (ppm) | PH值 | 细菌总数(个/mL) | 植物性营养物量 (ppm) |
|----|-----------|------|------------|---------------|
| A | 4.69 | 6.59 | 51 | 11.94 |
| B | 2.03 | 7.86 | 19 | 6.46 |
| C | 9.11 | 6.31 | 46 | 8.91 |
| D | 8.61 | 7.05 | 46 | 26.43 |
| E | 7.13 | 6.5 | 50 | 23.57 |
| F | 2.39 | 6.77 | 38 | 24.62 |
| G | 7.69 | 6.79 | 38 | 6.01 |
| H | 9.3 | 6.81 | 27 | 31.57 |
| I | 5.45 | 7.62 | 5 | 18.46 |
| J | 6.19 | 7.27 | 17 | 7.51 |
| K | 7.93 | 7.53 | 9 | 6.52 |
| L | 4.4 | 7.28 | 17 | 25.3 |
| M | 7.46 | 8.24 | 23 | 14.42 |
| N | 2.01 | 5.55 | 47 | 26.31 |
| O | 2.04 | 6.4 | 23 | 17.91 |
| P | 7.73 | 6.14 | 52 | 15.72 |
| Q | 6.35 | 7.58 | 25 | 29.46 |
| R | 8.29 | 8.41 | 39 | 12.02 |
| S | 3.54 | 7.27 | 54 | 3.16 |
| T | 7.44 | 6.26 | 8 | 28.41 |

注: 数据是我随手编的, 仅用于讲解相应的算法, 可能有不合理之处, 请见谅。

