

Задание составлено на основе материалов Алексея Балицкого, Рената Гимадеева и Ильи Козлова.

Рекомендации к чтению

- Можете потихоньку начинать читать 34 главу в Кормене. Там хорошо и очень подробно рассказано о том, чему посвящена основная часть первой половины курса.
- В Мусатове во 2 и 3 главах можно найти определения, базовые утверждения и их лаконичные доказательства.
- Кому больше нравится слушать, в академии Яндекса есть [курс Верещагина](#) по теории сложности, сейчас можно посмотреть третью лекцию оттуда. Это полезно для улучшения понимания.

Ключевые понятия: класс P , бинарный поиск, динамическое программирование, класс NP , полиномиальная сводимость.

Обязательные задачи

Задача 1 (1) Треугольными числами называют числа вида $n(n+1)/2$, где n – натуральное. Покажите, что язык, состоящий из двоичных записей треугольных чисел принадлежит классу P .

Подсказка: подумайте, как из того, что я рассказал в начале семинара следует то, что язык двоичных записей квадратов натуральных чисел полиномиален.

Задача 2 (2) Дано n проводов с длинами $l_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, n$ и число k . Предложите как можно более асимптотически эффективный алгоритм, возвращающий наибольшее натуральное число L такое, что из проводов можно нарезать k кусков длины L . Оцените его сложность.

Задача 3 ($\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1$) Докажите, что следующие языки лежат в NP

- (a) Язык графов, содержащих гамильтонов путь.
- (b) Язык двоичных записей составных чисел.
- (c) Язык выполнимых булевых формул в форме 3-КНФ.
- (d) Язык графов, которые можно раскрасить в три цвета.
- (e) Язык пар изоморфных графов.
- (f) Произвольный $L \in P$.

Задача 4 (3 + 1)

- (a) Докажите, что если $L \in P$, то $L^* \in P$.
- (b) Докажите, что если $L \in NP$, то $L^* \in NP$.

Задача 5 (3) Покажите, что классу NP принадлежит язык несовместных систем линейных уравнений с целыми коэффициентами от 2019 неизвестных.

$co - NP$ – это класс языков, дополнение которых лежит в NP .

Задача 6 (1 + 1)

- (a) Сформулируйте напрямую (через кванторы) определение класса $co - NP$ (без ссылки на NP)
- (b) Докажите, что $P \subset co - NP$

Класс языков EXP – это класс языков, которые принимаются алгоритмами с экспоненциальной сложностью. Формально, язык $L \in EXP$, если существует алгоритм F_L (машина Тьюринга), сложность которого ограничена функцией $2^{poly(n)}$, где n – длина входа, такой, что он принимает все слова из L и отвергает все слова не из L .

Задача 7 (2 + 1) Докажите, что $NP \subset EXP$ и $co - NP \subset EXP$.

Задача 8 (2) На вход подаются описания n событий в формате (s, f) – время начала и время окончания. Требуется составить расписание для человека, который хочет принять участие в максимальном количестве событий. Например, события это доклады на конференции или киносеансы на фестивале, которые проходят в разных аудиториях. Предположим, что участвовать можно только с начала события и до конца. Рассмотрим три жадных алгоритма.

1. Выберем событие кратчайшей длительности, добавим его в расписание, исключим из рассмотрения события, пересекающиеся с выбранным. Продолжим делать то же самое далее.
2. Выберем событие, наступающее раньше всех, добавим его в расписание, исключим из рассмотрения события, пересекающиеся с выбранным. Продолжим делать то же самое далее.
3. Выберем событие, завершающееся раньше всех, добавим его в расписание, исключим из рассмотрения события, пересекающиеся с выбранным. Продолжим делать то же самое далее.

Какой алгоритм вы выберете? В качестве обоснования для каждой процедуры проверьте, что она является оптимальной (т.е. гарантирует участие в максимальном числе событий) или постройте конкретный контрпример.

Задача 9 (2) Дан массив $a[1, \dots, n]$ целых чисел. Предложите эффективный алгоритм нахождения подмассива (подряд идущего) $a[i, \dots, j]$, такого что $\sum_{k=i}^j a[k]$ максимальна.

Задача 10 (2 + 2 + 2) Простые, но важные задачи на определение сводимости по Карпу

- (a) Докажите, что если $L_1 \leq_P L_2$ и $L_2 \leq_P L_3$, то $L_1 \leq_P L_3$.
- (b) Докажите, что если $L_1 \leq_P L_2$ и $L_2 \in NP$, то $L_1 \in NP$.
- (c) Докажите, что если $L_1 \in P$, то $\forall L_2 \neq \emptyset, \Sigma^*$ выполнено $L_1 \leq_P L_2$.

Дополнительные задачи (можно сдавать в течение семестра)

Задача 11 (4) Будем говорить, что задача (не язык!) лежит в NP , если она сводится по Куку к некоторому языку из NP . Докажите, что задача поиска максимальной клики в графе принадлежит NP . (Для этого предъявите язык, докажите, что он из NP и докажите сводимость задачи к нему).

Задача 12 (6) Выясните статус языка

$$\text{FACTORING}' = \{(n, a, b) \mid \text{у числа } n \text{ есть делитель на отрезке } [a, b]\}$$