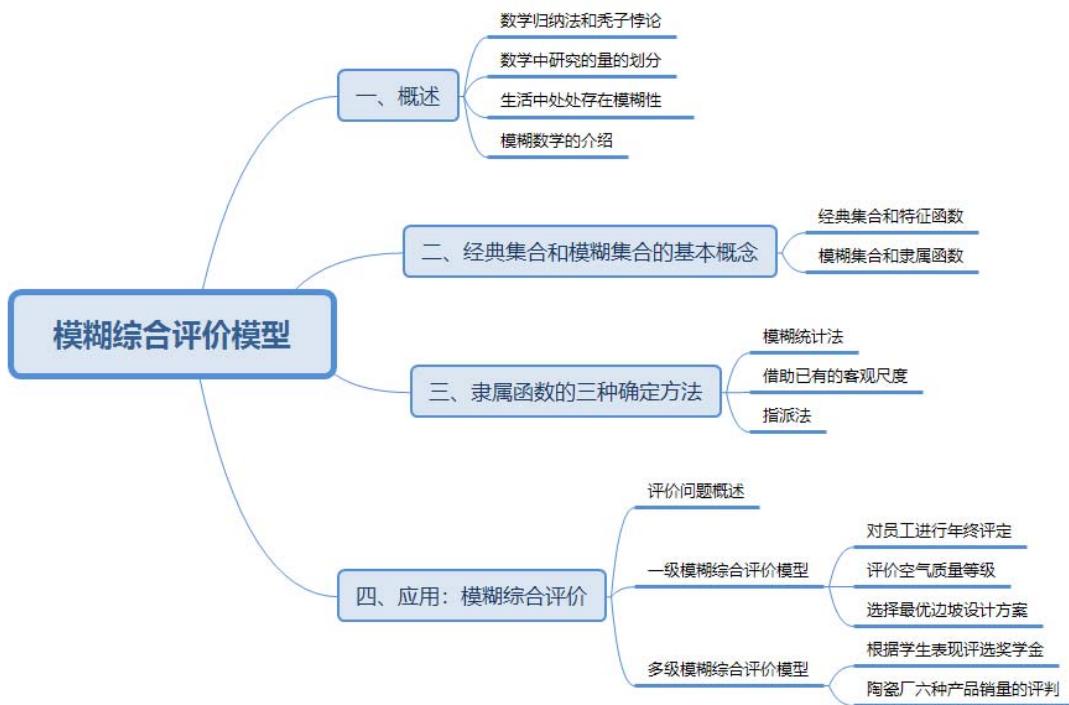


模糊综合评价模型



(1) 视频中提到的附件可在[售后群的群文件](#)中下载。

包括讲义、代码、我视频中推荐的资料等。

- 拓展资料(暂时不需要下载，视频中用到了再来下载)
- 赠品(有需要的同学可以下载)
- 播放器和帮助文档(进群后先下载帮助文档观看)
- 上课用的课件和代码(下载后记得解压，所有视频配套的都在里面)
- 免费更新的视频_下载后解压了才能用播放器打开

(2) 关注我的[微信公众号《数学建模学习交流》](#)，后台发送“[软件](#)”两个字，可获得常见的建模软件下载方法；发送“[数据](#)”两个字，可获得建模数据的获取方法；发送“[画图](#)”两个字，可获得数学建模中常见的画图方法。另外，也可以看看公众号的历史文章，里面发布的都是对大家有帮助的技巧。

(3) [购买更多优质精选的数学建模资料](#)，可关注我的微信公众号《数学建模学习交流》，在后台发送“[买](#)”这个字即可进入店铺进行购买。

(4) 视频价格不贵，但价值很高。单人购买观看只需要 [58 元](#)，和另外两名队友一起购买人均仅需 [46 元](#)，视频本身也是下载到本地观看的，所以请大家[不要侵犯知识产权](#)，对视频或者资料进行二次销售。

模糊综合评价模型

一、概述

(1) 数学归纳法 和 兔子悖论 (Bei)

① $n=1$ 时，成立； ② 假设 $n=k$ 时成立，验证 $n=k+1$ 也成立 \Rightarrow 对于所有的 n 都成立

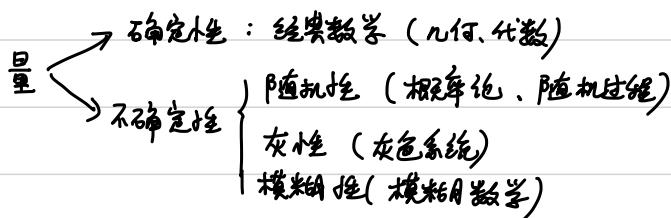
清风老师  → 端头秀发

①减少一根，不是兔子 ②假设减少 k 根不是兔子，那么减少 $k+1$ 根也不是兔子 \Rightarrow ③ 不是兔子

怎么解释：

文学: 压死骆驼的最后一根稻草 **哲学**: 量变引起质变 **数学**: 引入模糊的概念

(2) 数学中研究的量的划分



(3) 生活中处处存在模糊性 (和确定性相对)

确定性概念：性别、天气、年龄、身高、体重 ...

模糊性概念：帅、高、白、年轻



(4) 模糊数学的介绍

1965年美国控制论专家 L.A. Zadeh 发表的论文 "Fuzzy sets" 标志着模糊数学的诞生。

[fʌzi]

模糊数学又称 Fuzzy 数学，是研究和处理模糊性现象的一种数学理论和方法。模糊性数学发展的主流是在它的应用方面。

由于模糊性概念已经找到了模糊集的描述方式，人们运用概念进行判断、评价、推理、决策和控制的过程也可以用模糊性数学的方法来描述。例如模糊聚类分析、模糊模式识别、模糊综合评判、模糊决策与模糊预测、模糊控制、模糊信息处理等。这些方法构成了一种模糊性系统理论，构成了一种思辨数学的雏形，它已经在医学、气象、心理、经济管理、石油、地质、环境、生物、农业、林业、化工、语言、控制、遥感、教育、体育等方面取得具体的研究成果。



二. 经典集合和模糊集合的基本概念

(1) 经典集合(classical set) 和特征函数

(a) 集合：具有相同属性的事物的集体，例如：颜色、性别、手机号牌、自然数集

(b) 集合的基本属性：① 若 $a \in A$, $b \in A$, 则 $a \neq b$, 互斥性 ② $a \in A$ 和 $a \notin A$ 有且仅有之一发生 (非此即彼), 确定性

(c) 数学中对于经典集合的刻画：特征函数 (characteristic function)

$f_A: U \rightarrow \{0, 1\}$ U : 宇域 (我们感兴趣的一些对象的集合)。 f_A 表示 A 集合的特征函数。

举个例子： $A = \{60, 61, \dots, 100\}$ (成绩及格的集合) $f_A = \begin{cases} 1 & \text{成绩} \geq 60 \\ 0 & \text{成绩} < 60 \end{cases}$ U 是全班成绩的一个集合 $\{68, 77, \dots, 40\}$

$f_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}, \forall x \in U$ (注： U 可看作定义域, $\{0, 1\}$ 可视为值域)

(2) 模糊集合(fuzzy set) 和隶属函数

(a) 模糊集合：用来描述模糊性概念的集合 (帅、高、白、年轻)

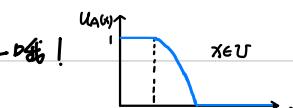
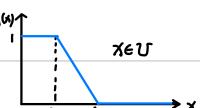
(b) 与经典集合相比，模糊集合承认 亦此亦彼。

(c) 数学中对于模糊集合的刻画：隶属函数 (membership function) A : 模糊集合

$U_A: U \rightarrow [0, 1]$ (注意与 $\{0, 1\}$ 的区别, $\{0, 1\}$ 中只有 0 和 1 两个元素, $[0, 1]$ 中有无数种可能)

$A = \text{"年轻"}$ (年轻是一个模糊概念)、 $U = (0, 150)$ 表示年龄的集合

$$U_A(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 20 \\ \frac{40-x}{20} & 20 \leq x \leq 40 \\ 0 & 40 < x < 150 \end{cases}$$



对于 U 中每个元素，均对应于 A 中的一个隶属度，隶属度介于 $[0, 1]$ ，越大表示越属于这种集合。

注：若对于一个模糊集合 A 我们给定了一个隶属函数 U_A ，则我们可以将 A 和 U_A 视为等同。(方便符号表示，即 $A(x) = U_A(x)$)

(d) 模糊集合的三种表示方法

论域 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 模糊集合为 A , 隶属度为 $A(x_i)$, $i=1, 2, \dots, n$

① Zadeh 表示法 (扎德表示法) $A = \frac{A(x_1)}{x_1} + \frac{A(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{A(x_n)}{x_n}$ \Rightarrow 千万别理解为了加法哦！只是一种记法而已。

② 序偶表示法 $A = \{(x_1, A(x_1)), (x_2, A(x_2)), \dots, (x_n, A(x_n))\}$ (方便论域 U 为无限集合的表示)

③ 向量表示法 $A = \{A(x_1), A(x_2), \dots, A(x_n)\}$

例：现在有四个人：清风、小明、小王、小红，其可爱程度分别为 0.9、0.6、0.7、0.8，试用模糊集合对其进行表示。

解： $U = \{\text{清风, 小明, 小王, 小红}\}$, $A = \text{可爱程度}$, $U_A(\text{清风}) = 0.9$ (简记为 $A(\text{清风}) = 0.9$), $U_A(\text{小明}) = 0.6$, $U_A(\text{小王}) = 0.7$, $U_A(\text{小红}) = 0.8$

$$(1) A = \frac{0.9}{\text{清风}} + \frac{0.6}{\text{小明}} + \frac{0.7}{\text{小王}} + \frac{0.8}{\text{小红}}$$

$$(2) A = \{(清风, 0.9), (小明, 0.6), (小王, 0.7), (小红, 0.8)\}$$

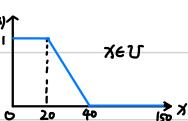
$$(3) A = \{0.9, 0.6, 0.7, 0.8\}$$

特别的，当论域 U 为无限集合时， $A = \int_{x \in U} \frac{u_A(x)}{x}$ (用积分符号来表示)

A = “年轻” (年轻是一个模糊概念)、 $U = (0, 150)$ 表示年龄的集合

工科研究生教材·数学系列

$$u_A(x) = \begin{cases} 1 & , 0 < x < 20 \\ \frac{40-x}{20} & , 20 \leq x \leq 40 \\ 0 & , 40 < x < 150 \end{cases}$$



$$\text{则 } A = \int_{x \in (0, 20]} \frac{1}{x} + \int_{x \in [20, 40]} \frac{40-x}{x} + \int_{x \in (40, 150)} 0$$

模糊数学原理及应用

MΟΗU SHUXUE YUANLI JI YINGYONG

第五版

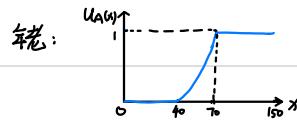
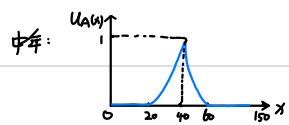
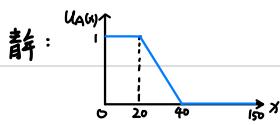
杨纶标 高英仪 凌卫新 编著

(e) 模糊集合的分类

一般的，我们可以将模糊集合分为三类

偏小型：年轻、小、冷
 中间型：中年、中、暖
 偏大型：年老、大、热

可以想象，隶属函数的图象会和模糊集合的类型有很大关系。



华南理工大学出版社

三. 隶属函数的三种确定方法

(1) 模糊概念估价 (数据比赛中很少用, 要设计发放问卷, 可能来不及, 但实际做研究用的较多)

原理: 找多人去对同一个模糊概念进行描述, 用隶属频率去定义隶属度。

例子: 定义“年轻人”的隶属函数

- ① 定义人的年龄为论域 Γ , 调查 n 个人
- ② 让这 n 个人仔细考虑如“年轻人”的含义后, 给出他们认为的最合适的年龄区间
- ③ 对于任意一个确定的年龄, 例如 25 岁, 若这 n 个人中有 m 个人的年龄区间包含有 25, 则称 $\frac{m}{n}$ 为 25 岁对于“年轻人”的隶属频率
- ④ 依此类推, 我们可以找出所有年龄对于“年轻人”的隶属频率
- ⑤ 若 n 很大时, 隶属频率会趋于稳定, 此时我们可将其视为隶属度, 进而得到隶属函数。

(2) 借助已有的客观尺度 (需要有合适的指标, 并能收集到数据)

| 论域 | 模糊集 | 隶属度 |
|----|------|-------|
| 设备 | 设备完好 | 设备完好率 |
| 产品 | 质量稳定 | 正品率 |
| 家庭 | 小康家庭 | 恩格尔系数 |

隶属度的范围

$$\uparrow \frac{x_i}{\sum x_i} (x_i \geq 0)$$

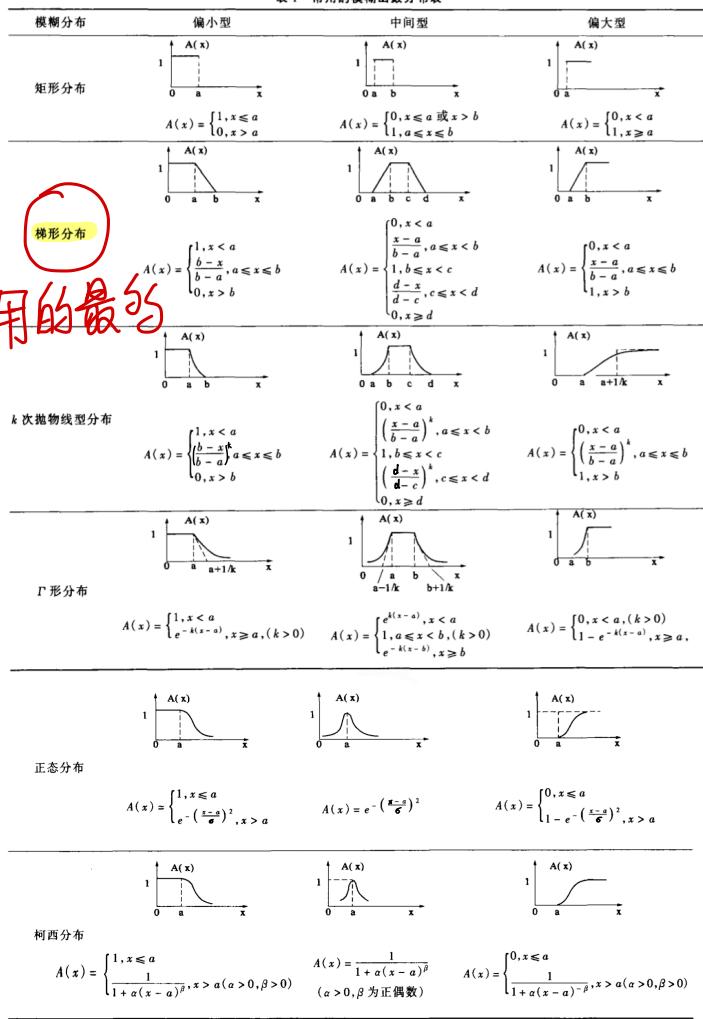
注: 这里我们找的指标必须介于 0 和 1 之间。(如果不是, 则可归一化)

恩格尔系数 (%) = 食品支出总额/家庭或个人消费支出总额 × 100%

随着家庭和个人收入增加, 收入中用于食品方面的支出比例将逐渐减小, 这一定律被称为恩格尔定律。

(3) 指派法 (根据问题的性质直接套用某些分布作为隶属函数, 主观性较强)

表 1 常用的模糊函数分布表



例 1. 试用柯西分布确定“年轻人”的隶属函数。

解: “年轻人”是偏小型, 对应的柯西分布为: $A(x) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ \frac{1}{1 + \alpha(x-a)^2}, & x > a \end{cases}$

显然, 这里面有三个未知参数: a 、 α 、 β

根据生活经验(或别人的研究成果、常识), 我们令 $a=20$, $A(30)=0.5$

注: $A(30)=0.5$ 是考虑到 40 岁一般是中年人, 而 $20-40$ 中间是 30, 其隶属度可设为 $\frac{1}{2}$ 。

同时, β 在指数部分, 我们一般倾向于简化模型, 则 β 可取 1 或者 2

例如: 当 $a=20$, $A(30)=0.5$, $\beta=2$ 时, 可解出 $\alpha=0.01$

例 2. 已知某一天 SO_2 的浓度为 $0.07 mg/m^3$, 大气污染物中关于 SO_2 的评价标准为:

| I 级 | II 级 | III 级 | IV 级 |
|------|------|-------|------|
| 0.05 | 0.15 | 0.25 | 0.50 |

级别的隶属度。

解: I 级为偏小型, II 级和 III 级为中间型, IV 级为偏大型

$$A_1 = \begin{cases} 1, & x \leq 0.05 \\ \frac{0.05-x}{0.15-0.05}, & 0.05 < x < 0.15 \\ 0, & x \geq 0.15 \end{cases} \quad A_2 = \begin{cases} 0, & x \leq 0.05 \\ \frac{x-0.05}{0.15-0.05}, & 0.05 \leq x \leq 0.15 \\ 1, & x \geq 0.15 \end{cases} \quad A_3 = \begin{cases} 0, & x \leq 0.15 \\ \frac{x-0.15}{0.25-0.15}, & 0.15 < x < 0.25 \\ 1, & x \geq 0.25 \end{cases} \quad A_4 = \begin{cases} 0, & x \leq 0.25 \\ \frac{0.25-x}{0.5-0.25}, & 0.25 < x < 0.5 \\ 1, & x \geq 0.5 \end{cases}$$

(等号在哪一边无所谓, 一般使用梯形分布最为简单)

$$A_1(0.07) = \frac{0.15-0.07}{0.15-0.05} = 0.8 \quad A_2(0.07) = \frac{0.07-0.05}{0.15-0.05} = 0.2$$

$$A_3(0.07) = A_4(0.07) = 0$$

四. 应用: 模糊综合评价(评判)

(1) 评价问题概述

①

②

模糊评价问题是要把论域中的对象对应评语集中一个指定的评语或者将方案作为评语集并选择一个最优的方案。(两个角度)

在模糊综合评价中,引入了三个集合:

$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 和论域一个符号
但表示的含义有很大差别

例如: 评价一名学生的表现

① 因素集(评估指标集) $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

$U = \{\text{专业排名}, \text{课外实践}, \text{志愿服务}, \text{竞赛成绩}\}$

② 评语集(评估的结果) $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$

$V = \{\text{优}, \text{良}, \text{差}\}$

③ 权重集(指标的权重) $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$A = \{0.5, 0.1, 0.1, 0.3\}$ 课外实践的权重为 0.1
这个集合中两个 0.1 不一样哦, 对应的指标不同

和集合一个符号, 别搞混了

完整的写法应该是: 专业排名的权重为 0.5

(2) 一级模糊综合评价模型

14.2.1 一级模糊综合评判在人事考核中的应用

在对企业员工进行考核时,由于考核的目的、考核对象、考核范围等的不同,考核的具体内容也会有所差别。有的考核涉及的指标较少,有些考核又包含了非常全面且丰富的内容,需要涉及很多指标。鉴于这种情况,企业可以根据需要,在指标个数较少的考核中,运用一级模糊综合评判,而在问题较为复杂、指标较多时,运用多层次模糊综合评判,以提高精度。

一级模糊综合评判模型的建立,主要包括以下步骤:

(1) 确定因素集。对员工的表现,需要从多个方面进行综合评判,如员工的工作业绩、工作态度、沟通能力、政治表现等。所有这些因素构成了评价指标体系集合,即因素集,记为

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}.$$

且指标间相关性不强。

(2) 确定评语集。由于每个指标的评价值的不同,往往形成不同的等级。如对工作业绩的评价有好、较好、中等、较差、很差等。由各种不同决断构成的集合称为评语集,记为

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}.$$

注意: 评语集中有 m 个元素哦!

(m 的大小与 n 无关)

(3) 确定各因素的权重。一般情况下,因素集中的各因素在综合评价中所起的作用是不相同的,综合评价结果不仅与各因素的评价有关,而且在很大程度上还依赖于各因素对综合评价所起的作用,这就需要确定一个各因素之间的权重分配,它是 U 上的一个模糊向量,记为

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_n],$$

德尔菲法,又称专家调查法。(征求专家意见后,再征求意见,直到意见统一为止。)

且指标间相关性不强。

式中: a_i 为第 i 个因素的权重,且满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。
漫听过 数据: 层次分析法

确定权重的方法很多,如 Delphi 法、加权平均法、众人评议法等。数据: 烧权法

※ (4) 确定模糊综合判断矩阵。对指标 u_i 来说,对各个评语的隶属度为 V 上的模糊子集。对指标 u_i 的评判记为

$$R_i = \begin{bmatrix} r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im} \\ r_{i2}, \dots, r_{im} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{in}, r_{i2}, \dots, r_{im} \end{bmatrix},$$

指标 u_i 对评语 1 的隶属度
指标 u_i 对评语 2 的隶属度

各指标的模糊综合判断矩阵为

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

它是一个从 U 到 V 的模糊关系矩阵。

(5) 综合评判。如果有从 U 到 V 的模糊关系 $R = (r_{ij})_{n \times m}$,那么利用 R 就可以得到一个模糊变换

$$T_R: F(U) \rightarrow F(V),$$

由此变换,就可得到综合评判结果 $B = A \cdot R$ 。
 $A_{1 \times n} \cdot R_{n \times m} = B_{1 \times m}$

综合后的评判可看作是 V 上的模糊向量,记为 $B = [b_1, b_2, \dots, b_m]$
要评价对象对评语 1 的隶属度
要评价对象对评语 2 的隶属度

若 $\max\{b_1, b_2, \dots, b_m\} = b_k$, 则要评价的对象要划归到评语 k 这一类。

例 14.2 某单位对员工的年终综合评定。

$\rightarrow n=4$

解 (1) 取因素集 $U = \{\text{政治表现 } u_1, \text{ 工作能力 } u_2, \text{ 工作态度 } u_3, \text{ 工作成绩 } u_4\}$ 。

$\rightarrow m=5$

(2) 取评语集 $V = \{\text{优秀 } v_1, \text{ 良好 } v_2, \text{ 一般 } v_3, \text{ 较差 } v_4, \text{ 差 } v_5\}$ 。

年終評定

(3) 确定各因素的权重 $A = [0.25, 0.2, 0.25, 0.3]$ 。

(4) 确定模糊综合评判矩阵,对每个因素 u_i 做出评价。

① u_1 比如由群众评议打分来确定:(注意,年終評定的员工一次只有一份)

$$R_1 = [0.1, 0.5, 0.4, 0.0].$$

上式表示,参与打分的群众中,有 10% 的人认为政治表现优秀,50% 的人认为政治表现良好,40% 的人认为政治表现一般,认为政治表现较差或差的人为 0。用同样方法对其他因素进行评价。

② u_2, u_3 由部门领导打分来确定:

$$R_2 = [0.2, 0.5, 0.2, 0.1, 0], R_3 = [0.2, 0.5, 0.3, 0, 0].$$

③ u_4 由单位考核组成员打分来确定:

$$R_4 = [0.2, 0.6, 0.2, 0, 0].$$

以 R_i 为第 i 行构成评价矩阵

$$R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) r_{ij} 与隶属度的计算方式有关

(2) $0 \leq r_{ij} \leq 1$

(3) 大小为 $n \times m$

n : 因素(指标)数目

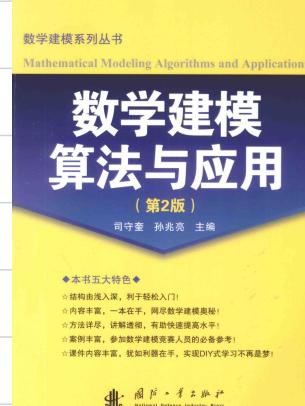
它是从因素集 U 到评语集 V 的一个模糊关系矩阵。(模糊综合判断矩阵)

(5) 模糊综合评判。进行矩阵合成运算:

$$B = A \cdot R = [0.25, 0.2, 0.25, 0.3] \cdot \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{隶属度} \\ \uparrow \\ \text{优秀} \quad \text{良好} \quad \text{一般} \quad \text{较差} \quad \text{差} \end{array} = [0.175, 0.53, 0.275, 0.02, 0].$$

(矩阵乘法)
取数值最大的评语作为综合评判结果,则评判结果为“良好”。



一级模糊综合评价模型实例：

应用举例

例1 空气质量 下表给出了大气污染物评价标准，

今测得某日某地表中这些污染物日均浓度依次为：

(0.07, 0.20, 0.12, 5.00, 0.08, 0.14)

与上一题相比，
这里给了实际
的数据来计算
隶属度。

各污染物权重确定如下：

(0.1, 0.2, 0.3, 0.3, 0.05, 0.05) = A
(权重集)

试评价当天空气质量等级。

| 表 大气污染物评价标准 mg/m³ | | | | | |
|-------------------|------|------|-------|-------|-------|
| 污染物 | 等 级 | | | | $m=4$ |
| | I 级 | II 级 | III 级 | IV 级 | |
| SO₂ | 0.05 | 0.15 | 0.25 | 0.50 | |
| TSP | 0.12 | 0.30 | 0.50 | 1.00 | |
| NO _x | 0.10 | 0.10 | 0.15 | 0.30 | |
| CO | 4.00 | 4.00 | 6.00 | 10.00 | |
| PM ₁₀ | 0.05 | 0.15 | 0.25 | 0.50 | |
| O ₃ | 0.12 | 0.16 | 0.20 | 0.40 | |

U(隶属集)
 $n=6$

污染物对空气质量各等级的隶属函数 (梯形分布)

$$r_{11} = \begin{cases} 1, & x \leq \alpha_1 \\ \frac{\alpha_2 - x}{\alpha_2 - \alpha_1}, & \alpha_1 < x < \alpha_2 \\ 0, & x \geq \alpha_2 \end{cases}$$

$$r_{12} = \begin{cases} \frac{x - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}, & \alpha_1 < x < \alpha_2 \\ \frac{\alpha_3 - x}{\alpha_3 - \alpha_2}, & \alpha_2 < x < \alpha_3 \\ 0, & x \leq \alpha_1 \text{ or } x \geq \alpha_3 \end{cases}$$

$$r_{13} = \begin{cases} \frac{x - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_2}, & \alpha_2 < x < \alpha_3 \\ \frac{\alpha_4 - x}{\alpha_4 - \alpha_3}, & \alpha_3 < x < \alpha_4 \\ 0, & x \leq \alpha_2 \text{ or } x \geq \alpha_4 \end{cases}$$

$$r_{14} = \begin{cases} 0, & x \leq \alpha_3 \\ \frac{x - \alpha_3}{\alpha_4 - \alpha_3}, & \alpha_3 < x < \alpha_4 \\ 1, & x \geq \alpha_4 \end{cases}$$

综合评判矩阵 $R = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.56 & 0.44 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



$$B = A * R = (0.252, 0.478, 0.27, 0)$$

例2. 已知某一天 SO₂ 的浓度为 0.07 mg/m³，大气污染物中关于 SO₂ 的评

价标准为：

| | | | |
|------|------|-------|------|
| I 级 | II 级 | III 级 | IV 级 |
| 0.05 | 0.15 | 0.25 | 0.50 |

，试确定 SO₂ 在每个等级中的隶属度。

解：I 级为偏小型，II 级和 III 级为中间型，IV 级为偏大型

$$A_1 = \begin{cases} 1, & x \leq 0.05 \\ \frac{0.15 - x}{0.15 - 0.05}, & 0.05 < x < 0.15 \\ 0, & x \geq 0.15 \end{cases}$$

$$A_2 = \begin{cases} 0, & x \leq 0.05 \\ \frac{x - 0.05}{0.15 - 0.05}, & 0.05 < x \leq 0.15 \\ \frac{0.25 - x}{0.25 - 0.15}, & 0.15 < x \leq 0.25 \\ 0, & x \geq 0.25 \end{cases}$$

$$A_3 = \begin{cases} 0, & x \leq 0.15 \\ \frac{x - 0.15}{0.25 - 0.15}, & 0.15 < x \leq 0.25 \\ \frac{0.5 - x}{0.5 - 0.25}, & 0.25 < x < 0.5 \\ 0, & x \geq 0.5 \end{cases}$$

$$A_4 = \begin{cases} 0, & x \leq 0.25 \\ \frac{x - 0.25}{0.5 - 0.25}, & 0.25 < x < 0.5 \\ 1, & x \geq 0.5 \end{cases}$$

(符号在哪一边无所谓，一般使用梯形分布最为简单)

$$A_1(0.07) = \frac{0.15 - 0.07}{0.15 - 0.05} = 0.8 \quad A_2(0.07) = \frac{0.07 - 0.05}{0.15 - 0.05} = 0.2$$

$$A_3(0.07) = A_4(0.07) = 0$$

注：这里使用梯形分布得到的四个评语的隶属度的和恰好为 1。
(使用其他分布得到的隶属度的和不一定为 1 哟！)

注：因为 $\alpha_3 > \alpha_2$ ，因此若只考虑一个因素“SO₂”，则我们认为空气质量应该为一级。

华中农业大学 数学建模 国家精品

数学建模

华中农业大学 方红、李治、任兴龙、徐艳玲、侯志敏、谭劲英、丁鹿伟、朱强

还在羡慕别人的国际级、国家级大奖吗？快来学习数学建模吧，我们可以帮你圆梦！还在觉得跟数学有关的东西都是繁杂的计算和头疼的推理吗？相信你学完了本课程将会觉得数学的应用不过如此！...

27700人参加 已结束

一级模糊综合评价模型实例：

例3 某露天煤矿有五个边坡设计方案，其各项参数根据分析计算结果得到边坡设计方案的参数如表10-3所示。

表10-3 设计方案数据表

| 项目 | 方案I | 方案II | 方案III | 方案IV | 方案V |
|---------------------------|------|------|-------|------|------|
| 可采矿量/万吨 | 4700 | 6700 | 5900 | 8800 | 7600 |
| 基建投资/万元 | 5000 | 5500 | 5300 | 6800 | 6000 |
| 采矿成本/(元·吨 ⁻¹) | 4.0 | 6.1 | 5.5 | 7.0 | 6.8 |
| 不稳定费用/万元 | 30 | 50 | 40 | 200 | 160 |
| 净现值/万元 | 1500 | 700 | 1000 | 50 | 100 |

据勘探，该矿探明储量8800吨，开采总投资不超过8000万元，试做出各方案的优劣排序，选出最佳方案。

解 首先确定隶属函数。

(1) 可采矿量的隶属函数 (偏大型)

因为勘探的地质储量为8800吨，故可用资源的利用函数作为隶属函数

$$\mu_A(x) = \frac{x}{8800}$$

(2) 基建投资的隶属函数 (偏小型)

投资约束是8000万元，所以

$$\mu_B(x) = 1 - \frac{x}{8000}$$

(3) 采矿成本的隶属函数

根据专家意见，采矿成本 $a_1 \leq 5.5$ 元/吨为低成本， $a_2 = 8.0$ 元/吨为高成本，故

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq a_1 \\ \frac{a_2 - x}{a_2 - a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 0, & a_2 < x \end{cases}$$

(4) 不稳定费用的隶属函数

$$\mu_D(x) = 1 - \frac{x}{200}$$

(5) 净现值的隶属函数

取上限15(百万元)，下限0.5(百万元)，采用线性隶属函数

$$\mu_E(x) = \frac{x-50}{1450} = \frac{x-50}{1500-50}$$

根据各隶属函数计算出5个方案所对应的不同隶属度，见表10-4。

表10-4 隶属度表

| 项目 | 方案I | 方案II | 方案III | 方案IV | 方案V |
|-------|--------|--------|--------|------|--------|
| 可采矿量 | 0.5341 | 0.7614 | 0.6705 | 1 | 0.8636 |
| 基建投资 | 0.3750 | 0.3125 | 0.3375 | 0.15 | 0.25 |
| 采矿成本 | 1 | 0.76 | 1 | 0.4 | 0.48 |
| 不稳定费用 | 0.85 | 0.75 | 0.8 | 0 | 0.2 |
| 净现值 | 1 | 0.4480 | 0.6552 | 0 | 0.0345 |

这样就决定了单因素评判矩阵

$$R = \begin{bmatrix} 0.5341 & 0.7614 & 0.6705 & 1 & 0.8636 \\ 0.3750 & 0.3125 & 0.3375 & 0.15 & 0.25 \\ 1 & 0.76 & 1 & 0.4 & 0.48 \\ 0.85 & 0.75 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 1 & 0.4480 & 0.6552 & 0 & 0.0345 \end{bmatrix}$$

根据专家评价，诸因素在决策中占的权重为 $A = (0.25, 0.20, 0.20, 0.10, 0.25)$ ，于是得诸方案的综合评价为

$$B = A \cdot R = (0.7435, 0.5919, 0.6789, 0.3600, 0.3905)$$

由此可知：方案I最佳，III次之，IV最差。

如果没有专家怎么办？用熵权法！



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

数学建模与数学实验

(第4版)

主编 赵静 但琦
副主编 严尚安 杨秀文

高等教育出版社

隶属函数不唯一，只要合理就行。

根据专家建议...
根据其他人写的文章...

$$\rightarrow \text{交叉 } \mu_C(x) = 1 - \frac{x-a_1}{a_2-a_1}$$

注：从隶属函数的构造可以看出，五个因素的隶属函数均经过了正向化处理，即隶属度越大，说明越有利。→ Topsis 中的概念。

$0.5341 = \frac{4700}{8800}$ 代表“可采矿量”因素对方案I的隶属度。

$0.7614 = \frac{6700}{8800}$ 代表“可采矿量”因素对方案II的隶属度。

$0.8636 = \frac{7600}{8800}$ 代表“可采矿量”因素对方案V的隶属度。

由 $1 > 0.8636 > 0.7614 > 0.6705 > 0.5341$ ，倘若只考虑一个决策因素“可采矿量”，我们应选择方案IV。

(3) 多级模糊综合评价模型

① 为什么引入“多级”?

因素集中元素较多,我们可以对其进行归类!

归类后可以简化我们的计算。

例如: 确定权重时, 指标越少越容易。

② 多级模糊综合评价模型

(1) 划分因素集 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 为若干组

$$U = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}, \text{且}$$

$$U = \bigcup_{i=1}^k U_i \text{ and } U_i \cap U_j = \emptyset (i \neq j)$$

(不同子集中元素互不相同)

$$U: \text{第一级因素集} = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$$

$$U_i: \text{第二级因素集}$$

(2) 确定评语集 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, 并对第二级因素集

$U_i = \{u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \dots, u_{n_i}^{(i)}\}$ 进行评判得到综合评判矩阵

$$R_i = \begin{bmatrix} r_{11}^{(i)} & r_{12}^{(i)} & \cdots & r_{1m}^{(i)} \\ r_{21}^{(i)} & r_{22}^{(i)} & \cdots & r_{2m}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n_i 1}^{(i)} & r_{n_i 2}^{(i)} & \cdots & r_{n_i m}^{(i)} \end{bmatrix} \quad i=1, 2, \dots, k$$

若 $U_i = \{u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \dots, u_{n_i}^{(i)}\}$ 的权重为 $A_i = \{a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \dots, a_{n_i}^{(i)}\}$

→ 一级模糊综合评价的操作

则综合评判为 $B_i = A_i \cdot R_i \quad (i=1, 2, \dots, k)$

→ V_i 对于评语集中每个元素的隶属度

(3) 再对第一级因素 $U = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ 进行综合评判

若权重为 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, 则

$$R = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_k \end{bmatrix}$$

综合评判为

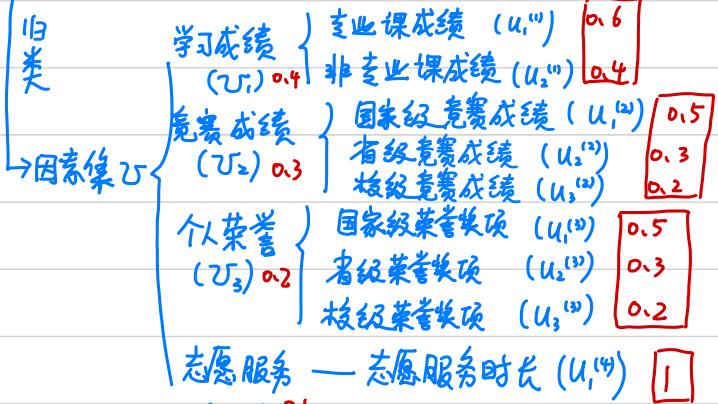
$$B = A \cdot R$$

(4) 按最大隶属度原则确定相应评语或等级

例: 评估学生的表现并作为奖学金的评判标准。

因素集 $U = \{\text{专业课成绩, 非专业课成绩, 国家级竞赛成绩, 省级竞赛成绩}\}$

校级竞赛成绩、国家级荣誉奖项、省级~、校级~、志愿服务时长



(红色代表权重: 同一级别的权重和为1.)

假设评语集 $V = \{\text{一等奖学金} V_1, \text{二等奖学金} V_2, \text{三等奖学金} V_3\}$

$$\text{若投票得到 } R_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.7 & 0.3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{注: } R_i \text{ 用模糊统计法得到。} \\ (10个评委投票)$$

0.8代表的含义是: 这位同学的专业课成绩对于 V_1 的隶属度为0.8。

同理: 我们可解释 0.2, 0.7, 0.3 和 0 的含义
↳ 只看专业课成绩, 8位评委认为可获一等奖学金
1位评委认为可获二等奖学金

那么 $B_1 = [0.6 \ 0.4] \cdot R_1 = [0.76 \ 0.24 \ 0]$ 注: 0.76表示只看成绩这一项因素, 对于获一等奖学金的隶属度。

$$\text{类似地, 若 } R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \text{ 则 } B_2 = [0.5 \ 0.3 \ 0.2] \cdot R_2 = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.27 & 0.58 \end{bmatrix}$$

看竞赛成绩, 可获一等奖学金的隶属度。

同理: 假设我们可得到 $B_3 = [0.4 \ 0.2 \ 0.4]$, $B_4 = [0.1 \ 0.8 \ 0.1]$

$$\text{那么: 构造 } R = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.76 & 0.24 & 0 \\ 0.15 & 0.27 & 0.58 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{bmatrix} \quad \text{注: } B_1 \text{ 对 } V \text{ 的隶属度} \\ \text{注: } B_2 \text{ 对 } V \text{ 的隶属度}$$

$$\text{又由 } A = [0.4 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.1]$$

$$\text{则 } B = A \cdot R = [0.439 \ 0.297 \ 0.264]$$

由于 0.439 最大, 那获得一等奖学金的隶属度最大, 所以该同学应评为一等奖学金。

思考: 假设一等奖学金名额有限, 例如只有3个名额, 那么怎么分配?

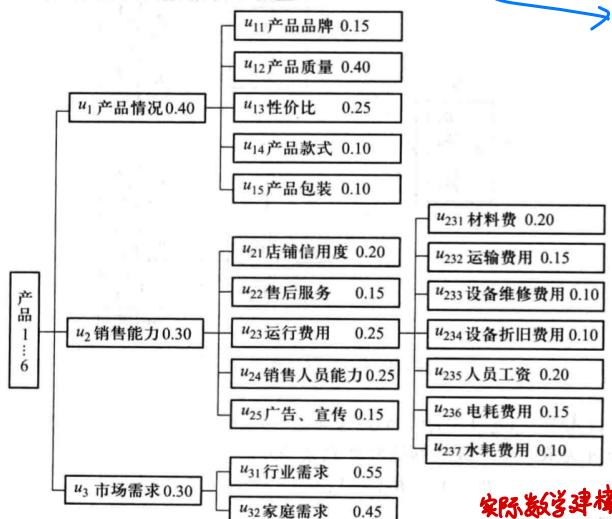
提示: 挑选获一等奖学金隶属度最大的三位同学。

③ 三级模糊综合评价模型

例 4 对某陶瓷厂生产的 6 种产品的销售前景进行评判。

解 (1) 影响评判对象因素集的选取

从产品情况、销售能力、市场需求三个方面考虑,根据专家评判法,得到评判对象因素集及子因素组成如图 10-2,因素后面的数据表示权重。



实际数学建模比赛中,数据
不一定会直接给我们,有时候需要
我们自己收集。

2018E

(例如美赛中出过评价国家脆弱性的题目)

(2) 备择集 $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 代表 6 种不同的陶瓷产品。

(3) 一级模糊综合评判

因素“运行费用”下属的三级指标是定量指标,有具体的数据,对这些数据归一化即求出各种产品的该指标与总指标的比重,得到单因素评价值;由于其他因素均为定性指标,通过市场调查,把消费者的满意度作为单因素的评价值。6 种产品的单因素评价值如表 10-5:

表 10-5 6 种产品的单因素评价值 (各因素的隶属度)

为什么要归一化?

因为隶属度是位于 [0, 1] 之间。

隶属函数的选取必须符合正向化过程。

| 因素 | 产品 1 | 产品 2 | 产品 3 | 产品 4 | 产品 5 | 产品 6 |
|----------|------|------|------|------|------|------|
| ① 产品品牌 | 0.12 | 0.18 | 0.17 | 0.23 | 0.13 | 0.17 |
| ② 产品质量 | 0.15 | 0.13 | 0.18 | 0.25 | 0.12 | 0.17 |
| ③ 性价比 | 0.14 | 0.13 | 0.16 | 0.18 | 0.20 | 0.19 |
| ④ 产品款式 | 0.12 | 0.14 | 0.15 | 0.17 | 0.19 | 0.23 |
| ⑤ 产品包装 | 0.16 | 0.12 | 0.13 | 0.25 | 0.18 | 0.16 |
| ⑥ 店铺信用度 | 0.13 | 0.15 | 0.14 | 0.18 | 0.16 | 0.24 |
| ⑦ 售后服务 | 0.12 | 0.16 | 0.13 | 0.17 | 0.19 | 0.23 |
| ⑧ 材料费 | 0.18 | 0.14 | 0.18 | 0.14 | 0.13 | 0.23 |
| ⑨ 运输费用 | 0.15 | 0.20 | 0.15 | 0.25 | 0.10 | 0.15 |
| ⑩ 设备维修费用 | 0.25 | 0.12 | 0.13 | 0.12 | 0.18 | 0.20 |
| ⑪ 设备折旧费用 | 0.16 | 0.15 | 0.21 | 0.11 | 0.20 | 0.17 |
| ⑫ 人员工资 | 0.23 | 0.18 | 0.17 | 0.16 | 0.15 | 0.11 |
| ⑬ 电耗费用 | 0.19 | 0.13 | 0.12 | 0.12 | 0.11 | 0.33 |
| ⑭ 水耗费用 | 0.17 | 0.16 | 0.15 | 0.08 | 0.25 | 0.19 |
| ⑮ 销售人员能力 | 0.14 | 0.13 | 0.15 | 0.16 | 0.18 | 0.24 |
| ⑯ 广告、宣传 | 0.16 | 0.15 | 0.15 | 0.17 | 0.18 | 0.19 |
| ⑰ 行业需求 | 0.15 | 0.14 | 0.13 | 0.18 | 0.14 | 0.26 |
| ⑱ 家庭需求 | 0.16 | 0.15 | 0.18 | 0.14 | 0.16 | 0.21 |

影响运行费用的各因素的单因素评价矩阵:

U_{23}

$$R_{23} = \begin{bmatrix} 0.18 & 0.14 & 0.18 & 0.14 & 0.13 & 0.23 \\ 0.15 & 0.20 & 0.15 & 0.25 & 0.10 & 0.15 \\ 0.25 & 0.12 & 0.13 & 0.12 & 0.18 & 0.20 \\ 0.16 & 0.15 & 0.21 & 0.11 & 0.20 & 0.17 \\ 0.23 & 0.18 & 0.17 & 0.16 & 0.15 & 0.11 \\ 0.19 & 0.13 & 0.12 & 0.12 & 0.11 & 0.33 \\ 0.17 & 0.16 & 0.15 & 0.08 & 0.25 & 0.19 \end{bmatrix}$$

运行费用对V的隶属度

权重分配为: $A_{23} = [0.02 \quad 0.15 \quad 0.10 \quad 0.10 \quad 0.20 \quad 0.15 \quad 0.10]$, 则运行费用的一级评判为:
 $B_{23} = A_{23} \cdot R_{23} = [0.1910 \quad 0.1565 \quad 0.1595 \quad 0.1465 \quad 0.1505 \quad 0.1960]$

(4) 二级模糊综合评判

对产品情况、销售能力、市场需求下属的单因素指标进行二级评判. 产品情况的二级评判:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.12 & 0.18 & 0.17 & 0.23 & 0.13 & 0.17 \\ 0.15 & 0.13 & 0.18 & 0.25 & 0.12 & 0.17 \\ 0.14 & 0.13 & 0.16 & 0.18 & 0.20 & 0.19 \\ 0.12 & 0.14 & 0.15 & 0.17 & 0.19 & 0.23 \\ 0.16 & 0.12 & 0.13 & 0.25 & 0.18 & 0.16 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = [0.15 \quad 0.40 \quad 0.25 \quad 0.10 \quad 0.10]$$

$$B_1 = A_1 \cdot R_1 = [0.1410 \quad 0.1375 \quad 0.1655 \quad 0.2215 \quad 0.1545 \quad 0.1800]$$

将运行费用的一级评判结果作为二级评判的单因素评价值, 即评判矩阵的第三行, 则销售能力的二级评判:

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0.13 & 0.15 & 0.14 & 0.18 & 0.16 & 0.24 \\ 0.12 & 0.16 & 0.13 & 0.17 & 0.19 & 0.23 \\ 0.1910 & 0.1565 & 0.1595 & 0.1465 & 0.1505 & 0.1960 \\ 0.14 & 0.13 & 0.15 & 0.16 & 0.18 & 0.24 \\ 0.16 & 0.15 & 0.15 & 0.17 & 0.18 & 0.19 \end{bmatrix} \rightarrow B_{23}$$

$$A_2 = [0.20 \quad 0.15 \quad 0.25 \quad 0.25 \quad 0.15]$$

$$B_2 = A_2 \cdot R_2 = [0.1508 \quad 0.1481 \quad 0.1474 \quad 0.1636 \quad 0.1701 \quad 0.2200]$$

市场需求的二级评判:

$$R_3 = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.14 & 0.13 & 0.18 & 0.14 & 0.26 \\ 0.16 & 0.15 & 0.18 & 0.14 & 0.16 & 0.21 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = [0.55 \quad 0.45]$$

$$B_3 = A_3 \cdot R_3 = [0.1545 \quad 0.1445 \quad 0.1525 \quad 0.1620 \quad 0.1490 \quad 0.2375]$$

(5) 三级模糊综合评判

将二级评判结果 B_1, B_2, B_3 作为行, 组成三级评判的单因素评判矩阵

$$R = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

权重集 $A = [0.40 \quad 0.30 \quad 0.30]$, 根据 $B = A \cdot R$ 得

$$B = [0.1480 \quad 0.1428 \quad 0.1562 \quad 0.1863 \quad 0.1575 \quad 0.2093]$$

从计算结果可以看出, 产品 6 的综合评定得分值最高, 其次为产品 4, 以下依次为产品 5、产品 3、产品 1、产品 2. (可以画一个柱状图放在论文中哦!)

研究结果表明: 商家在生产过程中应对产品 6 加大投资, 其次为产品 4, 产品 5、产品 3、产品 1、产品 2 的销售前景不是很乐观, 应减少投资.

