품질공학 HW #5

2020170837 최원준

9.1. The data in Table 9E.1 represent individual observations on molecular weight taken hourly from a chemical process.

The target value of molecular weight is 1,050 and the process standard deviation is thought to be about $\sigma = 25$.

(a) Set up a tabular CUSUM for the mean of this process. Design the CUSUM to quickly detect a shift of about 1.0σ in the process mean.

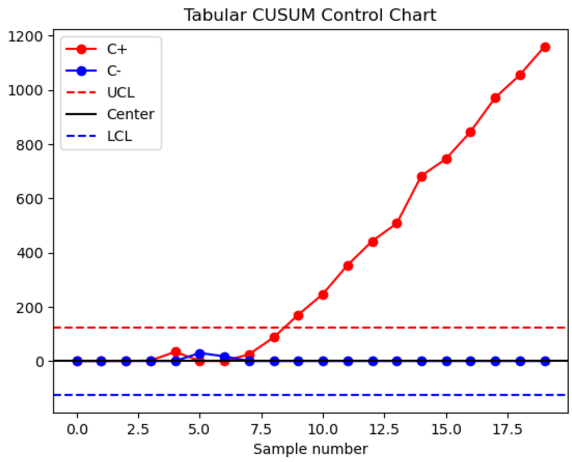
(b) Is the estimate of σ used in part (a) of this problem reasonable?

(a) $\mu_0 = 1050, \quad \sigma = 25$

$$K = \frac{1 \cdot 25}{2} = 12.5, \quad H = 5 \cdot 25 = 125$$

Period	Input	C_Plus	N_Plus	C_Minus	N_Minus
1	1045	0	0	0	0
2	1055	0	0	0	0
3	1037	0	0	0.5	0
4	1064	1.5	1	0	0
5	1095	34	2	0	0
6	1008	0	0	29.5	0
7	1050	0	0	17	0
8	1087	24.5	1	0	0
9	1125	87	2	0	0
10	1146	170.5	3	0	0
11	1139	247	4	0	0
12	1169	353.5	5	0	0
13	1151	442	6	0	0
14	1128	507.5	7	0	0
15	1238	683	8	0	0
16	1125	745.5	9	0	0
17	1163	846	10	0	0
18	1188	971.5	11	0	0
19	1146	1055	12	0	0
20	1167	1159.5	13	0	0

K = 12.5 & H = 125



(b)

$n(= sample\ size) = 1$ 일 때는 $\frac{\overline{MR}}{d_2}$를 $\hat{\sigma}$ 으로 사용한다.

```
[63]  print(np.mean(MR))
      ✓ 0.0s
...   38.8421052631579
```

$$\hat{\sigma} = \frac{38.84}{1.128} = 34.43$$

문제에서 추정한 σ 값인 25와는 큰 차이를 보이고 있으므로 적절한 추정이 아니라고 볼 수 있다.

9.2. Rework Exercise 9.1 using a standardized CUSUM.

Standardized CUSUM 은 다음과 같이 정의된다.

9.1.4 The Standardized CUSUM

Many users of the CUSUM prefer to standardize the variable x_i before performing the calculations. Let

$$y_i = \frac{x_i - \mu_0}{\sigma} \tag{9.8}$$

be the standardized value of x_i. Then the standardized CUSUMs are defined as follows.

The Standardized Two-Sided CUSUM

$$C_i^+ = \max\left[0, y_i - k + C_{i-1}^+\right] \tag{9.9}$$

$$C_i^- = \max\left[0, -k - y_i + C_{i-1}^-\right] \tag{9.10}$$

$\mu_0 = 1050, \quad \sigma = 25$

$K = \frac{1 \cdot 1}{2} = 0.5, \quad H = 5 \cdot 1 = 5$

Period	Input	C_Plus	N_Plus	C_Minus	N_Minus
1	-0.2	0	0	0	0
2	0.2	0	0	0	0
3	-0.52	0	0	0.02	0
4	0.56	0.06	1	0	0
5	1.8	1.36	2	0	0
6	-1.68	0	0	1.18	0
7	0	0	0	0.68	0
8	1.48	0.98	1	0	0
9	3	3.48	2	0	0
10	3.84	6.82	3	0	0
11	3.56	9.88	4	0	0
12	4.76	14.14	5	0	0
13	4.04	17.68	6	0	0
14	3.12	20.3	7	0	0
15	7.52	27.32	8	0	0
16	3	29.82	9	0	0
17	4.52	33.84	10	0	0
18	5.52	38.86	11	0	0
19	3.84	42.2	12	0	0
20	4.68	46.38	13	0	0

K = 0.5 & H = 5

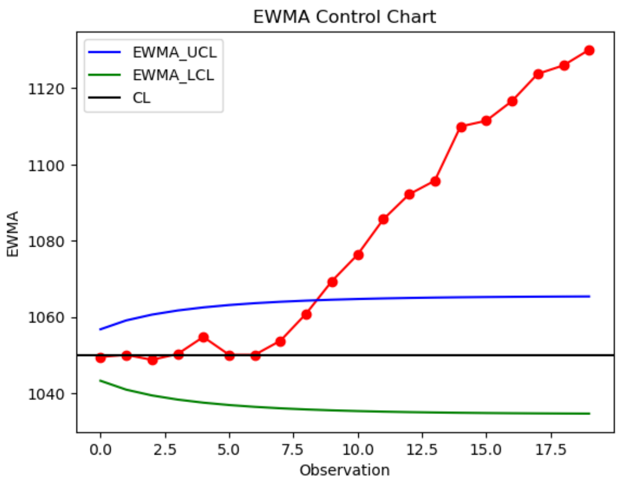
9.25. Rework Exercise 9.1 using an EWMA control chart with $\lambda = 0.1$ and $L = 2.7$. Compare your results to those obtained with the CUSUM.

$\mu_0 = 1050, \quad \sigma = 25$

$\lambda = 0.1, \quad L = 2.7$

```
Rate = 0.1 & Width = 2.7
EWMA Statistics Table
```

Period	Input	Z_value	UCL	LCL
1	1045	1049.5	1056.75	1043.25
2	1055	1050.05	1059.08	1040.92
3	1037	1048.75	1060.6	1039.4
4	1064	1050.27	1061.69	1038.31
5	1095	1054.74	1062.5	1037.5
6	1008	1050.07	1063.12	1036.88
7	1050	1050.06	1063.6	1036.4
8	1087	1053.76	1063.98	1036.02
9	1125	1060.88	1064.28	1035.72
10	1146	1069.39	1064.51	1035.49
11	1139	1076.35	1064.7	1035.3
12	1169	1085.62	1064.86	1035.14
13	1151	1092.16	1064.98	1035.02
14	1128	1095.74	1065.07	1034.93
15	1238	1109.97	1065.15	1034.85
16	1125	1111.47	1065.22	1034.78
17	1163	1116.62	1065.27	1034.73
18	1188	1123.76	1065.31	1034.69
19	1146	1125.98	1065.34	1034.66
20	1167	1130.09	1065.37	1034.63




```
for period, c_p in zip(np.arange(ex_data1['x'].shape[0] + 1), c_plus):
    if c_p > UCL:
        print(f'First "out of control" at period {period}')
        break
```

✓ 0.0s

```
First "out of control" at period 9
```

```
for period, z_, ucl in zip(np.arange(ex_data1['x'].shape[0] + 1)[1:], z[1:], EWMA_UCL[1:]):
    if z_ > ucl:
        print(f'First "out of control" at period {period}')
        break
```

✓ 0.0s

```
First "out of control" at period 10
```

이 문제에서는 CUSUM chart는 period 9부터 불량을 탐지하였고 EWMA는 period 10 부터 불량을 탐지하였다.

CUSUM은 변동 감지에 상대적으로 민감하여 공정의 작은 변동도 빠르게 포착하는 반면,

EWMA는 공정의 전체적인 방향을 탐지하는 데에 더 유리해보인다.

CUSUM 과 달리 EWMA 는 각 period 마다 UCL 과 LCL을 새로 계산해줌으로 더 정확한 변동 감지가 가능하다. 두 차트 모두 작은 변동에는 민감하게 반응하지만, 큰 변동에는 Shewart chart 만큼 빠르게 감지하지는 못한다.

9.26. Consider a process with $\mu_0 = 10$ and $\sigma = 1$. Set up the following EWMA control charts:

(a) $\lambda = 0.1, L = 3$

(b) $\lambda = 0.2, L = 3$

(c) $\lambda = 0.4, L = 3$

Discuss the effect of λ on the behavior of the control limits.

각 상황별로 steady-state control limit을 구해보겠다.

$$UCL = \mu_0 + L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}}$$

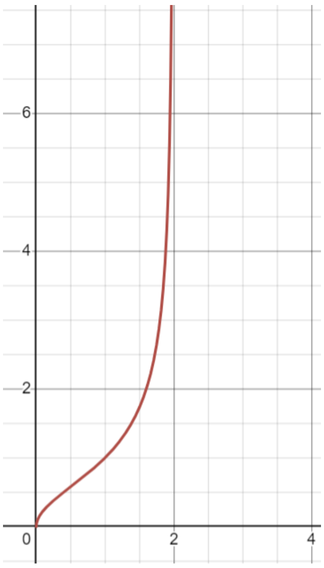
$$CL = \mu_0$$

$$LCL = \mu_0 - L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}}$$

λ	L	UCL	LCL
0.1	3	10.6882472	9.3117528
0.2	3	11	9
0.4	3	11.5	8.5
$target\ (\mu_0)$	10		
σ	1		

L 값이 일정할 때 steady-state control limit은 λ 가 커질수록 UCL은 증가하고, LCL은 감소한다.

즉 전체 control limit 폭은 λ 가 증가함에 따라 같이 증가한다.



다음은 $y = \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$ 그래프이다. 그래프를 통해 볼 수 있듯이 y 값은 λ가 증가함에 따라 같이 증가하게 된다.

λ 크다는 것은 present observation 에 더 큰 가중을 한다는 의미로 큰 변동을 감지하는 데에 유리하며,
λ 가 작다는 것은 past observation 에 더 큰 가중을 하는 것으로 작은 변동을 감지하는 데에 유리하다.

공정 특성에 따라서 적절한 λ 값을 설정해야한다.