Universitat Autònoma de Barcelona

Treball Final del Grau en Matemàtiques

2020/2021

Els Teoremes Petit i Gran de Picard

Mireia Gómez Diaz

Tutor: Artur Nicolau Nos

Barcelona, Juny 2021

Desitjo donar les gràcies a les persones que han fet possible l'elaboració d'aquesta memòria:

Als meus pares i a la meva germana, pel seu etern suport.

Al meu company Pol, per haver compartit l'aventura d'estudiar Matemàtiques.

Al meu tutor Artur Nicolau, per acceptar guiar-me i ajudar-me a realitzar aquest treball.

A totes les professores i professors que he tingut al llarg de la meva vida acadèmica.

Mireia Gómez

Índex

1 Introducció

L'any 1880 Émile Picard publicava l'article *Mémoire sur les fonctions entières* [1], on presentava dos teoremes que parlaven sobre la imatge de les funcions analítiques. Aquests dos teoremes, avui dia, són coneguts pel nom de Teoremes de Picard, o més concretament, com el Teorema Petit i el Teorema Gran de Picard.

Un dels precursors dels teoremes de Picard és el teorema de Casorati-Weierstrass, el qual enuncia que la imatge d'una funció holomorfa prop d'una singularitat essencial és densa en $\mathbb{C}$.

Els teoremes de Picard van millorar substancialment el que fins llavors es sabia sobre la imatge de les funcions analítiques. Van ser una revelació en el seu temps i van causar un gran interès en la investigació de la *Teoria de funcions.*

L'objectiu principal d'aquest treball és enunciar i demostrar els Teoremes Petit i Gran de Picard. El Teorema Petit de Picard diu que si una funció és entera i no constant, la seva imatge és el pla complex sencer o el pla complex sencer menys un únic punt. Aquest és el cas de, per exemple, la funció entera $f(z) = e^z$, la imatge de la qual és tot el pla complex menys el punt 0.

El Teorema Gran de Picard va més enllà. Ens diu que si tenim una funció holomorfa amb una singularitat essencial, la imatge de qualsevol entorn perforat d'aquesta singularitat essencial pren tots els valors complexos infinites vegades amb, com a molt, l'excepció d'un punt. Per tant, el Teorema Gran de Picard és notablement més potent que el teorema de Casorati-Weierstrass.

Émile Picard originalment va demostrar aquests teoremes a partir de la funció modular, que és una aplicació holomorfa i exhaustiva que va del disc al pla menys dos punts. Al 1896, però, Borel va donar una demostració elemental del Teorema Petit de Picard, una prova en la qual no utilitzava la funció modular. I pocs anys després, Montel va tenir la brillant idea de reemplaçar una propietat particular d'una funció per una família de funcions que posseïen la propietat en una successió de dominis, per així poder demostrar el Teorema Gran de Picard sense haver d'usar funcions modulars.

Nosaltres en aquest treball seguirem el fil de les demostracions proposades per Borel i Montel i recollides pel matemàtic John B. Conway en el capítol XII del seu llibre *Functions of one complex variable* [2]. Demostrarem de forma independent els dos teoremes de Picard, usant resultats ben coneguts com el Teorema de Bloch, el teorema de Schottky i els teoremes de Montel. Per a fer-ho, haurem d'introduir els conceptes de família de funcions normal i família de funcions equicontínua.

2 Conceptes bàsics

Abans de començar amb el gruix del treball, en aquest apartat recollim algunes definicions i resultats bàsics d'anàlisi complexa que seran necessaris per al desenvolupament del treball. Aquests resultats han estat coberts per l'assignatura obligatòria "Anàlisi Complexa" del tercer curs del grau de Matemàtiques a la Universitat Autònoma de Barcelona. Es poden trobar demostrats a [2] i [4].

2.1 La topologia de $\mathbb{C}$

Definició 2.1.1 (interior, clausura). *Sigui $A \subset \mathbb{C}$ i $z_0 \in \mathbb{C}$. Sigui el disc $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$. Direm que z_0 és un punt interior d'A si existeix $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subset A$. Al conjunt de tots els punts interiors d'A l'anomenarem interior d'A i el denotarem com $A°$.*

Direm que z_0 és un punt adherent a A si per a tot $r > 0$ tenim que $D(z_0, r) \cap A \neq \emptyset$. Al conjunt de tots els punts adherents a A l'anomenarem clausura d'A i el denotarem com $\overline{A}$.

Definició 2.1.2 (obert, tancat). *Direm que A és un conjunt obert si $\mathring{A} = A$. Direm que A és un conjunt tancat si $\overline{A} = A$.*

Definició 2.1.3 (dens). *Sigui $A \subseteq \mathbb{C}$. Direm que A és dens si $\overline{A} = \mathbb{C}$.*

Definició 2.1.4 (connex). *Sigui $A \subseteq \mathbb{C}$. Direm que A és connex si no es pot expressar com la unió disjunta de dos oberts no buits. Intuitivament, un conjunt és connex si apareix com una sola peça.*

Definició 2.1.5 (simplement connex). *Direm que $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ és simplement connex si el seu complementari $\mathbb{C}^* \setminus \Omega$ és connex a $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \infty$.*

Definició 2.1.6 (domini). *Direm que $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ és un domini si és un conjunt obert i connex.*

Definició 2.1.7 (recobriment). *Direm que una família $\{U_i\}_{i \in I}$ de subconjunts d'$A \subseteq \mathbb{C}$ és un recobriment d'A si $A = \bigcup_{i \in I} U_i$. Si I és finit, direm que el recobriment és finit. Si els subespais $\{U_i\}_{i \in I}$ són oberts a $\mathbb{C}$, direm que el recobriment és per oberts.*

Definició 2.1.8 (compacte). *Direm que un conjunt A és compacte si per tot recobriment infinit d'A existeix un subrecobriment finit d'A.*

Definició 2.1.9 (compacte per successions). *Direm que un conjunt A és compacte per successions si tota successió d'A té una subsuccessió convergent a A.*

2.2 Funció holomorfa

Definició 2.2.1 (funció holomorfa). *Sigui Ω un domini, sigui $f : \Omega \to \mathbb{C}$ i sigui $z_0 \in \Omega$. Direm que la funció f és $\mathbb{C}$-derivable o holomorfa en z_0 si existeix*

$$\lim_{h\to 0, h\in\mathbb{C}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z_0).$$

Definició 2.2.2 (funció entera). *Direm que una funció f és entera si f és holomorfa en tot el pla complex $\mathbb{C}$.*

Definició 2.2.3 (determinació del logaritme). *Una determinació contínua del logaritme en un conjunt connex $E \subset \mathbb{C}$ que no conté el zero, és una funció g contínua en E tal que $e^{g(z)} = z$ si $z \in E$.*

Lema 2.2.1 (Lema de Schwarz). *Sigui f una funció holomorfa al disc $D(0,1)$ tal que $f(0) = 0$ i $|f(z)| < 1$ per a tot $z \in D(0,1)$. Llavors:*

(i) $|f(z)| \leq |z|$ *per a tot* $z \in D(0,1)$.

(ii) $|f'(0)| \leq 1$.

Teorema 2.2.2 (Fórmula Integral de Cauchy). *Sigui Ω un domini i f una funció holomorfa a Ω. Sigui $\gamma \subset \Omega$ una corba tancada contínua i diferenciable a trossos a Ω i z un punt de $\Omega \setminus \gamma$. Llavors*

$$f(z) Ind(z,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw$$

on $Ind(z,\gamma)$ representa l'índex del punt z entorn a la corba γ.

Teorema 2.2.3 (Desigualtat de Cauchy). *Sigui $f(z)$ una funció holomorfa en el disc $D(z_0,R)$. Suposem que $|f(z)| \leq M$ per tot $z \in D(z_0,R)$. Llavors*

$$\left|f^{n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!M}{R^n}.$$

2.3 Zeros d'una funció

Definició 2.3.1 (zero d'ordre m). *Direm que z_0 és un zero d'ordre m de $f(z)$ si*

$$f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{m-1)}(z_0) = 0 \ i \ f^{m)}(z_0) \neq 0.$$

Teorema 2.3.1 (Principi del Mòdul Màxim). *Sigui Ω un domini i f una funció holomorfa en Ω no constant. Aleshores $|f|$ no té màxims locals, és a dir,*

$$\forall z \in \Omega \ \exists w \in \Omega \ tal \ que \ |f(w)| > |f(z)|.$$

Teorema 2.3.2 (Principi del Mòdul Màxim, versió final). *Sigui Ω un domini i f una funció holomorfa en Ω. Suposem que existeix una constant M tal que $\limsup_{z\to a} |f(z)| \leq M$ per tot $a \in \partial_\infty \Omega$. Llavors $|f(z)| \leq M$ per tot $z \in \Omega$.*

2.4 Singularitats aïllades

Definició 2.4.1 (singularitats aïllades). *Direm que z_0 és una singularitat aïllada de $f(z)$ si existeix $\varepsilon > 0$ tal que $f(z)$ és holomorfa a $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$.*

Tenim tres tipus de singularitats aïllades:

Definició 2.4.2 (singularitat evitable). *Direm que z_0 és una singularitat evitable de $f(z)$ si z_0 és una singularitat aïllada i podem extendre $f(z)$ a una funció holomorfa a en un entorn de z_0.*

Exemple. La funció

$$f(z) = \begin{cases} z & si \quad z \in D(0,1) \setminus \{0\} \\ 1 & si \quad z = 0 \end{cases}$$

és holomorfa al disc $D(0,1) \setminus \{0\}$ i el 0 és una singularitat aïllada. Aquesta singularitat és una singularitat evitable ja que podem extendre $f(z)$ al 0 com $f(0) = 0$ i obtenim la funció $f(z) = z$, que és holomorfa al disc $D(0,1)$.

Definició 2.4.3 (pol). *Direm que z_0 és un pol de f(z) si z_0 és una singularitat aïllada i $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$.*

Exemple. La funció $f(z) = \frac{1}{z^3}$ és holomorfa al pla complex $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ i per tant el 0 és una singularitat aïllada. Aquesta singularitat és un pol ja que $\lim_{z\to 0} \frac{1}{|z^3|} = \infty$.

Definició 2.4.4 (singularitat essencial). *Direm que z_0 és una singularitat essencial de f(z) si z_0 és una singularitat aïllada i z_0 no és ni un pol ni una singularitat evitable.*

Exemple. La funció $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ és holomorfa a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ i per tant el 0 és una singularitat aïllada. Aquesta singularitat és una singularitat essencial ja que el $\lim_{z\to 0} f(z)$ no existeix:

1. Si prenem la successió $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ que tendeix a zero quan n tendeix a infinit, tenim que

$$\lim_{z\to 0, z = ix_n} e^{\frac{1}{z}} = \lim_{n\to\infty} e^{2\pi n i} = 1.$$

2. Si prenem la successió $y_n = \frac{1}{2\pi(n+\frac{1}{2})}$ que tendeix a zero quan n tendeix a infinit, tenim que

$$\lim_{z\to 0, z=iy_n} e^{\frac{1}{z}} = \lim_{n\to\infty} e^{2\pi ni+\pi i} = -1.$$

Per tant el límit no existeix i el 0 és una singularitat essencial per a la funció $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

Un resultat ben conegut per a la classificació de les singularitats aïllades és el següent:

Teorema 2.4.1. *Sigui $z_0 \in \mathbb{C}$ una singularitat aïllada de $f(z)$. Llavors:*

(i) *z_0 és una singularitat evitable si i només si $f(z)$ està acotada al disc $D(z_0, \delta)$ per a algun $0 < \delta \le \varepsilon$.*

(ii) *z_0 és un pol si i només si $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$, on $g(z)$ és holomorfa al disc $D(z_0, \delta)$ per a algun $0 < \delta \le \varepsilon$ tal que $g(z_0) \neq 0$. Direm llavors que z_0 és un pol d'ordre n.*

(iii) *z_0 és una singularitat essencial si i només si $f(z)$, holomorfa a $D(z_0, \delta)\setminus \{z_0\}$, és dens a $\mathbb{C}$ per a tot $0 < \delta \le \varepsilon$.*

2.5 Relació amb les sèries de potències

Definició 2.5.1 (funció analítica)**.** *Direm que una funció $f(z)$ és analítica si $f(z)$ pot ser expressada localment com a una sèrie de potències convergent.*

Un dels resultats més importants de la Teoria local de Cauchy és el següent teorema:

Teorema 2.5.1. *Tota funció holomorfa és analítica.*

Definició 2.5.2 (funció meromorfa)**.** *Sigui G un obert. Direm que $f(z)$ meromorfa a G si existeix una successió de punts $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de G tals que $f(z)$ és holomorfa a $G \setminus \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $f(z)$ té un pol a cada z_n per a tot $n \in \mathbb{N}$.*

2.6 Altres resultats

Teorema 2.6.1 (Teorema de Rouché)**.** *Siguin $f(z)$ i $g(z)$ funcions meromorfes a $\overline{D}(a, R)$ tals que no tenen zeros o pols al cercle $\gamma = \{z : |z - a| = R\}$. Siguin Z_f, Z_g (P_f, P_g) el nombre de zeros (pols) de $f(z)$ i $g(z)$ al disc $D(a, R)$ contant multiplicitats. Si*

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \ \text{en}\ \gamma$$

llavors

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g.$$

Teorema 2.6.2 (Teorema de Hurwitz)**.** *Sigui* Ω *un domini. Sigui* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una successió de funcions holomorfes en* Ω *tals que* $f_n(z) \neq 0$ *per tot* $z \in \Omega, n \in \mathbb{N}$. *Suposem que* $\{f_n\}$ *convergeixen uniformement sobre els compactes d'*Ω *cap a una certa funció* f. *Llavors o bé* f *és idènticament nul·la o bé* f *no s'anul·la en cap punt d'* Ω.

3 El Teorema Petit de Picard

En aquest treball investigarem el recorregut d'una funció analítica. Un problema d'aquest tipus és el següent: suposem $\mathcal{F}$ una família de funcions analítiques en un domini Ω que satisfan una certa propietat P. Què podem dir sobre $f(\Omega)$ per a cada f de $\mathcal{F}$? Els conjunts $f(\Omega)$ són uniformement grans en algun sentit? És evident que les respostes a aquestes preguntes dependran de la propietat P utilitzada per a definir $\mathcal{F}$.

Com ja hem comentat en la introducció, hi ha uns quants teoremes d'aquest tipus que ja es coneixien abans dels teoremes de Picard. Per exemple, el Teorema de Casorati-Weierstrass que diu que si $G = \{z : 0 < |z - a| < r\}$ i $\mathcal{F}$ és el conjunt de funcions analítiques a G amb una singularitat essencial a $z = a$, llavors per cada δ, $0 < \delta < r$ i cada f de $\mathcal{F}$ tenim que $f(\{z : 0 < |z - a| < \delta\})$ és dens a $\mathbb{C}$. Recordar que si f és entera i $f(1/z)$ té un pol a $z = 0$, llavors f és un polinomi. Per tant, si f és entera i no és un polinomi llavors $f(1/z)$ té una singularitat essencial a $z = 0$. Com a corol·lari del Teorema de Casorati-Weierstrass, $f(\mathbb{C})$ és dens a $\mathbb{C}$ per a tota funció entera (si f és un polinomi llavors $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$).

Aquest treball acabarà amb el Teorema Gran de Picard que millora substancialment el Teorema de Casorati-Weierstrass. De fet, afirma que si f té una singularitat essencial a $z = a$ llavors $f(\{z : 0 < |z - a| < \delta\})$ és igual al pla complex sencer excepte potser un punt. A més, f pren cada valor d'aquest disc perforat una infinitat de vegades. Com abans, llavors tindrem que $f(\mathbb{C})$ és el pla sencer excepte potser un punt quan f sigui una funció entera. Aquest fet és conegut com el Teorema Petit de Picard. De totes maneres, aquest últim resultat l'obtindrem de manera independent.

Abans de demostrar aquests teoremes de Picard, és necessari que obtinguem uns altres resultats sobre el recorregut de funcions analítiques, els qual són interessants per si mateixos.

3.1 Teorema de Bloch

Per ajustar el resultat d'aquest teorema a les preguntes generals plantejades a l'apartat anterior, en aquesta secció considerarem $D = D(0, 1)$ el disc de centre 0 i radi 1 i $\mathcal{F}$ la família de funcions analítiques d'un domini que contingui $\overline{D}$ tals que $f(0) = 0$ i $f'(0) = 1$.

Com "gran"pot ser $f(D)$? Dit d'una altra manera: com $f'(0) = 1 \neq 0$, f no és constant i per tant $f(D)$ és obert. Això vol dir que $f(D)$ ha de contenir un disc de radi positiu. Però es pot prendre aquest mateix radi per a totes les funcions de la família? Veiem-ho.

Lema 3.1.1. *Sigui f una funció analítica al disc $D(0,1)$ tal que $f(0)=0$, $f'(0)=1$ i $|f(z)|\leq M$ per a tota $z\in D(0,1)$. Llavors $M\geq 1$ i*

$$f(D(0,1))\supset D\left(0,\frac{1}{6M}\right).$$

Demostració. Sigui $0<r<1$ i $f(z)=z+a_2z^2+...$; per la Desigualtat de Cauchy sabem que $|a_n|\leq \frac{M}{r^n}$ per $n\geq 1$. Així, $1{=}|a_1|\leq M$. Si $|z|=(4M)^{-1}$ llavors

$$\begin{aligned}|f(z)| &\geq |z|-\sum_{n=2}^{\infty}|a_nz^n|\\ &\geq (4M)^{-1}-\sum_{n=2}^{\infty}M(4M)^{-n}\\ &= (4M)^{-1}-(16M-4)^{-1}\\ &\geq (6M)^{-1}\end{aligned}$$

ja que $M\geq 1$.

Suposem $|w|<(6M)^{-1}$. Hem de veure que $g(z)=f(z)-w$ té un zero. De fet, per $|z|=(4M)^{-1}$, $|f(z)-g(z)|=|w|<(6M)^{-1}\leq |f(z)|$. Pel Teorema de Rouché, f i g tenen el mateix número de zeros al disc $D(0,1/4M)$. Com $f(0)=0, g(z_0)=0$ per algun z_0, llavors $f(D(0,1))\supset D(0,1/6M)$. □

Lema 3.1.2. *Sigui g una funció analítica en el disc $D(0,R)$ tal que $g(0)=0$, $|g'(0)|=\mu>0$ i $|g(z)|\leq M$ per a tot z, llavors*

$$g(D(0,R))\supset D\left(0,\frac{\mu^2R^2}{6M}\right).$$

Demostració. Sigui $f(z)=[Rg'(0)]^{-1}g(Rz)$ per tot $|z|<1$. Aleshores f és analítica al disc $D(0,1)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$ i $|f(z)|\leq M/\mu R$ per a tot $z\in D(0,1)$. Pel lema 3.1.1, $f(D(0,1))\supset D(0,\mu R/6M)$. Desfent el canvi per tornar a la funció original g, s'obté el resultat. □

Lema 3.1.3. *Sigui f una funció analítica en el disc $D(a,R)$ tal que $|f'(z)-f'(a)|<|f'(a)|$ per a tot $z\in D(a,R), z\neq a$. Llavors f és injectiva al disc $D(a,R)$.*

Demostració. Suposem z_1, z_2 dos punts del disc $D(a, R)$ tals que $z_1 \neq z_2$. Sigui γ el segment que uneix z_1, z_2. Usant la desigualtat triangular tenim que

$$\begin{aligned}
|f(z_1) - f(z_2)| &= |\int_\gamma f'(z)dz| \\
&\geq |\int_\gamma f'(a)dz| - |\int_\gamma (f'(z) - f'(a))dz| \\
&\geq |f'(a)||z_1 - z_2| - \int_\gamma |f'(z) - f'(a)|dz
\end{aligned}$$

Utilitzant la hipòtesi, tenim que $|f(z_1) - f(z_2)| > 0$ i per tant $f(z_1) \neq f(z_2)$. És a dir, f és injectiva al disc $D(a, R)$. □

Teorema 3.1.4 (Teorema de Bloch)**.** *Sigui f una funció analítica en un domini que conté el disc tancat $\overline{D(0,1)}$ i que satisfà $f(0) = 0$ i $f'(0) = 1$. Llavors existeix un disc $S \subset D(0, 1)$ on f és injectiva i $f(S)$ conté un disc de radi $1/72$.*

Demostració. Sigui $K(r) = \max\{|f'(z)| : |z| = r\}$ i sigui $h(r) = (1-r)K(r)$. És fàcil veure que $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ és contínua. A més, $h(0) = (1-0)K(0) = 1$ i $h(1) = (1-1)K(1) = 0$.

Sigui $r_0 = \sup\{r : h(r) = 1\}$, llavors $h(r_0) = 1, r_0 < 1$ i $h(r) < 1$ si $r > r_0$. Escollim a tal que $|a| = r_0$ i $|f'(a)| = K(r_0)$. Llavors

$$|f'(a)| = (1 - r_0)^{-1}. \tag{1}$$

Ara, si $|z - a| < \frac{1}{2}(1 - r_0) = \rho_0$, deduïm que $|z| < \frac{1}{2}(1 + r_0)$. Com que $r_0 < \frac{1}{2}(1 + r_0)$, la definició de r_0 ens dóna que

$$\begin{aligned}
|f'(z)| &\leq K(\frac{1}{2}(1 + r_0)) \\
&= h(\frac{1}{2}(1 + r_0))[1 - \frac{1}{2}(1 + r_0)]^{-1} \\
&< [1 - \frac{1}{2}(1 + r_0)]^{-1} \\
&= 1/\rho_0
\end{aligned} \tag{2}$$

per a tot $|z - a| < \rho_0$. Combinant (1) i (2), tenim que

$$|f'(z) - f'(a)| \leq |f'(z)| + |f'(a)| = 3/2\rho_0.$$

Aplicant el Lema de Schwarz a un disc centrat al punt a,

$$|f'(z) - f'(a)| \leq \frac{3|z - a|}{2\rho_0^2}$$

per a tot $z \in D(a, \rho_0)$. Per tant, si $z \in S = D(a, \frac{1}{3}\rho_0)$,

$$|f'(z) - f'(a)| < \frac{1}{2\rho_0} = |f'(a)|.$$

Pel lema 3.1.3, f és injectiva a S. Falta veure que $f(S)$ conté un disc de radi 1/72. Per a veure-ho, definim $g : D(0, \frac{1}{3}\rho_0) \to \mathbb{C}$ com $g(z) = f(z+a) - f(a)$. Llavors $g(0) = 0$ i $g'(0) = |f'(a)| = (2\rho_0)^{-1}$. Si $z \in D(0, \frac{1}{3}\rho_0)$ llavors el segment γ que uneix $a, z + a$ està contingut en $S \subset D(a, \rho_0)$. Per (2), tenim que

$$\begin{aligned} |g(z)| &= |\int_\gamma f'(w)dw| \\ &\leq \frac{1}{\rho_0}|z| \\ &< \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Aplicant el lema 3.1.2 tenim que

$$g\left(D\left(0, \frac{1}{3}\rho_0\right)\right) \supset D(0, \sigma)$$

on

$$\sigma = \frac{\left(\frac{1}{3}\rho_0\right)^2 \left(\frac{1}{2\rho_0}\right)^2}{6\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{72}.$$

Desfent el canvi de g a f,

$$f(S) \supset D\left(f(a), \frac{1}{72}\right).$$

$\square$

Corol·lari 3.1.4.1. *Sigui f una funció analítica en un domini que conté el disc tancat $\overline{D(0, R)}$, llavors $f(D(0, R))$ conté un disc de radi $\frac{1}{72}R|f'(0)|$.*

Demostració. El resultat és trivial si $f'(0) = 0$, així que podem assumir $f'(0) \neq 0$. Apliquem el Teorema de Bloch a la funció

$$g(z) = \frac{f(Rz) - f(0)}{Rf'(0)}.$$

$\square$

3.2 Constants de Bloch i de Landau

En aquest apartat veurem que, com a conseqüència del Teorema de Bloch, existeix una constant positiva B tal que $f(G)$ conté un disc de radi B per a tota f de $\mathcal{F}$.

Definició 3.2.1 (Constant de Bloch)**.** *Considerem $\mathcal{F}$ el conjunt de funcions analítiques en un domini que conté el disc tancat $\overline{D(0,1)}$ i que satisfan $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Per cada $f \in \mathcal{F}$ considerem $\beta(f)$ el suprem de tots els nombres r per als quals hi ha un disc $S \subset D$ en que f és injectiva i $f(S)$ conté un disc de radi r. Definim la constant de Bloch com*

$$B = \inf\{\beta(f) : f \in \mathcal{F}\}.$$

Segons el Teorema de Bloch, $B \geq 1/72$. Si considerem la funció $f(z) = z$ llavors clarament $B \leq 1$. De totes maneres, coneixem millors estimacions que aquests; és conegut que $0,43 \leq B \leq 0,48$. Tot i que el valor exacte de B encara és desconegut, els matemàtics Ahlfors i Grunsky van conjecturar al 1937 que

$$B = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)}{(1+\sqrt{3})^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} = 0,4718617...$$

Aquí Γ representa la funció gamma d'Euler, definida per $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^x dx$ per a tot $t \in \mathbb{C}$.

A continuació definirem una altra constant relacionada amb la constant de Bloch.

Definició 3.2.2 (Constant de Landau)**.** *Sigui $\mathcal{F}$ el mateix conjunt que en la definició 3.2.1. Definim $\lambda(f) = \sup\{r : f(D)$ conté un disc de radi $r\}$ per cada $f \in \mathcal{F}$. Definim la constant de Landau com*

$$L = \inf\{\lambda(f) : f \in \mathcal{F}\}.$$

Clarament $L \geq B$ i tornem a tenir que $L \leq 1$. Com abans, el valor exacte d'L és desconegut, però es pot provar que $0,50 \leq L \leq 0,56$. S'ha conjecturat també que el seu valor és

$$L = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} = 0,5432589...$$

En particular, $L > B$.

Proposició 3.2.1. *Si f és una funció analítica en un domini que conté el disc tancat $\overline{D(0,1)}$ i $f(0)=0, f'(0)=1$, llavors $f(D(0,1))$ conté un disc de radi L.*

Demostració. Considerem $D = D(0,1)$. Volem veure que $f(D)$ conté un disc de radi $\lambda = \lambda(f)$. Per cada n existeix un punt $\alpha_n \in f(D)$ tal que $D(\alpha_n, \lambda - \frac{1}{n}) \subset f(D)$. Aleshores $\alpha_n \in f(D) \subset f(D^-)$ on $f(D^-)$ és compacte. Aleshores existeix un punt $\alpha \in f(D^-)$ i una subsuccessió $\{\alpha_{n_k}\}$ tal que $\alpha_{n_k} \to \alpha$. Si $|w-\alpha| < \lambda$, escollim n_0 tal que $|w-\alpha| < \lambda - 1/n_0$. Existeix $n_1 > n_0$ tal que

$$|\alpha_{n_k} - \alpha| < \lambda - \frac{1}{n_0} - |w-a|$$

per $n_k \geq n_1$. Per tant,

$$\begin{aligned} |\alpha_{n_k} - w| &\leq |w-\alpha| + |\alpha - \alpha_{n_k}| \\ &< \lambda - \frac{1}{n_0} \\ &< \lambda - \frac{1}{n_k} \end{aligned}$$

si $n_k \geq n_1$. Això vol dir que $w \in D(\alpha_{n_k}, \lambda - 1/n_k) \subset f(D)$. Com w era arbitrària, tenim que $D(\alpha, \lambda) \subset f(D)$. □

Corol·lari 3.2.1.1. *Sigui f una funció analítica en un domini simplement connex que conté el disc tancat $\overline{D(0,R)}$, llavors $f(D(0,R))$ conté un disc de radi $R|f'(0)|L$.*

Demostració. Considerem la funció

$$g(z) = \frac{f(Rz) - f(0)}{Rf'(0)}.$$

Per construcció, $g(z)$ satisfà les hipòtesis de la proposició 3.2.1. Per tant, $g(D(0,1))$ conté un disc de radi L. Llavors $f(D(0,R))$ conté un disc de radi $R|f'(0)|L$. □

3.3 Teorema Petit de Picard

El Teorema Petit de Picard ens diu que si f és una funció entera, $f(\mathbb{C})$ és el pla sencer excepte potser un punt. Abans de procedir però, necessitem un parell de lemes.

Lema 3.3.1. *Sigui Ω un domini simplement connex. Sigui f una funció analítica a Ω tal que no pren el valor 0 ni 1. Llavors existeix una funció analítica g tal que*

$$f(z) = -\exp(i\pi \cosh 2g(z))$$

per a tot $z \in G$.

Demostració. Com f no pren els valors 0 ni 1, hi ha una determinació ℓ de $\log f(z)$ definida a Ω, és a dir, $e^{\ell(z)} = f(z)$ per a tot $z \in G$. Sigui $F(z) = (2\pi i)^{-1}\ell(z)$. Si $F(a) = n$ per a algun enter n llavors $f(a) = e^{2\pi i n} = 1$, cosa que no pot passar. Per tant F no pren cap valor enter. Com, en particular, F no pren els valors 0 ni 1, podem definir

$$H(z) = \sqrt{F(z)} - \sqrt{F(z) - 1}.$$

Com $H(z) \neq 0$ per a tot z, podem definir una determinació g de $logH$ a Ω. Per tant, $\cosh 2g+1 = \frac{1}{2}(e^{2g}+e^{-2g})+1 = \frac{1}{2}(e^{g}+e^{-g})^2 = \frac{1}{2}(H+1/H)^2 = 2F = \frac{1}{i\pi}\ell$. Això ens dóna que $f = e^{\ell} = exp[i\pi + i\pi\cosh 2g] = -\exp[i\pi \cosh 2g]$. $\square$

Suposem que f i g són com en el lema, n és un enter positiu i m és qualsevol enter. Si hi ha algun punt $a \in \Omega$ tal que

$$g(a) = \pm\log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + \frac{1}{2}im\pi,$$

tenim que

$$\begin{aligned}
2\cosh 2g(a) &= e^{2g(a)} + e^{-2g(a)} = \\
&= e^{im\pi}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{\pm 2} + e^{-im\pi}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{\mp 2} = \\
&= e^{im\pi}[(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{\pm 2} + e^{-2im\pi}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{\mp 2})] = \\
&= (-1)^m[(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{\pm 2} + (-1)^{-2m}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{\mp 2})] = \\
&= (-1)^m[(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{2} + (\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{-2})] = \\
&= (-1)^m(4n-2) = \\
&= (-1)^m 2(2n-1).
\end{aligned}$$

Equivalentment, $\cosh 2g(a) = (-1)^m(2n-1)$. Com $(2n-1)$ serà un nombre senar, tenim que $f(a) = -\exp[i\pi(-1)^m(2n-1)] = 1$. Llavors g no pot assumir cap dels valors

$$\{\pm\log\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right) + \frac{1}{2}im\pi : n \geq 1, m = 0, \pm 1, ...\}.$$

Aquests punts formen els vèrtexs d'una quadrícula de rectangles en el pla. L'alçada d'un d'aquests rectangle és

$$\left|\frac{1}{2}im\pi - \frac{1}{2}i(m+1)\pi\right| = \left|-\frac{1}{2}i\pi\right| = \frac{1}{2}\pi < \sqrt{3}.$$

L'amplada és

$$\log(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) - \log(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}) > 0.$$

Com $\varphi(x) = \log(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}) - \log(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})$ és una funció decreixent, l'amplada de qualsevol rectangle és menor que $\varphi(1) = \log(1+\sqrt{2}) < 1$. Aplicant el teorema de Pitàgores, tenim que la diagonal del rectangle és menor que 2. Aquesta quadrícula del pla complex ens dóna el lema següent:

Lema 3.3.2. *Siguin Ω, f i g com en el lema 3.3.1. Llavors $g(\Omega)$ no conté cap disc de radi* 1*.*

Abans d'enunciar el Teorema Petit de Picard, enunciarem un concepte que ens facilitarà l'entesa del teorema.

Definició 3.3.1. *Sigui f holomorfa en un domini $\Omega \subset \mathbb{C}$. Sigui $w \in \mathbb{C}$. Direm que f omet el valor w si $w \notin f(\Omega)$.*

Teorema 3.3.3 (Teorema Petit de Picard)**.** *Sigui f una funció entera que omet dos valors, llavors f és constant.*

Demostració. Suposem $f(z) \neq a$ i $f(z) \neq b$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. Llavors $(f-a)(b-a)^{-1}$ omet els valors 0 i 1. Sense pèrdua de generalitat podem assumir que $f(z) \neq 0$ i $f(z) \neq 1$ per a tot z. D'acord amb el lema 3.3.2, existeix una funció entera g tal que $g(\mathbb{C})$ no conté cap disc de radi 1. A més, si f no és una funció a constant, g no és una funció constant i llavors existeix un punt z_0 tal que $g'(z_0) \neq 0$. Considerant $g(z+z_0)$ si és necessari, podem suposar que $g'(0) \neq 0$. D'acord amb el corol.lari 3.2.1.1, $g(D(0,R))$ conté un disc de radi $R|g'(0)|L$. Si R és prou gran, tindrem que $g(\mathbb{C})$ conté un disc de radi 1. Obtenim doncs una contradicció. Per tant, f ha de ser constant. $\square$

Així doncs, obtenim que tota funció entera no constant omet com a molt un valor complex. Aquest resultat és òptim, tal com veiem en la funció entera $f(z) = e^z$, la imatge de la qual és $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

4 El Teorema Gran de Picard

Per a demostrar el Teorema Gran de Picard utilizarem el Teorema de Schottky. El que diu aquest teorema i el corol·lari que el segueix és que una determinada família de funcions està acotada uniformement als subdiscs propis del disc $D(0,1)$. Segons el teorema de Montel, deduirem que aquesta família és normal. Acabarem la secció enunciant i demostrant el Teorema Gran de Picard, que ens diu que una funció analítica amb una singularitat essencial en un punt a pren tots els valors complexos en cada entorn d'a infinites vegades amb, com a màxim, l'excepció d'un punt.

4.1 Teorema de Schottky

Sigui f una funció definida en un domini simplement connex que conté l'entorn del disc $D(0,1)$ i que mai pren els valors 0 i 1. Anem a examinar la demostració del lema 3.3.1. Si ℓ és qualsevol determinació del $\log f$, considerem

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2\pi i}\ell, \\ H &= \sqrt{F} - \sqrt{F-1}, \\ g &= \text{ una branca de } \log H. \end{aligned}$$

Hi ha dos llocs en aquest esquema on se'ns permet una certa flexibilitat: en seleccionar les funcions ℓ i g que són determinacions de $\log f$ i $\log H$, respectivament. Per obtenir la prova del teorema de Schottky, especificarem aquestes determinacions requerint

$$0 \le \operatorname{Im} \ell(0) < 2\pi, \tag{3}$$

$$0 \le \operatorname{Im} g(0) < 2\pi. \tag{4}$$

Teorema 4.1.1 (Teorema de Schottky). *Per cada α i β, $0 < \alpha < \infty$ i $0 \le \beta \le 1$, existeix una constant $C(\alpha, \beta)$ tal que si f és una funció analítica en un domini simplement connex que conté el disc tancat $\overline{D(0,1)}$ i que no pren els valors 0 ni 1 i $|f(0)| \le \alpha$, llavors $|f(z)| \le C(\alpha,\beta)$ per a tot $|z| \le \beta$.*

Demostració. Només cal demostrar aquest teorema per $2 \le \alpha < \infty$. Separem en dos casos:

Cas 1. Suposem $\frac{1}{2} \le |f(0)| \le \alpha$. Considerem F, H i g com al lema 3.3.1. Tenim que

$$\begin{aligned} |F(0)| &= \frac{1}{2\pi} |\log|f(0)| + i \operatorname{Im} \ell(0)| \\ &\le \frac{1}{2\pi} \log \alpha + 1. \end{aligned}$$

Sigui $C_0(\alpha) = \dfrac{1}{2\pi}\log\alpha + 1$, llavors

$$\begin{aligned} |\sqrt{F(0)} \pm \sqrt{F(0)-1}| &\leq |\sqrt{F(0)}| + |\sqrt{F(0)-1}| \\ &= |F(0)|^{\frac{1}{2}} + |F(0)-1|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_0(\alpha)^{\frac{1}{2}} + [C_0(\alpha)+1]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Sigui $C_1(\alpha) = C_0(\alpha)^{\frac{1}{2}} + [C_0(\alpha)+1]^{\frac{1}{2}}$. Si $|H(0)| \geq 1$, llavors per (4) i (5) tenim que

$$\begin{aligned} |g(0)| &= |\log|H(0)| + i\operatorname{Im} g(0)| \\ &\leq \log|H(0)| + 2\pi \\ &\leq \log C_1(\alpha) + 2\pi. \end{aligned}$$

De manera similar, si $|H(0)| < 1$, llavors

$$\begin{aligned} |g(0)| &= -\log|H(0)| + 2\pi \\ &= \log\left(\frac{1}{|H(0)|}\right) + 2\pi \\ &= \log|\sqrt{F(0)} + \sqrt{F(0)-1}| + 2\pi \\ &\leq \log C_1(\alpha) + 2\pi. \end{aligned}$$

Sigui $C_2(\alpha) = \log C_1(\alpha) + 2\pi$. Si $|a| < 1$, el corol.lari 3.2.1.1 implica que $g(D(a, 1-|a|)$ conté un disc de radi

$$(1-|a|)|g'(a)|L. \tag{6}$$

D'altra banda, el lema 3.3.2 diu que $g(D(0,1))$ no conté cap disc de radi 1. Per tant, l'expressió (6) ha de ser menor que 1, és a dir,

$$|g'(a)| < [L(1-|a|)]^{-1} \text{ per a tot } |a| < 1. \tag{7}$$

En canvi, si $|a| > 1$, considerem γ el segment que uneix $0, a$. Llavors

$$\begin{aligned} |g(a)| &\leq |g(0)| + |g(a) - g(0)| \\ &\leq C_2(\alpha) + |\int_\gamma g'(z)dz| \\ &\leq C_2(\alpha) + |a| \max\{|g'(z)| : z \in [0,a]\}. \end{aligned}$$

Usant (7), tenim que

$$|g(a)| \leq C_2(\alpha) + \frac{|a|}{L(1-|a|)}.$$

Considerem $C_3(\alpha,\beta) = C_2(\alpha) + \beta[L(1-\beta)]^{-1}$. Llavors

$$|g(z)| \leq C_3(\alpha,\beta)$$

si $|z| \leq \beta$. Conseqüentment, si $|z| \leq \beta$,

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |\exp[\pi i \cosh 2g(z)]| \\ &\leq \exp[\pi|\cosh 2g(z)|] \\ &\leq \exp[\pi e^{2|g(z|}] \\ &\leq \exp[\pi e^{2C_3(\alpha,\beta)}]. \end{aligned}$$

Definim $C_4(\alpha,\beta) = exp\{\pi \exp[2C_3(\alpha,\beta)]\}$.

Cas 2. Suposem $0 < |f(0)| < \frac{1}{2}$. En aquest cas la funció $(1-f)$ satisfà les condicions del cas 1. Per tant, $|1-f(z)| \leq C_4(2,\beta)$ si $|z| \leq \beta$. Per tant, $|f(z)| \leq 1 + C_4(2,\beta)$. Si definim

$$C(\alpha,\beta) = \max\{C_4(\alpha,\beta), 1 + C_4(2,\beta)\}$$

hem acabat la demostració. □

Corol·lari 4.1.1.1. *Sigui f una funció analítica en un domini simplement connex que conté el disc tancat $\overline{D(0,R)}$. Suposem que f no pren els valors 0 ni 1 i que $|f(0)| \leq \alpha$. Sigui $C(\alpha,\beta)$ la constant obtinguda en el Teorema de Schotkky. Llavors $|f(z)| \leq C(\alpha,\beta)$ per a tot $|z| \leq \beta R$.*

Demostració. Considerem la funció $f(Rz), |z| \leq 1$. □

4.2 Normalitat i equicontinuïtat

Una altra de les eines principals que utilitzarem per a demostrar el Teorema Gran de Picard és el Teorema de Montel-Caratheodory. Per a demostrar-lo, abans hem d'introduir els conceptes de família de funcions normal i família de funcions equicontínua. També enunciarem el Teorema d'Arzela-Ascoli, imprescindible per a demostrar el Teorema de Montel-Caratheodory.

En aquest apartat i en el següent utilitzarem la notació $C(G,\Omega)$, que representa el conjunt de totes les funcions contínues que van de l'obert G al domini Ω.

Lema 4.2.1. *Sigui G un obert amb un recobriment $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, on cada K_n és compacte i satisfà $K_n \subset K_{n+1}^{\circ}$. Definim*

$$\rho_n(f,g) = \sup\{|f(z) - g(z)| : z \in K_n\}$$

per a tota funció $f, g \in C(G,\Omega)$. Llavors

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} \tag{8}$$

és una mètrica per a $C(G,\Omega)$.

Demostració. Com $t(1+t)^{-1} \leq 1$ per tot $t \geq 0$, la sèrie (8) és menor o igual a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, que és una sèrie convergent. Per a veure que és una mètrica únicament cal comprovar que $\rho(f,g) \leq \rho(f,h) + \rho(h,g)$ per a totes $f, g, h \in C(G,\Omega)$, ja que les altres dues condicions per a ser mètrica són òbvies. Anem a veure-ho.

Observem que la funció $f(x) = \frac{x}{1+x}$ té derivada positiva i per tant és creixent. Observem també que si $a, b \geq 0$, llavors

$$\frac{a+b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

Com $\rho_n(f,g) \leq \rho_n(f,h) + \rho_n(h,g)$ per a tot n i $f(x) = x(1+x)^{-1}$ és creixent, tenim que

$$\frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} \leq \frac{\rho_n(f,h)+\rho_n(h,g)}{1+\rho_n(f,h)+\rho_n(h,g)} \leq \frac{\rho_n(f,h)}{1+\rho_n(f,h)} + \frac{\rho_n(h,g)}{1+\rho_n(h,g)}$$

Llavors, multiplicant per 2^{-n} i sumant els termes, deduïm que

$$\rho(f,g) \leq \rho(f,h) + \rho(h,g).$$

□

Lema 4.2.2. *Sigui ρ la mètrica definida a (8). Donat $\varepsilon > 0$, existeix $\delta > 0$ i un compacte $K \subset G$ tal que per tot $f, g \in C(G, \Omega)$,*

$$\sup\{|f(z) - g(z)| : z \in K\} < \delta \Rightarrow \rho(f, g) < \varepsilon. \tag{9}$$

Recíprocament, donat $\delta > 0$ i un compacte $K \subset G$, existeix $\varepsilon > 0$ tal que per tot $f, g \in C(G, \Omega)$,

$$\rho(f, g) < \varepsilon \Rightarrow \sup\{|f(z) - g(z)| : z \in K\} < \delta. \tag{10}$$

Demostració. Suposem que $\varepsilon > 0$ està fixada. Prenem p un enter positiu tal que $\sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{2}\varepsilon$ i posem $K = K_p$. Escollim $\delta > 0$ tal que si $0 \leq t \leq \delta$, $t(1+t)^{-1} \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Suposem que f i g són funcions de $C(G, \Omega)$ que satisfan que $\sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K\} < \delta$. Com $K_n \subset K_p = K$ per $1 \leq n \leq p$, $\rho_n(f, g) < \delta$ per $1 \leq n \leq p$. Això ens dóna que

$$\frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)} < \frac{1}{2}\varepsilon$$

per $1 \leq n \leq p$. Així doncs,

$$\rho(f, g) < \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon.$$

Anem a veure l'altra implicació. Suposem que δ i K estan fixats. Com $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^{\circ}$ i K és compacte, existeix un enter $p \geq 1$ tal que $K \subset K_p$. Això ens dóna que

$$\rho_p(f, g) \geq \sup\{|f(z) - g(z)| : z \in K\}.$$

Escollim $\varepsilon > 0$ tal que si $0 \leq s < 2^p\varepsilon$, llavors $s(1-s)^{-1} < \delta$. Això implica $t(1-t)^{-1} < 2^p$ si $t < \delta$. Així, si $\rho(f, g) < \varepsilon$ llavors $\dfrac{\rho_p(f, g)}{1 + \rho_p(f, g)} < 2^p\varepsilon$. És a dir, que $\rho_p(f, g) < \delta$. $\square$

Definició 4.2.1 (família normal)**.** *Sigui $\mathcal{F}$ una família de funcions definida sobre un conjunt obert del pla complex. Direm que $\mathcal{F}$ és normal si tota successió de $\mathcal{F}$ té una subsuccessió que convergeix uniformement sobre els compactes de l'obert.*

Teorema 4.2.3. *Una família $\mathcal{F}$ és normal si i només si la seva clausura $\overline{\mathcal{F}}$ és compacte respecte la distància definida a (8).*

Demostració. Recordem el teorema de Bolzano-Weierstrass, segons el qual un espai mètric és compacte si i només si cada successió infinita té una subsuccessió convergent. El teorema s'aplica al conjunt $\mathcal{F}$, equipat amb la distància ρ, i arribem a la conclusió que $\mathcal{F}$ és compacte si i només si és normal i si les funcions límit estan en $\mathcal{F}$. D'altra banda, si és normal, també ho és la seva clausura. $\square$

Proposició 4.2.1. *Una família $\mathcal{F} \subset C(G, \Omega)$ és normal si i només si per cada compacte $K \subset G$ i cada $\delta > 0$ existeixen funcions $f_1, ..., f_n \in \mathcal{F}$ tals que per tot $f \in \mathcal{F}$ hi ha com a mínim una k, $1 \leq k \leq n$, que satisfà*

$$\sup\{|f(z) - f_k(z)| : z \in K\} < \delta.$$

Demostració. $\Rightarrow$ Suposem $\mathcal{F}$ és normal i K i $\delta > 0$ fixats. Pel lema 4.2.2 existeix $\varepsilon > 0$ tal que (10) es satisfà. Com $\overline{\mathcal{F}}$ és compacte, existeixen $f_1, ..., f_n \in \mathcal{F}$ tals que

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \{f : \rho(f, f_k) < \varepsilon\}.$$

Però a partir de l'elecció d'ε, tenim que

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \{f : |f(z) - f_k(z)| < \delta, z \in K\};$$

és a dir, f compleix la condició de la proposició.

$\Leftarrow$ Suposem ara que $\mathcal{F}$ té la condició enunciada. Donat que fàcilment es dedueix que $\overline{\mathcal{F}}$ també satisfà la condició, suposarem que $\mathcal{F}$ és tancada. Sabem que per cada compacte $K \subset G$ i cada $\delta > 0$, existeixen funcions $f_1, ..., f_n \in \mathcal{F}$ tals que per tot $f \in \mathcal{F}$ hi ha com a mínim una $k, 1 \leq k \leq n$ tal que

$$\sup\{|f(z) - f_k(z)| : z \in K\} < \delta.$$

Pel lema 4.2.2, tenim que $\rho(f, f_k) < \varepsilon$. Com z i f són arbitràries, podem trobar un subrecobriment finit de $\mathcal{F}$. Per tant, $\mathcal{F}$ (que era tancada) és compacte i per tant normal. $\square$

Sigui (X_n, d_n),$n \geq 1$, un espai mètric. Considerem $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ el seu producte cartesià. És a dir, $X = \{\xi = \{x_n\} : x_n \in X_n$ per cada $n \geq 1\}$. Per cada $\xi = \{x_n\}$ i $\eta = \{y_n\}$ de X, definim

$$d(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}. \tag{11}$$

Proposició 4.2.2. *($\prod_{n=1}^{\infty} X_n, d$), on d està definida com a (11), és un espai mètric. Si $\xi^k = \{x_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ és de $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$, llavors $\xi^k \to \xi = \{x_n\}$ si i només si $x_n^k \to x_n$ per tot n. A més, si (X_n, d_n) és compacte per tot n, llavors X és compacte.*

Demostració. Torna a ser evident que d és una mètrica.

Anem a veure el primer resultat:

$\Rightarrow$ Suposem que $d(\xi^k, \xi) \to 0$; com

$$\frac{d_n(x_n^k, x_n)}{1 + d_n(x_n^k, x_n)} < 2^n d(\xi^k, \xi)$$

tenim que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{d_n(x_n^k, x_n)}{1 + d_n(x_n^k, x_n)} = 0.$$

Això ens dóna que $x_n^k \to x_n$ per a tot $n \geq 1$.

$\Leftarrow$ Suposem ara que $x_n^k \to x_n$ per a tot $n \geq 1$, és a dir, que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{d_n(x_n^k, x_n)}{1 + d_n(x_n^k, x_n)} = 0.$$

Fixem $\varepsilon > 0$. Sigui N un nombre natural que fixarem més endavant, per hipòtesi existeix $k_0 = k_0(\varepsilon, N)$ tal que

$$\frac{d_n(x_n^k, x_n)}{1 + d_n(x_n^k, x_n)} < \varepsilon \text{ si } k \geq k_0, n = 1, ..., N.$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} d(\xi^k, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{d_n(x_n^k, x_n)}{1 + d_n(x_n^k, x_n)} &\leq \varepsilon \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \\ \leq \varepsilon + \frac{1/2^{N+1}}{1 - 1/2} \leq \varepsilon + \frac{1}{2^N} \end{aligned}$$

on el segon terme tendeix a zero si N és prou gran. Per tant, $\xi^k \to \xi$ com volíem.

Falta veure que si (X_n, d_n) és compacte per tot n, llavors (X, d) és compacte. Això és un cas particular del teorema de Tychonoff, que diu que el producte cartesià de compactes és compacte. $\square$

La següent definició juga un paper central en el Teorema d'Arzela-Ascoli:

Definició 4.2.2 (família equicontínua)**.** *Sigui $\mathcal{F} \subset C(G, \Omega)$. Direm que $\mathcal{F}$ és equicontínua en un punt z_0 si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ aleshores la distància entre $f(z)$ i $f(z_0)$ és menor a ε per a tot $f \in \mathcal{F}$.*

Direm que $\mathcal{F}$ és equicontínua en un conjunt $E \subset G$ si per tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que per tot $z, z' \in E$ i $|z - z'| < \delta$ aleshores la distància entre $f(z)$ i $f(z')$ és menor a ε per a tot $f \in \mathcal{F}$.

Notem que si $\mathcal{F}$ consisteix en una sola funció f llavors la definició que $\mathcal{F}$ sigui equicontínua en un punt z_0 és equivalent a dir que f sigui contínua a z_0. De la mateixa manera, que $\mathcal{F} = \{f\}$ sigui equicontínua en un conjunt E és equivalent a demanar que f sigui uniformement contínua sobre aquest conjunt.

A causa d'aquesta analogia amb la continuïtat i la continuïtat uniforme, la següent proposició no ens hauria de sorprendre:

Proposició 4.2.3. *Suposem $\mathcal{F} \subset C(G, \Omega)$ és equicontínua en tot punt de G. Llavors $\mathcal{F}$ és equicontínua sobre tot subconjunt compacte de G.*

Demostració. Sigui $K \subset G$ un compacte. Fixem $\varepsilon > 0$. Llavors per a tot $w \in K$ existeix $\delta_w > 0$ tal que

$$|f(w) - f(w')| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

per a tot $f \in \mathcal{F}$ sempre que $|w - w'| < \delta_w$. El conjunt $\{D(w, \delta_w) : w \in K\}$ forma un recobriment obert de K. Pel Lema de recobriment de Lebesgue, existeix $\delta > 0$ tal que per tot $z \in K$, el disc $D(z, \delta)$ està contingut en un dels elements del recobriment. Per tant, si $z, z' \in K$ tals que $|z - z'| < \delta$, existeix $w \in K$ tal que $z' \in D(z, \delta) \subset D(w, \delta_w)$. Llavors $|z - w| < \delta_w$ i $|z - z'| < \delta_w$. Això ens dóna que $|f(z') - f(w)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Així doncs, $|f(z) - f(z')| < \frac{1}{2}\varepsilon$ i $\mathcal{F}$ és equicontínua sobre K. □

Teorema 4.2.4 (Teorema d'Arzela-Ascoli)**.** *Una família de funcions $\mathcal{F}$ de $C(G, \Omega)$ és normal si i només si es compleixen les dues condicions següents:*

(i) $\sup_{f \in \mathcal{F}} |f(z)|$ *és finit per tot $z \in G$.*

(ii) $\mathcal{F}$ és equicontínua per tot $z \in G$.

Demostració. $\Rightarrow$ Suposem que $\mathcal{F}$ és normal. Notem que per tot $z \in G$, l'aplicació de $C(G, \Omega)$ a $\mathbb{C}$ definida per $f \to f(z)$ és contínua. Com $\mathcal{F}^-$ és compacte, $\{f(z) : f \in \overline{\mathcal{F}}\}$ és compacte i deduïm *(i)*. Per a veure *(ii)*, fixem un punt $z_0 \in G$ i $\varepsilon > 0$. Triem $R > 0$ tal que $K = \overline{D(z_0, R)} \subset G$; K és compacte. Per la proposició 4.2.1 tenim que existeixen funcions $f_1, ..., f_n \in \mathcal{F}$ tals que per a tot $f \in \mathcal{F}$ existeix almenys una f_k tal que

$$\sup\{|f(z) - f_k(z)| : z \in K\} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{12}$$

Com f_k és contínua, existeix $\delta > 0, 0 < \delta < R$ tal que si $|z - z_0| < \delta$,

$$|f_k(z) - f_k(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

per $1 \leq k \leq n$. Per tant, si $|z - z_0| < \delta$, $f \in \mathcal{F}$ i triem k tal que (12) es compleix, llavors

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f_k(z)| + |f_k(z) - f_k(z_0)| + |f_k(z_0) - f(z_0)| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Per tant $\mathcal{F}$ és equicontínua a z_0.

$\Leftarrow$ Suposem ara que $\mathcal{F}$ satisfà les condicions *(i)* i *(ii)*; provarem que $\mathcal{F}$ és normal pel conegut procés de diagonalització de Cantor. Sigui $\{z_n\}$ la successió densa de tots els punts de G amb part real i imaginària racional (per $z \in G$ i $\delta > 0$ existeix z_n tal que $|z_n - z| < \delta$). De la successió $\{f_n\}$ extraurem una subsuccessió que sigui convergent als punts $\{z_n\}$. Això serà possible gràcies a la condició *(i)*. Per tant, podem trobar una sèrie de subíndexs

$$\begin{array}{l} n_{11} < n_{12} < \cdots < n_{1j} < \dots \\ n_{21} < n_{22} < \cdots < n_{2j} < \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ n_{k1} < n_{k2} < \cdots < n_{kj} < \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

tals que cada fila està continguda en l'anterior i $\lim_{j\to\infty} f_{n_{kj}}(z_k)$ existeix per tot k. La successió diagonal $\{n_{jj}\}$ és estrictament creixent i, a més, és una subsuccessió de cada fila. Així doncs, $\{f_{n_{jj}}\}$ és una subsuccessió de $\{f_n\}$ que convergeix als punts $\{z_n\}$. Per no carregar la notació, anomenarem $\{n_j\}$ a aquests subíndexs $\{n_{jj}\}$.

Considerem ara un conjunt compacte $E \subset G$ i suposem que $\mathcal{F}$ és equicontínua en aquest compacte. Hem de veure que $\{f_{n_j}\}$ convergeix uniformement en E. Donat $\varepsilon > 0$ triem $\delta > 0$ tal que per tot $z, z' \in E$ i $f \in \mathcal{F}$ tinguem que si $|z - z'| < \delta$ aleshores $|f(z) - f(z')| < \varepsilon/3$. Com

E és compacte, existeix un recobriment finit. Triem un punt z_k de cada un d'aquests conjunts del recobriment. Llavors existeix i_0 tal que si $i, j \geq i_0$, llavors $|f_{n_i}(z_k) - f_{n_j}(z_k)| < \varepsilon/3$ per tot z_k. Per tot $z \in E$, un d'aquests z_k està a distància menor a δ de z; és a dir, $|f_{n_i}(z) - f_{n_i}(z_k)| < \varepsilon/3$ i $|f_{n_j}(z) - f_{n_j}(z_k)| < \varepsilon/3$. Les tres desigualtats unides ens donen que:

$$\begin{aligned}|f_{n_i}(z) - f_{n_j}(z)| &\leq |f_{n_i}(z) - f_{n_i}(z_k)| + |f_{n_i}(z_k) - f_{n_j}(z_k)| + |f_{n_j}(z_k) - f_{n_j}(z)| \\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Com z era arbitrària, queda demostrat $\{f_{n_j}\}$ és uniformement convergent en E. Per tant, $\mathcal{F}$ és normal. $\square$

4.3 Teoremes de Montel

Teorema 4.3.1 (Teorema de Montel)**.** *Una família de funcions holomorfes definides en un conjunt obert del pla complex és normal si, i només si, està uniformement acotada en els compactes de l'obert.*

Demostració. $\Rightarrow$ Suposem $\mathcal{F}$ una família normal de funcions definides a un obert G que no està uniformement acotada en els compactes de G. Llavors existeix un compacte $K \subset G$ tal que $\sup\{|f(z)| : z \in K, f \in \mathcal{F}\} = \infty$. Això vol dir que existeix una successió $\{f_n\}$ a $\mathcal{F}$ tal que el suprem de $\{|f_n(z)| : z \in K\}$ és més gran o igual a n. Com $\mathcal{F}$ és normal hi ha una funció f i una subsuccessió f_{n_k} tals que $f_{n_k} \to f$ uniformement sobre els compactes de G. Així, el suprem de $\{|f_{n_k}(z) - f(z)| : z \in K\}$ tendeix a zero quan $k \to \infty$. Per tant, $\sup\{|f_{n_k}(z)| : z \in K\} = \infty$, que és una contradicció.

$\Leftarrow$ Ara suposem que $\mathcal{F}$ està localment acotada a un obert G. Farem servir el teorema d'Arzela-Ascoli per veure que $\mathcal{F}$ és normal. Com la condició *(i)* del teorema es satisfà de forma clara, hem de veure que $\mathcal{F}$ és equicontínua a cada punt de G. Fixem un punt $a \in G$ i $\varepsilon > 0$. Per hipòtesi, existeixen $r > 0$ i $M > 0$ tals que $\overline{D(a,r)} \subset G$ i $|f(z)| \leq M$ per tot $z \in \overline{D(a,r)}$ i $f \in \mathcal{F}$. Sigui $|z - a| < \frac{1}{2}r$ i $f \in \mathcal{F}$, llavors utilitzant la fórmula de Cauchy aplicada a la corba $\gamma(t) = a + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$,

$$\begin{aligned} |f(a) - f(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(w)(a-z)}{(w-a)(w-z)} dw \right| \\ &\leq \frac{4M}{r} |a - z|. \end{aligned}$$

Prenent $\delta < \min\{\frac{1}{2}r, \frac{r}{4M}\}$, obtenim que $|z-a| < \delta$. Per tant, $|f(z)-f(a)| < \varepsilon$ per tot $f \in \mathcal{F}$. $\square$

Teorema 4.3.2 (Teorema de Montel-Caratheodory)**.** *Sigui $\mathcal{F}$ la família de funcions analítiques d'un domini Ω que no prenen els valors 0 ni 1. Llavors $\mathcal{F}$ és normal a $C(\Omega, \mathbb{C}_\infty)$.*

Demostració. Fixem un punt $z_0 \in \Omega$ i definim les famílies $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ com

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \{f \in \mathcal{F} : |f(z_0)| \leq 1\} \\ \mathcal{H} &= \{f \in \mathcal{F} : |f(z_0)| \geq 1\}. \end{aligned}$$

Així $\mathcal{F} = \mathcal{G} \cup \mathcal{H}$. Veurem que $\mathcal{G}$ és normal en $H(G)$ i que $\mathcal{H}$ és normal en $C(\Omega, \mathbb{C}_\infty)$ (que ∞ és el límit de la seqüència en $\mathcal{H}$ és evident si considerem funcions constants). Per veure que $\mathcal{G}$ és normal en $H(G)$, farem servir el Teorema de Montel; per tant, és suficient demostrar que $\mathcal{G}$ està localment acotat.

Si a és un punt de Ω, considerem $\gamma \subset \Omega$ una corba que va de z_0 a a. Considerem $D_0, D_1, ...D_n \subset \Omega$ els discs de centre $z_0, z_1, ..., z_n = a$ a γ tals que z_{k-1} i z_k estan continguts en $D_{k-1} \cap D_k$ per a tot $1 \leq k \leq n$, com veiem a la figura 1:

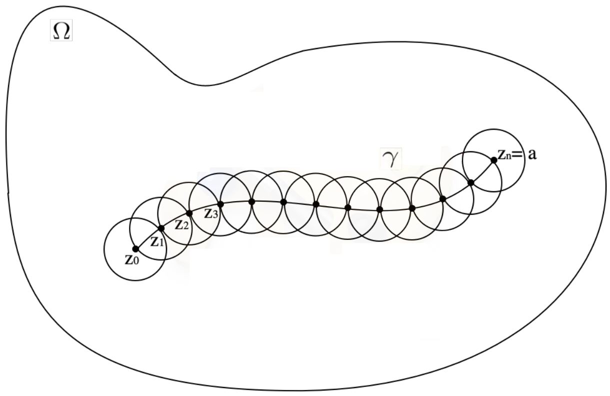

Figura 1: Recobriment de la corba γ.

Assumim també que $\overline{D_k} \subset \Omega$ per a tot $0 \leq k \leq n$. Apliquem ara el Teorema de Schottky a D_0. Es segueix que existeix una constant C_0 tal que $|f(z)| \leq C_0$ per a tot $z \in D_0, f \in \mathcal{G}$. (Si $D_0 = B(z_0, r)$ i $R > r$ és tal que $\overline{D(z_0, R)} \subset \Omega$, llavors, segons el corol·lari 4.1.1.1, $|f(z)| \leq C(1, \beta)$ per a tot $z \in D_0, f \in \mathcal{G}$ sempre que triem β tal que $r < \beta R$). Particularment, $|f(z_1)| \leq C_0$ i per tant el Teorema de Schottky ens dona que $\mathcal{G}$ està acotat uniformement per una constant C_1 en D_1. Iterant aquest argument, obtenim que $|f(a)|$ està uniformement acotat. Com a era arbitrari, tenim que $\mathcal{G}$ està localment acotat. Pel Teorema de Montel, $\mathcal{G}$ és normal en $H(\Omega)$.

Ara considerem el conjunt $\mathcal{H}$. Si $f \in \mathcal{H}$ llavors $1/f$ és analítica a Ω perquè f mai s'anul·la. Tampoc pren mai el valor 1. A més a més, $|(1/f)(z_0)| \leq 1$ per definició. Per tant $\widetilde{\mathcal{H}} = \{1/f : f \in \mathcal{H}\} \subset \mathcal{G}$ i $\widetilde{\mathcal{H}}$ és normal a $H(\Omega)$. Llavors si $\{f_n\}$ és una successió de $\mathcal{H}$, hi ha una subsuccessió $\{f_{n_k}\}$ i una funció analítica $h \in \Omega$ tal que $\{1/f_n\}$ convergeix uniformement a h en els compactes de Ω. Pel Teorema de Hurwitz, o bé $h \equiv 0$ o bé h no s'anul·la mai. Si $h \equiv 0$ és fàcil veure que $f_{n_k}(z) \to \infty$ uniformement en subconjunts compactes de Ω. Si h mai pren el valor 0 llavors $1/h$ és analítica i per tant $f_{n_k}(z) \to 1/h(z)$ uniformement en subconjunts compactes de Ω. $\square$

4.4 Teorema Gran de Picard

En aquest apartat demostrarem el Teorema Gran de Picard i enunciarem els corol·laris que en deriven.

Teorema 4.4.1 (Teorema Gran de Picard)**.** *Sigui f una funció analítica amb una singularitat essencial en $z = a$. Llavors, en cada entorn d'a, $f(z)$ pren tots els valors complexos possibles infinites vegades amb, com a màxim, l'excepció d'un punt.*

Demostració. Sense pèrdua de generalitat podem suposar que f té la singularitat essencial en el punt $z = 0$. Suposem que existeix una R tal que hi ha dos nombres que no pertanyen al conjunt $\{f(z) : 0 < |z| < R\}$; obtindrem una contradicció. Sense pèrdua de generalitat suposem també que $f(z) \neq 0, 1$ per tot $0 < |z| < R$. Sigui $G = D(0, R) \setminus \{0\}$, definim $f_n : G \to \mathbb{C}$ com $f_n(z) = f(z/n)$. És evident que f_n és analítica a G i que cap f_n pren els valors 0 ni 1. Pel teorema 4.3.2, $\{f_n\}$ és una família normal a $C(G, \mathbb{C}_\infty)$.

Sigui $\{f_{n_k}\}$ una subsuccessió de $\{f_n\}$ tal que $f_{n_k} \to \varphi$ uniformement a $\{z : |z| = \frac{1}{2}R\}$, on φ és una funció analítica a G o bé $\varphi \equiv \infty$. Si φ és analítica considerem $M = \max\{|\varphi(z)| : |z| = \frac{1}{2}R\}$; llavors $|f(z/n_k)| = |f_{n_k}(z)| \leq |f_{n_k}(z) - \varphi(z)| + |\varphi(z)| \leq 2M$ per n_k suficientment gran i $|z| = \frac{1}{2}R$. Així $|f(z)| \leq 2M$ per a $|z| = R/2n_k$ i n_k suficientment gran. Per la versió final del Principi del Mòdul Màxim, f està uniformement fitada en discos concèntrics a 0. Això ens dóna que f està fitada per $2M$ en un entorn del zero i, per tant, $z = 0$ ha de ser una singularitat evitable. Per tant, φ no pot ser analítica, i deduïm que $\varphi \equiv \infty$.

Suposem que $f_n(z) = f(\frac{z}{n}) \to \infty$ uniformement sobre els compactes de $D(0, R) \setminus \{0\}$ quan $n \to \infty$. En particular, $f(\frac{z}{n}) \to \infty$ uniformement a $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R/2\}$. Això implica que $\lim_{w \to 0} |f(w)| = \infty$. Llavors 0 ha de ser un pol de f. Contradicció amb les hipòtesis.

Havíem suposat que el 0 era una singularitat essencial. Per tant, com a màxim no s'assoleix un nombre complex. Si existís un nombre complex w tal que $f(z)$ pren aquest valor un nombre finit de vegades, podríem prendre un disc suficientment petit i tornaríem a arribar a un disc perforat en que f no pren dos valors. Per tant, f pren tots els valors infites vegades amb l'excepció de com a molt un punt. □

Per exemple, la funció $f(z) = e^{1/z}$ té una singularitat essencial en 0, però mai pren 0 com a valor.

Una altra manera d'explicar el Teorema Gran de Picard és la següent:

Corol·lari 4.4.1.1. *Si f té una singularitat aïllada a $z = a$ i si hi ha dos nombres complexos que f no pren infinitament sovint, llavors $z = a$ és un pol o una singularitat evitable.*

Demostració. Si hi ha dos valors que f pren únicament un nombre finit de vegades a $D(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$, podem triar $\delta < \varepsilon$ tal que f no prengui aquests valors en cap punt de $D(a, \delta) \setminus \{a\}$. Pel Teorema Gran de Picard, a no pot ser singularitat essencial de f. És a dir, a ha de ser un pol o una singularitat evitable. $\square$

Podem aplicar aquest corol·lari a la funció

$$f(z) = \frac{1}{1 - e^{1/z}}$$

que és meromorfa a $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, el pla complex sense l'origen. Té una singularitat essencial en $z = 0$ i assoleix el valor ∞ infinitament sovint en qualsevol entorn de 0. Tanmateix, no aconsegueix mai els valors 0 o 1.

Corol·lari 4.4.1.2. *Si f és una funció entera no polinomial, llavors f pren tots els valors complexos un nombre infinit de vegades excepte, com a molt, un valor.*

Demostració. Considerem la funció $g(z) = f(1/z)$. Com f no és polinomial, g té una singularitat essencial a $z = 0$. Pel Teorema Gran de Picard, g i, aleshores, f, prenen tots els valors complexos infinites vegades amb l'excepció de com a molt un punt. $\square$

Destacar que aquest últim corol·lari és una millora del Teorema Petit de Picard.

Referències

[1] Picard, Émile. *Mémoire sur les fonctions entières*, Annales scientifiques de l'É.N.S., segona edició, volum 9, 1880.

[2] Conway, John B. *Functions of One Complex Variable*, segona edició, Springer, Nova York, EE.UU., 1978.

[3] Ahlfors, Lars. *Complex Analysis*, tercera edició, Mc Graw-Hill, 1979.

[4] Bruna, Joaquim; Cufí, Julià. *Anàlisi Complexa*, primera edició, Manuals UAB 49, Bellaterra, Espanya, 2008.

[5] Aguadé, Jaume. *Apunts d'un curs de topologia elemental*, UAB, 2017.