Universitat Autònoma de Barcelona

Els Teoremes Petit i Gran de Picard

Treball Final del Grau de Matemàtiques

Mireia Gómez Diaz

12 de juliol de 2021

Tutor: Artur Nicolau Nos

Singularitat essencial

Def. (singularitat essencial)

Direm que z_0 és una singularitat essencial de f(z) si z_0 és una singularitat aïllada i z_0 no és ni un pol ni una singularitat evitable.

Teorema (de Casoratti-Weierstrass)

Sigui f una funció holomorfa amb una singularitat essencial en $z = a$. Llavors, en cada entorn d'a, la imatge d'$f(z)$ és densa en $\mathbb{C}$.

Teorema (Teorema Gran de Picard)

Sigui f una funció holomorfa amb una singularitat essencial en $z = a$. Llavors, en cada entorn d'a, $f(z)$ pren tots els valors complexos possibles infinites vegades amb, com a màxim, l'excepció d'un punt.

Exemple

$$f(z) = e^{1/z}$$

Teorema Petit de Picard

Teorema (Teorema Petit de Picard)

Sigui f una funció entera que omet dos valors, llavors f és constant.

Exemple

$$f(z) = e^z$$

Objectius

L'objectiu d'aquest treball ha estat entendre i demostrar els Teoremes Petit i Gran de Picard.

Per aconseguir-ho, hem fet servir eines com:
- El Teorema de Bloch.
- El Teorema de Schottky.
- Els Teoremes de Montel.

Teorema (de Bloch)

Sigui f una funció analítica en un domini que conté el disc tancat $\overline{D(0,1)}$ i que satisfà $f(0)=0$ i $f'(0)=1$. Llavors existeix un disc $S \subset D(0,1)$ on f és injectiva i $f(S)$ conté un disc de radi $1/72$.

Nota: $1/72 = 0,013\widehat{8}$.

Def. (constant de Bloch)

Considerem $\mathcal{F}$ el conjunt de funcions analítiques en un domini que conté el disc tancat $\overline{D(0,1)}$ i que satisfan $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Per cada $f \in \mathcal{F}$ considerem $\beta(f)$ el suprem de tots els nombres r per als quals hi ha un disc $S \subset D(0,1)$ en que f és injectiva i $f(S)$ conté un disc de radi r. Definim la constant de Bloch com

$$B = \inf\{\beta(f) : f \in \mathcal{F}\}.$$

Nota: $0,43 \leq B \leq 0,48$.

Teorema (de Schottky)

Per cada α *i* β, $0 < \alpha < \infty$ *i* $0 \leq \beta \leq 1$, *existeix una constant* $C(\alpha, \beta)$ *tal que si* f *és una funció analítica en un domini que conté el disc tancat* $\overline{D(0,1)}$ *i que no pren els valors* 0 *ni* 1 *i* $|f(0)| \leq \alpha$, *llavors* $|f(z)| \leq C(\alpha, \beta)$ *per a tot* $|z| \leq \beta$.

Normalitat i equicontinuïtat

Def. (família normal)

Sigui $\mathcal{F}$ una família de funcions definida sobre un conjunt obert del pla complex. Direm que $\mathcal{F}$ és normal si tota successió de $\mathcal{F}$ té una subsuccessió que convergeix uniformement sobre els compactes de l'obert.

Def. (família equicontínua)

Sigui $\mathcal{F} \subset C(G, \Omega)$. Direm que $\mathcal{F}$ és equicontínua en un punt z_0 si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ aleshores la distància entre $f(z)$ i $f(z_0)$ és menor a ε per a tot $f \in \mathcal{F}$.

Teorema (de Montel)

Una família de funcions holomorfes definides en un conjunt obert del pla complex és normal si, i només si, està uniformement acotada en els compactes de l'obert.

Teorema (de Montel-Caratheodory)

Sigui $\mathcal{F}$ la família de funcions analítiques d'un domini Ω que no prenen els valors 0 ni 1. Llavors $\mathcal{F}$ és normal a $C(\Omega, \mathbb{C}_\infty)$.

Resultats que se'n deriven

Corol·lari (I)

Si f té una singularitat aïllada a $z = a$ i hi ha dos nombres complexos que f no pren infinitament sovint, llavors $z = a$ és un pol o una singularitat evitable.

Corol·lari (II)

Si f és una funció entera no polinomial, llavors f pren tots els valors complexos un nombre infinit de vegades excepte, com a molt, un valor.

Moltes gràcies!