Задание составлено на основе материалов Алексея Балицкого, Рената Гимадеева и Ильи Козлова.

Организационные вопросы (как не завалить этот курс)

Есть две очень важные контрольные, одна примерно в конце марта, другая в конце семестра. К ним нужно серьезно подготовиться и постараться написать как можно лучше. Если обе написаны не на неуд, то итоговая оценка вычисляется по формуле $\max\left(\frac{1}{2}(\text{К}_1+\text{К}_2), \text{С}\right)$ (округление к ближайшему целому), где $\text{К}_1, \text{К}_2$ – оценки за контрольные, а С – оценка от семинариста.

Оценка от меня будет вычисляться по формуле $\min(\text{Д}+\text{Т}+\text{Б}, \alpha(\text{К}_1+\text{К}_2))$ (α по умолчанию равно 1). Здесь $\text{Д} \in [0,3]$ – это оценка за домашние задания, которая равна сумме баллов за все решенные задачи (и основные, и дополнительные), деленная на число баллов, которое можно набрать за основные задачи, и оттрешхолденная до 3 (больше трех баллов получить нельзя). $\text{Т} \in [0,6]$ – оценка за семинарские мини-контрольные, которые будут проходить в начале каждой пары. Оценки (в шкале от 0 до 1) за них будут заноситься в гугл-таблицу, ссылка на просмотр которой будет выложена в телеграмм-канале. Эти оценки усредняются и умножаются на 6. $\text{Б} \in \{0,1\}$ – бонусный балл, который можно получить, например, за активное решение дополнительных задач.

Система довольно сложная, но если ты будешь посещать семинары и делать домашние задания, то у тебя все должно быть хорошо.

Рекомендации к чтению (по этому заданию)

- Кормен 3-е издание, главы 3 и 4, то есть все, что касается асимптотического анализа (параграфы 4.1 и 4.6 можно пропустить).
- Кормен 3-е издание, пункт 9.3 (линейный в худшем случае алгоритм поиска порядковой статистики).

  В телеграмм-канал я скину именно 3-е издание Кормена. Если у Вас другое издание, то посмотрите в электронной версии темы и найдите соответствующие пункты в своей книге.
- Один из источников, которые я скину в телеграмм-канал, где объясняется, как решать линейные реккурентные соотношения.
- Мусатов, глава 1 (10 страничек, очень полезные для лучшего понимания того, что такое алгоритмы и модели вычислений).

Обязательные задачи

Задача 1 $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$

(a) Докажите, что $\log(n!) = \Theta(n \log n)$ (формулой Стирлинга пользоваться нельзя).

(b) Докажите, что $\forall \varepsilon > 0$ выполнено, что $n \log n = O(n^{1+\varepsilon})$ (считайте известным фактом, что $e^m > P(m)$, начиная с некоторого m для любого многочлена P).

(c) Найдите Θ-асимптотику C_{2n}^n (можно пользоваться формулой Стирлинга).

Напоминание (формула Стирлинга): $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}(1 + o(1))$.

(d) Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha = \begin{cases} \Theta(n^{\alpha+1}) \text{ при } \alpha > -1, \\ \Theta(\log n) \text{ при } \alpha = -1, \\ \Theta(1) \text{ при } \alpha < -1. \end{cases}$$

Для удобства приведем здесь формулировку основной теоремы о рекуррентных оценках.

Теорема. *Для решения рекурренты вида*

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

где $f(n)$ – известная положительная функция, $a \geqslant 1$, $b > 1$, верно следующее.

1. *Если $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.*
2. *Если $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, то $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.*
3. *Пусть $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Пусть также выполнено дополнительное условие регулярности функции f: $af(n/b) \leqslant cf(n)$ при некотором $c < 1$ и всех достаточно больших n. Тогда $T(n) = \Theta(f(n))$.*

Задача 2 $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1\right)$ Оцените Θ-асимптотику рекуррент

(a) $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$.

(b) $T(n) = 10T(n/2) + \Theta\left(\dfrac{n^4}{\log n}\right)$.

(c) $T(n) = 4T(n/2) + \Theta(n \log n)$.

(d) $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n \log n)$

Указание: в этом пункте основная теорема неприменима. Попробуйте нарисовать дерево рекурсии, представить $T(n)$ в виде конечной суммы и прикинуть асимптотику. Затем докажите свое предположение по индукции. При доказательстве асимптотических оценок по индукции надо быть очень аккуратным. Очень рекомендую прочитать по этому поводу пункт 4.3 в Кормене. Любое другое правильное решение этого пункта конечно тоже принимается.

Задача 3 (1) Пусть

$$A_n = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

матрица $n \times n$, а $d_n = \det A_n$. Найдите Θ-асимптотику d_n.
Указание: получите рекуррентное соотношение для d_n.

Задача 4 (2) Пусть $f(n)$ – число пар натуральных чисел (x, y), которые являются решением уравнения $2x + 3y = n$. Найдите Θ-асимптотику $f(n)$.

Задача 5 ($\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$) Функция f реализована следующим образом

```
def f(n):
    if n > 1:
        print('around the world')
        print('around the world')
        print('around the world')
        f(n // 2)
        f(n // 4)
```

Пусть $g(n)$ обозначает количество строк 'around the world', которые будут напечаны при вызове f(n).

(a) Найдите явное выражение для $g(n)$, если n – точная степень двойки.

(b) Оцените асимптотику $g(n)$ как функции натурального аргумента.

Задача 6 (1 + 1) Представим на секунду, что в детерминированном алгоритме поиска медианы производится разбиение не на пятёрки элементов, а на семёрки. Анализ (аналогичный семинарскому) приводит к рекурренте для оценки сложности этой процедуры:

$$T(n) \leqslant T\left(\left\lceil \frac{n}{7} \right\rceil\right) + T\left(\left\lceil \frac{5n}{7} \right\rceil + 8\right) + O(n).$$

(a) Если игнорировать округления и слагаемые в скобках (хотя по умолчанию неочевидно, можно ли так делать), то получится рекуррента

$$T(n) \leqslant T\left(\frac{n}{7}\right) + T\left(\frac{5n}{7}\right) + O(n).$$

При помощи дерева рекурсий оцените сверху $T(n)$ (т.е. получите оценку вида $T(n) = O(\dots)$). Можете считать для простоты, что $n = 7^k$.

(b) Покажите, что оценка сверху, полученная в предыдущем пункте, останется верной, если ничего не игнорировать. Не забывайте, что мы работаем с оценками числа тактов работы, поэтому можете считать, что функция $T(\cdot)$ положительная и неубывающая.

Комментарий. Интуитивно понятно, что восьмёрка в скобках в правой части на асимптотическую сложность не повлияет, однако я прошу строго обосновать этот факт. Попробуйте сделать линейную замену типа $m = n - 70$, а затем сдвижку аргумента в духе $S(m) = T(m+70)$ (здесь 70 взято как почти произвольное большое число). Получится рекуррента типа $S(m) \leqslant S(\lceil \frac{m}{7} \rceil - 60) + S(\lceil \frac{5m}{7} \rceil - 12) + O(m)$. Монотонность функции S поможет упростить рассуждения.

Задача 7 (2) В этой задаче Вам нужно вспомнить или узнать про производящие функции и про числа Каталана. Я скину источник, где можно узнать, что такое производящие функции в телеграмм-канал.

Покажите как получить замкнутый вид производящей функции последовательности C_n, где C_n – число правильных скобочных последовательностей длины $2n$.

Дополнительные задачи (можно сдавать в течение семестра)

Задача 8 (2) Найдите Θ-асимптотику последовательности

$$T(n) = T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \Theta(\log^2 n).$$

Задача 9 (3) Оцените трудоемкость рекурсивного алгоритма, разбивающего исходную задачу размера n на n задач размеров $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ каждая, используя для этого $O(n)$ операций.

Задача 10 (4) Оцените как можно точнее высоту дерева рекурсии для рекурренты

$$T(n) = T(n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor) + T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \Theta(n).$$