

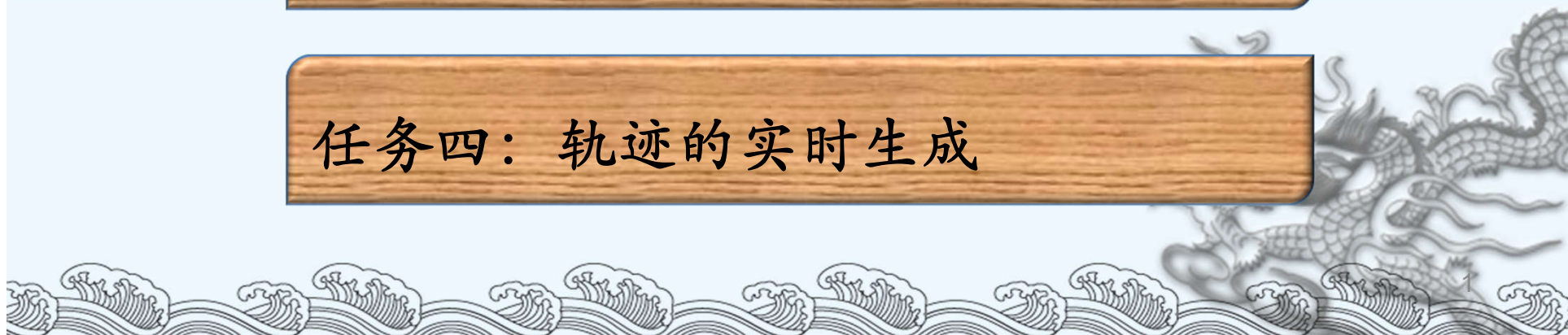
项目5 工业机器人轨迹规划

任务一：工业机器人轨迹规划

任务二：关节空间法

任务三：直角坐标空间法

任务四：轨迹的实时生成



【案例导入】

自动叠衣服的神器真的诞生了！它就是FoldiMate机器人，专长，叠衣服；爱好，还是叠衣服。该叠衣机能够一次性自动折叠10到15件衣服，并且能在叠衣过程中添加芳香剂或熨平褶皱部位。当你需要整理大量衣服时，只需将衣物放置在叠衣机的特制挂钩上，接下来的工作将会由它自动完成，如图5.1。

FoldiMate叠一件衣服只需10秒钟，一次能处理20件，同时还可以做去皱处理呢。整理好的衣服的直角，简直能令毕达哥拉斯哭泣，如图5.2。

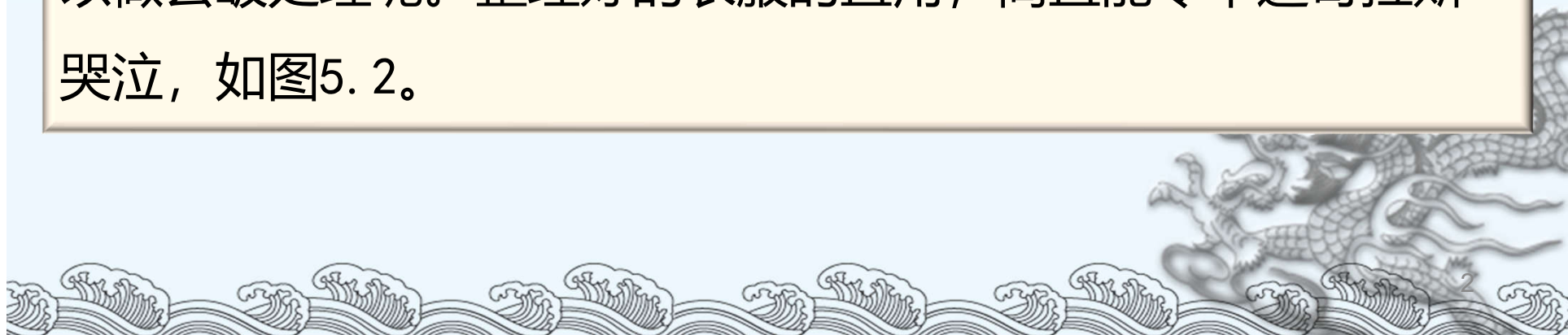




图5.1 叠衣机折叠衣服



图5.2 处理好的衣服



【教学目标】

- ◆学会在关节空间中对机器人进行轨迹规划，主要掌握三次多项式插值和五次多项式插值的方法
- ◆学会在直角坐标空间中对机器人进行轨迹规划
- ◆了解运动轨迹的生成方式，了解轨迹实时生成的方法



任务一 工业机器人轨迹规划

- 工业机器人轨迹规划的定义
- 轨迹规划涉及的问题
- 轨迹规划的一般性问题



1、工业机器人轨迹规划的定义

轨迹规划是指根据作业任务要求，确定轨迹参数并实时计算和生成运动轨迹。它是工业机器人控制的依据，所有控制的目的都在于精确实现所规划的运动。

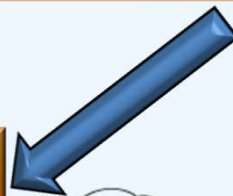
指定工业机器人执行某项操作作业



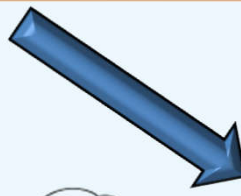
附加一些约束条件



轨迹的规划和协调



关节坐标空间

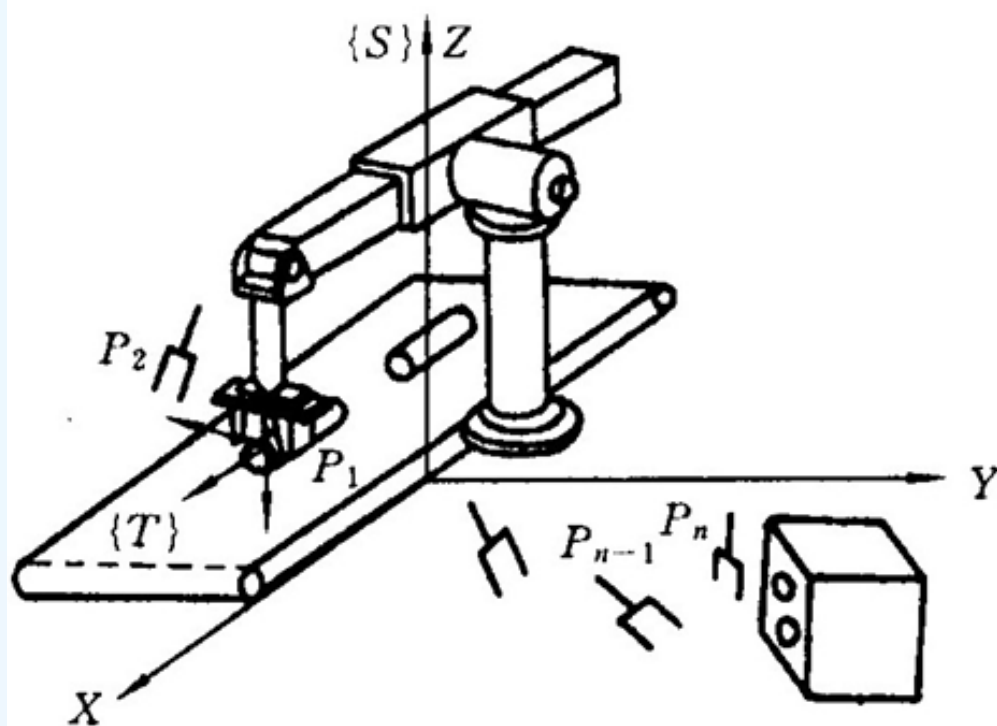


直角坐标空间



2、轨迹规划涉及的一般性问题

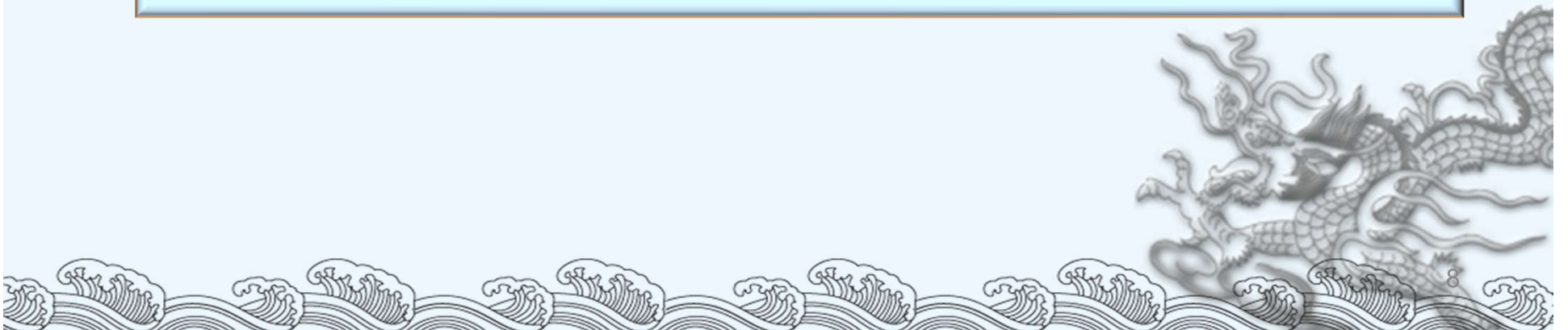
工业机器人的作业可以描述成工具坐标系 $\{T\}$ 相对于工作坐标系 $\{S\}$ 的一系列运动：

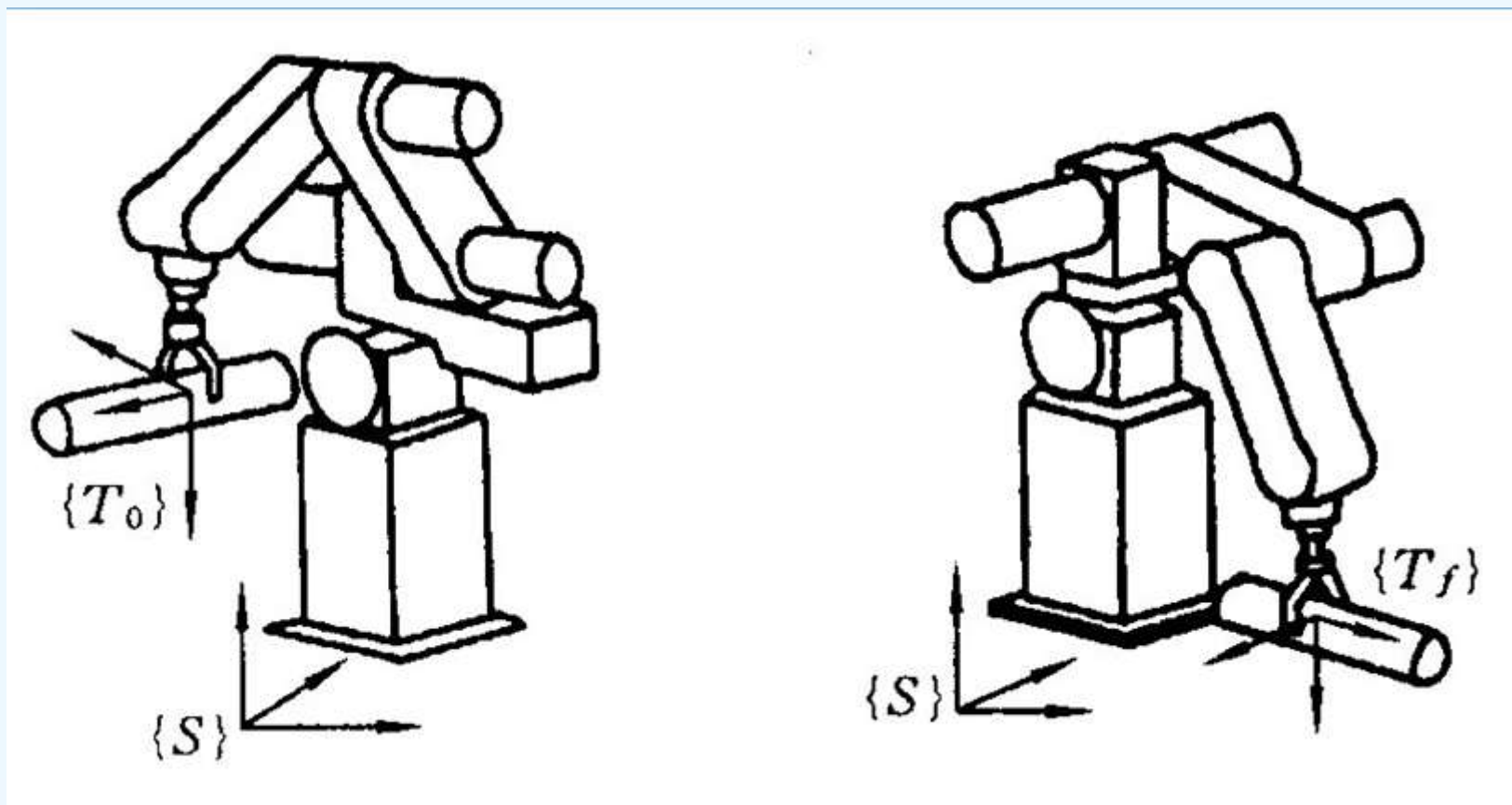


作业的描述

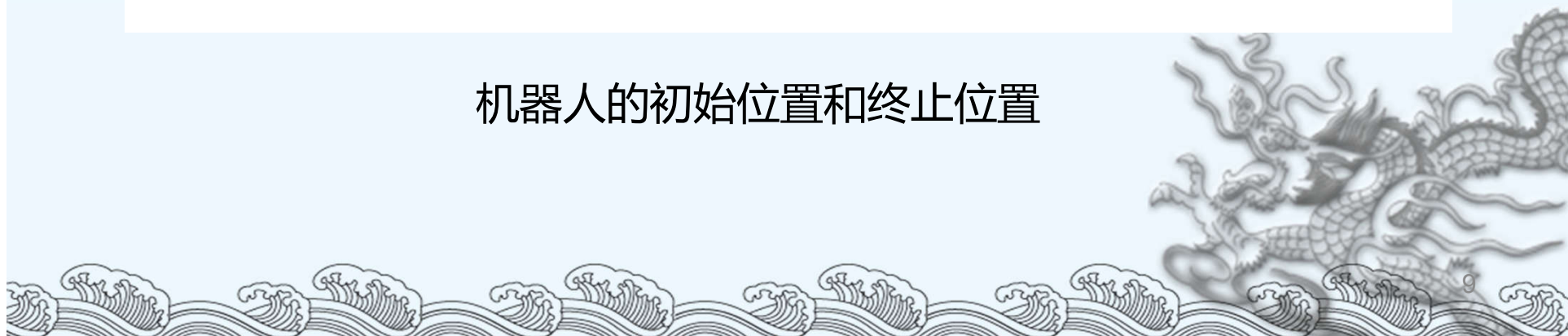
用工具坐标系 $\{T\}$ 相对于工作坐标系 $\{S\}$ 的运动来描述作业路径是一种通用的作业描述方法。

把作业路径的描述与具体的机器人、手爪或工具分离开来，形成了模型化的作业描述方法。从而使这种描述既适用于不同的机器人，也适用于同一机器人上装夹不同规格的工具。





机器人的初始位置和终止位置



机器人从初始状态运动到终止状态的作业，看成是工具坐标系从初始位置 $\{T_0\}$ 变化到终止位置 $\{T\}$ 的坐标变换。



变换包含了工具坐标系的位置和姿态的变化。



在轨迹规划中，也常用“点”这个词来表示机器人的状态，或用它来表示工具坐标系的位姿。



当需要更详细地描述运动时，不仅要规定机器人的起始点和终止点，而且要给出介于起始点和终止点之间的中间点，也称路径点。

运动轨迹除了位姿约束外，还存在着各路径点之间的时间分配问题。例如，在规定路径的同时，必须给出两个路径点之间的运动时间。

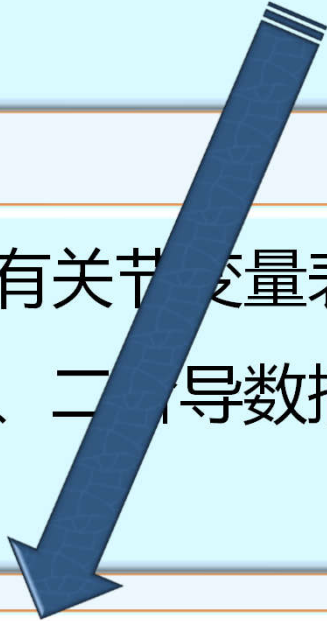
机器人的**运动应当平稳**，不平稳的运动将加剧机械部件的磨损，并导致机器人的振动和冲击。

一阶导数(速度)，有时甚至二阶导数(加速度)也应该连续。

轨迹规划既可在**关节空间**中进行，也可在**直角坐标空间**中进行。



在关节空间中进行轨迹规划是指将所有关节变量表示为时间的函数，用这些关节函数及其一阶、二阶导数描述机器人预期的运动。



在直角坐标空间中进行轨迹规划，是指将手爪位姿、速度和加速度表示为时间的函数，而相应的关节位置、速度和加速度由手爪信息导出。

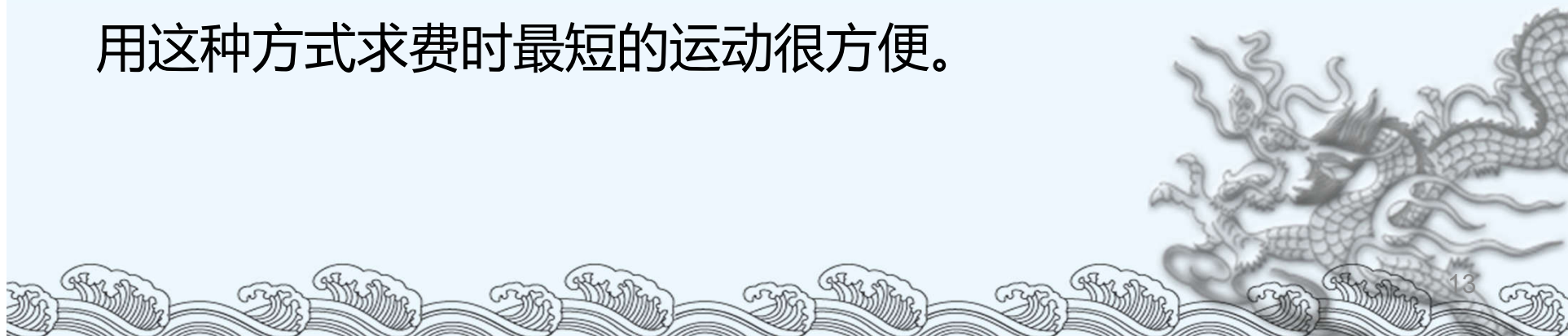


3、轨迹规划的生成方式

运动轨迹的描述或生成有以下几种方式

(1) **示教—再现运动**：即由人手把手示教机器人，定时记录各关节变量，得到沿路径运动时各关节的位移时间函数；再现时，按内存中记录的各点的值产生序列动作。

(2) **关节空间运动**：这种运动直接在关节空间里进行。由于动力学参数及其极限值直接在关节空间中描述，所以用这种方式求费时最短的运动很方便。



(3) **空间直线运动**：这是一种直角空间里的运动，它便于描述操作空间，计算量小，适宜于简单的作业。

(4) **空间曲线运动**：这是一种在描述空间中可用明确的函数表达的运动，如圆周运动、螺旋运动等。



任务二 关节空间法

- 三次多项式插值
- 过路径点的三次多项式插值
- 五次多项式插值
- 用抛物线过渡的线性插值



机器人作业路径点通常由工具坐标系 $\{T\}$ 相对于工作坐标系 $\{S\}$ 的位姿来表示，因此，在关节空间中进行轨迹规划：

◆ 首先需要将每个作业路径点向关节空间变换，即用逆运动学方法把路径点转换成关节角度值，或称关节路径点；

◆ 然后，为每个关节相应的关节路径点拟合光滑函数；

这些关节函数分别描述了机器人各关节从起始点开始，依次通过路径点，最后到达某目标点的运动轨迹。由于每个关节在相应路径段运行的时间相同，这样就保证了所有关节都将同时到达路径点和目标点，从而也保证了工具坐标系在各路径点具有预期的位姿。

1、三次多项式插值

当已知末端操作器的起始位姿和终止位姿时，由逆向运动学，即可求出对应于两位姿的各个关节角度。因此，末端操作器实现两位姿的运动轨迹描述，可在关节空间中用通过起始点关节角和终止点关节角的一个平滑轨迹函数 $\theta(t)$ 来表示；

为了实现关节的平稳运动，每个关节的轨迹函数 $\theta(t)$ 至少需要满足四个约束条件：**两端点位置约束**和**两端点速度约束**。

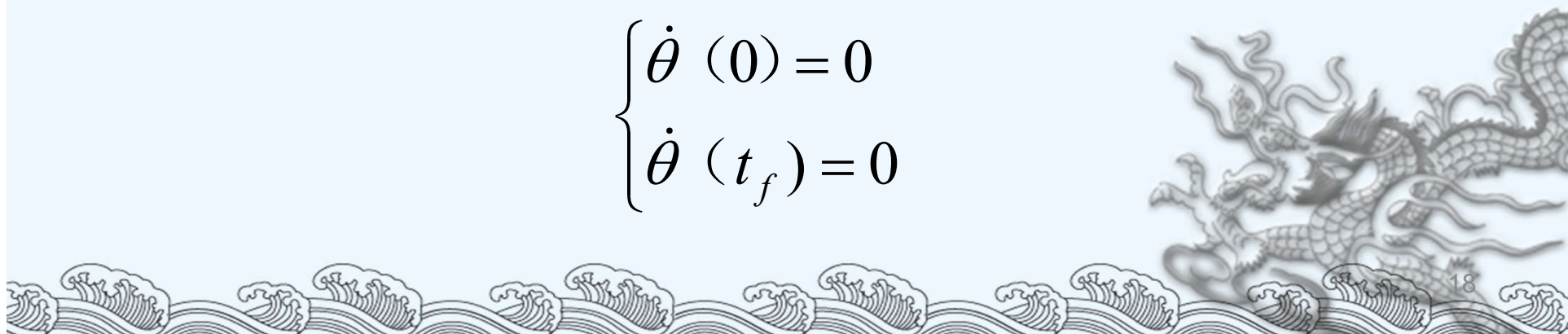


端点位置约束是指起始位姿和终止位姿分别所对应的关节角度；

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \theta(t_f) = \theta_f \end{cases}$$

为满足关节运动速度的连续性要求，在起始点和终止点的关节速度可简单地设定为零，即；

$$\begin{cases} \dot{\theta}(0) = 0 \\ \dot{\theta}(t_f) = 0 \end{cases}$$



上述给出的四个约束条件可以唯一地确定一个三次多项式

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

运动过程中的关节速度和加速度则为：

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 \\ \ddot{\theta}(t) = 2a_2 + 6a_3 t \end{cases}$$



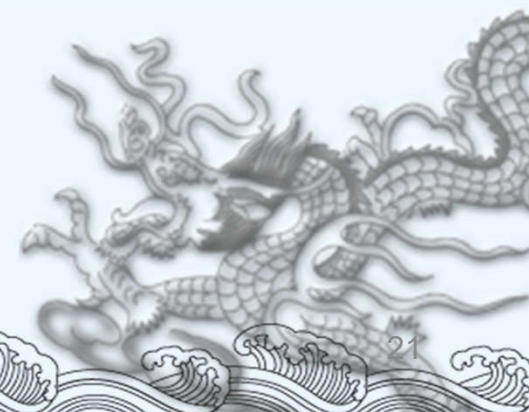
为了求得三次多项式的系数，代以给定的约束条件，有方程组

$$\begin{cases} \theta_0 = a_0 \\ \theta_f = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 \\ 0 = a_1 \\ 0 = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 \end{cases}$$



求解上述方程组，可得

$$\begin{cases} a_0 = \theta_0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0) \\ a_3 = -\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0) \end{cases}$$

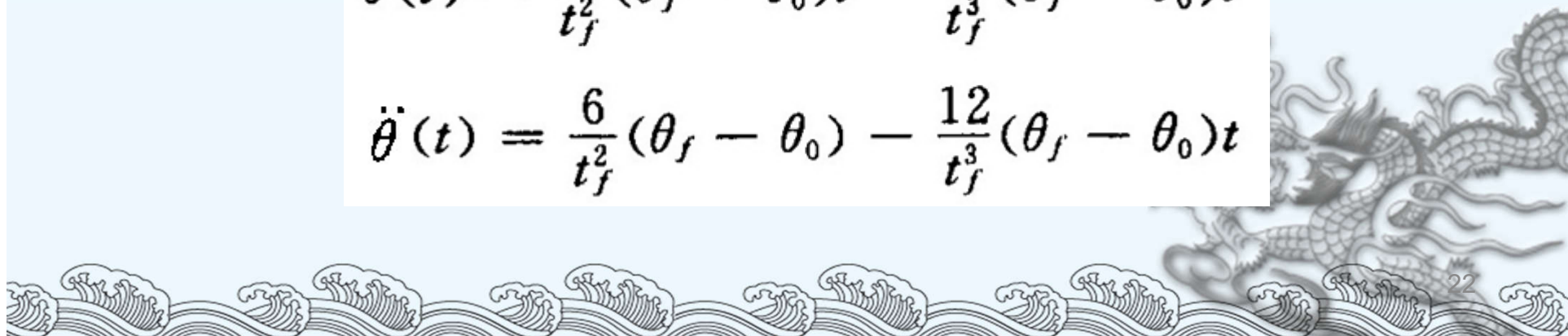


所以，对于初速及终速为零的关节运动，满足连续平稳运动要求的三次多项式插值函数为

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0)t^2 - \frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0)t^3$$

其关节角速度和角加速度表达式为

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t) &= \frac{6}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0)t - \frac{6}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0)t^2 \\ \ddot{\theta}(t) &= \frac{6}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0) - \frac{12}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0)t\end{aligned}$$



三次多项式插值的运动轨迹曲线

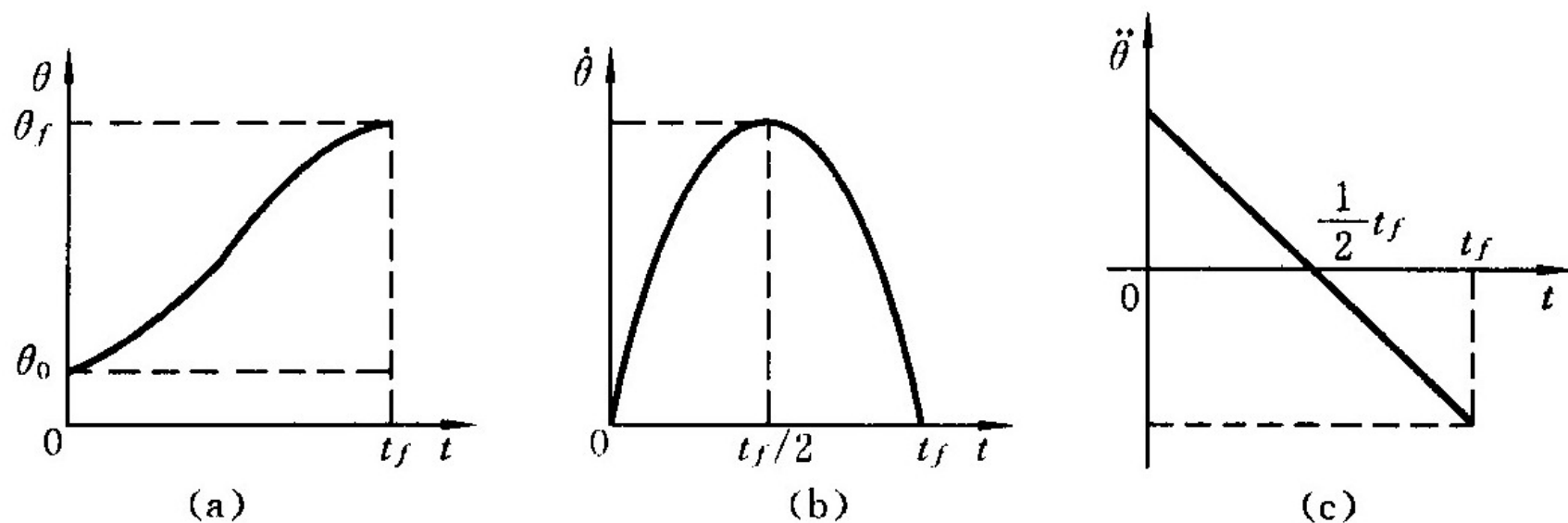


图5.3 三次多项式插值关节运动轨迹

(a) 角位移—时间曲线; (b) 角速度—时间曲线; (c) 角加速度—时间曲线

例：

设机械手的某个关节的起始关节角 $\theta_0 = 15^\circ$ ，并且机械手原来是静止的。要求在3秒钟内平滑地运动到 $\theta_f = 75^\circ$ 时停下来(即要求在终端时速度为零)。规划出满足上述条件的平滑运动的轨迹，并画出关节角位置、角速度及角加速度随时间变化的曲线。

解：

根据所给约束条件，直接代入公式，可得：

$$a_0=15, \quad a_1=0, \quad a_2=20, \quad a_3=-4.44$$

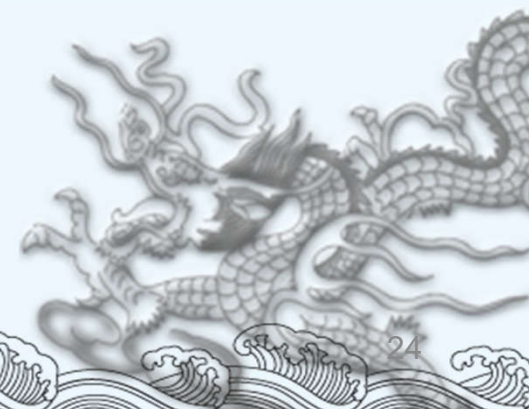
所求关节角的位置函数为：

$$\theta(t) = 15 + 20t^2 - 4.44t^3$$

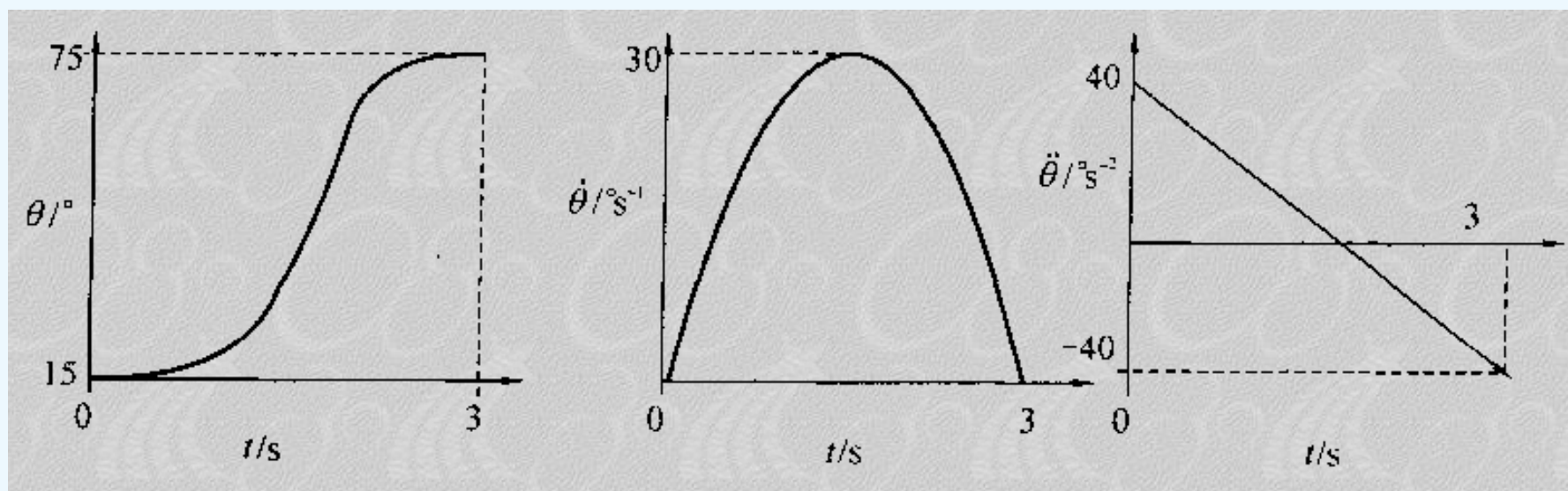
对上式求导，可以得到角速度和角加速度

$$\dot{\theta}(t) = 40t - 13.33t^2$$

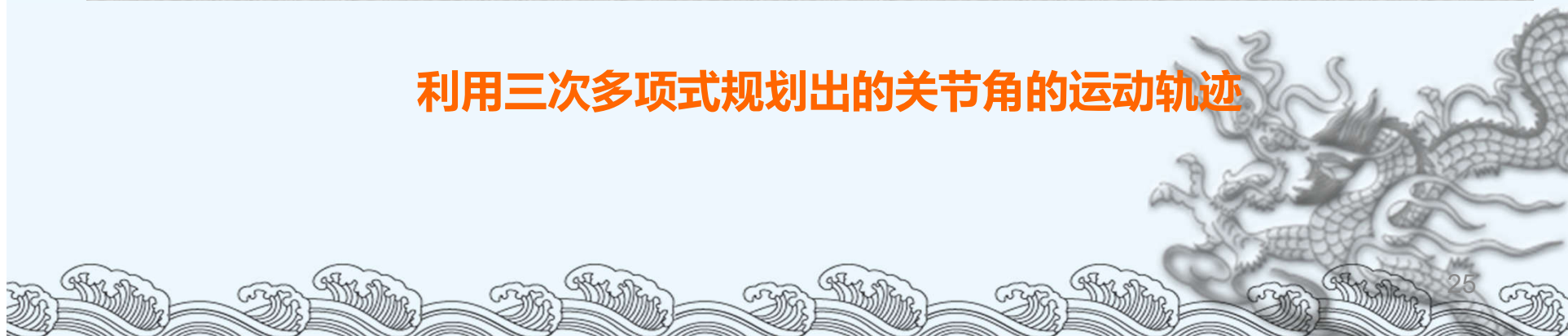
$$\ddot{\theta}(t) = 40 - 26.66t$$



根据上式可画出它们随时间的变化曲线如下图所示。
由图看出，速度曲线为一抛物线，加速度则为一直线。

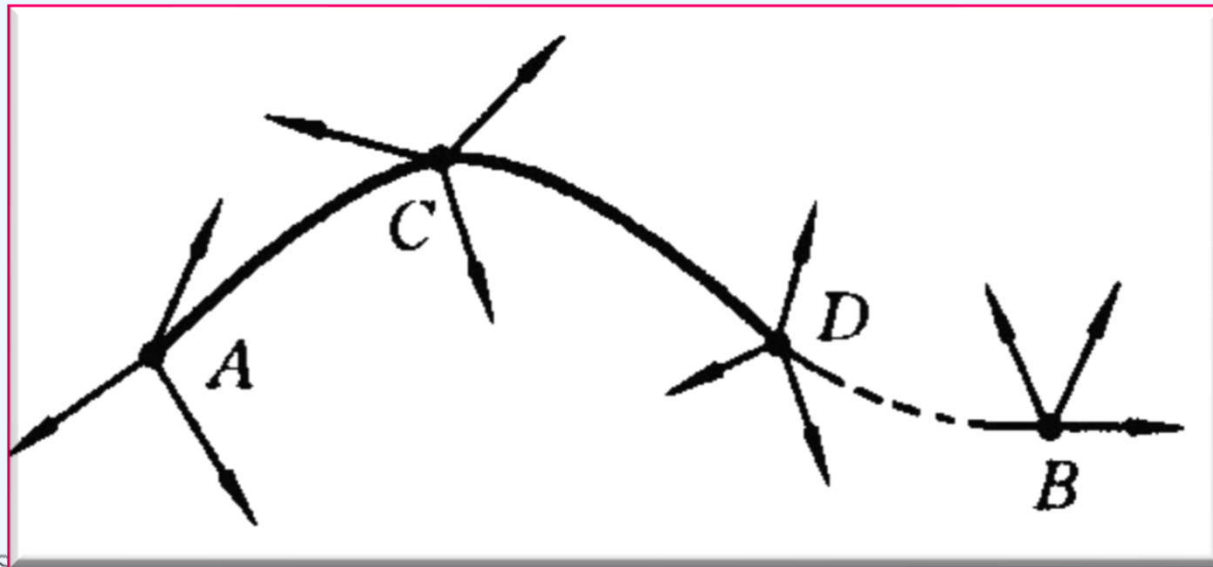


利用三次多项式规划出的关节角的运动轨迹



2、过路径点的三次多项式插值

机器人作业除在A、B点有位姿要求外，在路径点C、D…也有位姿要求。对于这种情况，假如终端执行器在路径点停留，即各路径点上速度为0，则轨迹规划可连续直接使用前面介绍的三次多项式插值方法；但如果只是经过，并不停留，就需要将前述方法推广。



在某段路径上，“起始点”为 θ_0 和 ω_0 ，“终止点”为 θ_f 和 ω_f 。
这时，确定三次多项式系数的方法与前面所述的完全一致，
只不过是速度约束条件变为

$$\begin{cases} \dot{\theta}(0) = \omega_0 \\ \dot{\theta}(t_f) = \omega_f \end{cases}$$

利用约束条件确定三次多项式系数，有下列方程组：

$$\begin{cases} \theta_0 = a_0 \\ \theta_f = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 \\ \omega_0 = a_1 \\ \omega_f = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 \end{cases}$$

求解方程组

$$\begin{cases} a_0 = \theta_0 \\ a_1 = \omega_0 \\ a_2 = \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0) - \frac{1}{t_f}(2\omega_0 + \omega_f) \\ a_3 = -\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0) + \frac{1}{t_f^2}(\omega_0 + \omega_f) \end{cases}$$



路径点上的关节速度，可由以下任一规则确定：(规则一)

- 如果机器人末端操作器在经过路径点时有速度要求，则可以利用此路径点上的逆雅可比矩阵 J^{-1} , $\dot{\theta} = J(\theta)^{-1} \dot{x}$ 把该路径点的直角坐标速度转换成关节坐标速度。轨迹规划时则以此作为速度约束条件。

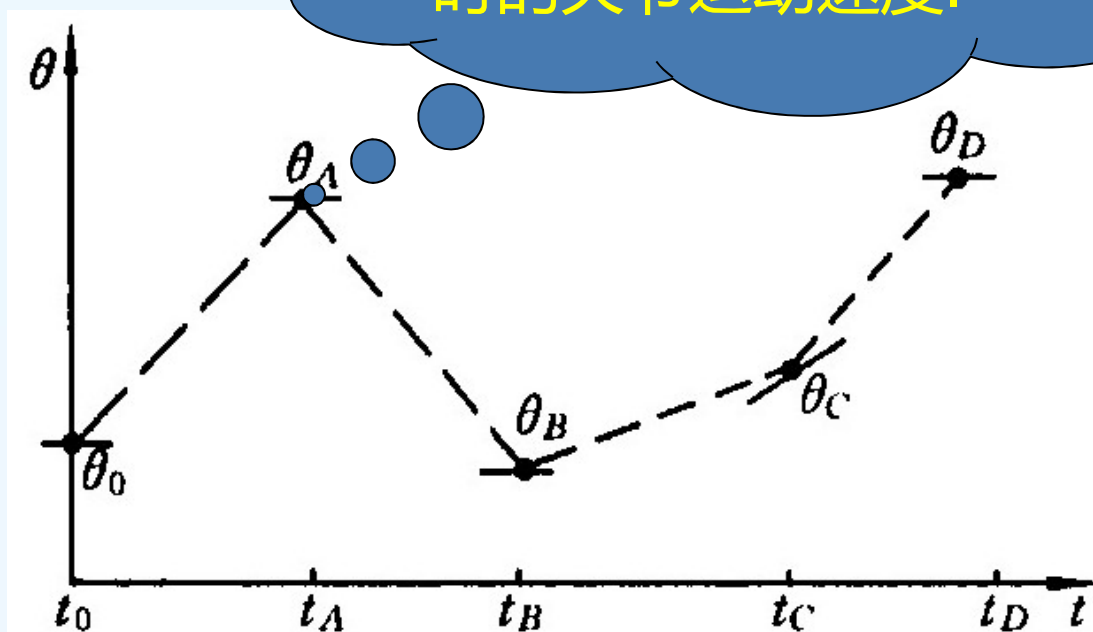
- 如果某个路径点是机器人的奇异点，即此点的逆雅可比不可求，这时就无法求关节速度了；

- 此外，在求各点关节速度时，要逐点计算逆雅可比矩阵，并依此计算关节速度，耗时较多。

路径点上的关节速度，可由以下任一规则确定: (规则二)

- 由控制系统采用某种启发式方法自动地选取合适的路径点速度。

在各路径点上的细实线，其斜率表示过路径点时的关节运动速度。



路径点上的关节速度，可由以下任一规则确定：(规则二)

- 由控制系统采用某种启发式方法自动地选取合适的路径点速度。
- 用三次多项式插值前，先假设各路径点之间关节运动速度是均匀的，即图中所示用直线段将这些路径点依次连接起来。
- 规则选定：如果相邻线段的斜率在路径点处改变符号，则速度选为零；如果相邻线段斜率不改变符号，则选取路径点两侧的线段斜率的平均值作为该点的速度。因此，只要给定路径点，系统就能依此规则自动生成相应的路径点速度。

路径点上的关节速度，可由以下任一规则确定：(规则三)

- 按照保证每个路径点的加速度连续的原则，由控制系统自动地选择路径点的速度。



为此，可以设法用两条三次曲线在路径点处按一定规则连接起来，拼凑成所要求的轨迹。拼凑的约束条件是：连接处速度连续，而且加速度也连续。



3、五次多项式插值

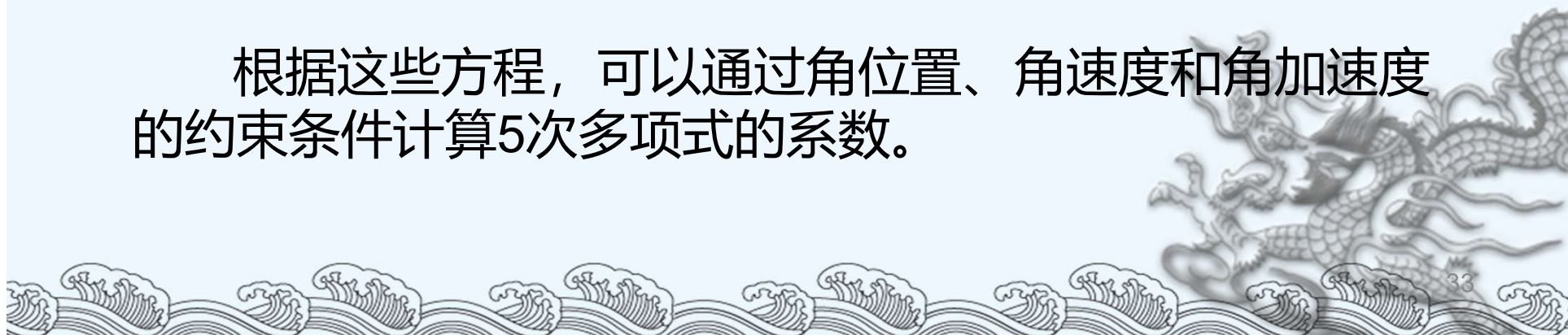
除了指定运动段的起始点和终止点的位置和速度外，也可以指定该运动段的起始点和终止点加速度。这样，约束条件的数量就增加到了6个，相应地可采用下面的5次多项式来规划轨迹运动，即

$$\theta(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5$$

$$\dot{\theta}(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + 5a_5t^4$$

$$\ddot{\theta}(t) = 2a_2 + 6a_3t + 12a_4t^2 + 20a_5t^3$$

根据这些方程，可以通过角位置、角速度和角加速度的约束条件计算5次多项式的系数。



例5-2 要求为一个六自由度机器人的第一关节进行轨迹规划。该关节在5s内从初始角 30° 运动到终端角 75° ，且起始点和终止点速度均为零，起始点角加速度和终止点角均为 $5^\circ/\text{s}^2$ ，求该机器人第一关节的角位置、角速度和角加速度随时间的变化规律。

解 由给出的条件得到

$$\theta_0 = 30^\circ \quad \dot{\theta}_0 = 0^\circ/\text{s} \quad \ddot{\theta}_0 = 5^\circ/\text{s}^2$$

$$\theta_f = 75^\circ \quad \dot{\theta}_f = 0^\circ/\text{s} \quad \ddot{\theta}_f = -5^\circ/\text{s}^2$$

将起始和终止约束条件带入上页3个公式得

$$\begin{aligned} a_0 &= 30, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 2.5, \\ a_3 &= 1.6, \quad a_4 = -0.58, \quad a_5 = 0.0464 \end{aligned}$$

可得到关节随时间变化的运动方程，即

$$\theta(t) = 30 + 2.5t^2 + 1.6t^3 - 0.58t^4 + 0.0464t^5$$

$$\dot{\theta}(t) = 5t + 4.8t^2 - 2.32t^3 + 0.232t^4$$

$$\ddot{\theta}(t) = 5 + 9.6t - 6.96t^2 + 0.928t^3$$

如图5.4所示机器人关节的角位置、角速度、角加速度曲线，其最大角加速度为 $8.7^\circ/\text{s}^2$ 。

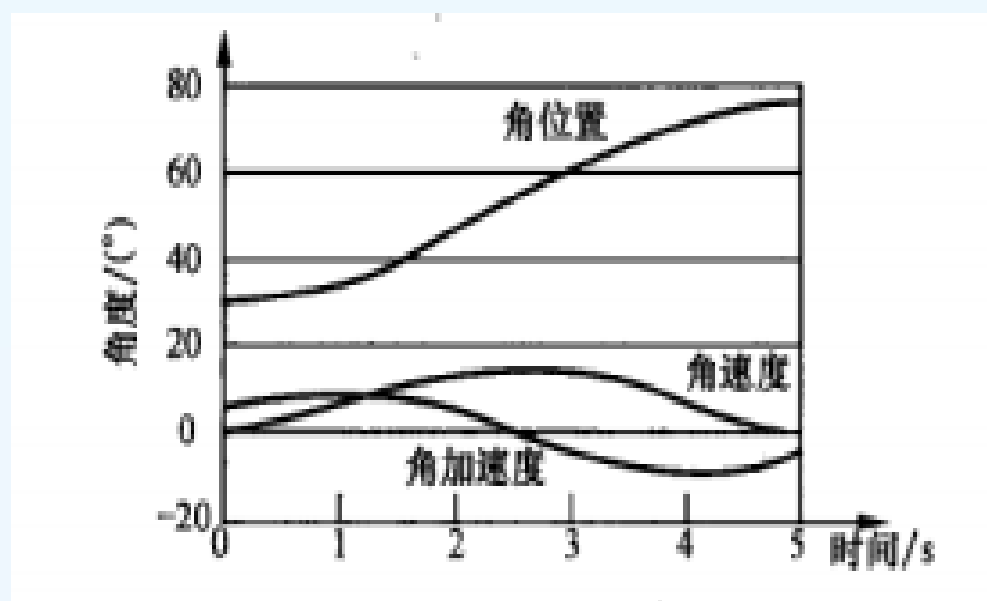


图5.4 中关节的角位置、角速度和角加速度曲线

4、用抛物线过渡的线性插值

在关节空间轨迹规划中，对于给定起始点和终止点的情况，选择线性函数插值较为简单。然而，单纯线性插值会导致起始点和终止点的关节运动速度不连续，以及加速度无穷大，显然，这样在两端点会造成刚性冲击。

为此，对线性函数插值方案进行修正，在线性插值两端点的邻域内设置一段抛物线形缓冲区段。由于抛物线函数对于时间的二阶导数为常数，即相应区段内的加速度恒定，这样可保证起始点和终止点的速度平滑过渡，从而使整个轨迹上的位置和速度连续。



线性函数与两段抛物线函数平滑地衔接在一起形成的轨迹称为带有抛物线过渡域的线性轨迹，如图5.4所示。设两端的抛物线轨迹具有相同的持续时间和大小相同而符号相反的恒加速度。这种路径规划存在多个解，其轨迹并不唯一，如图5.5所示。但是，每条路径都对称于时间中点和位置中点。

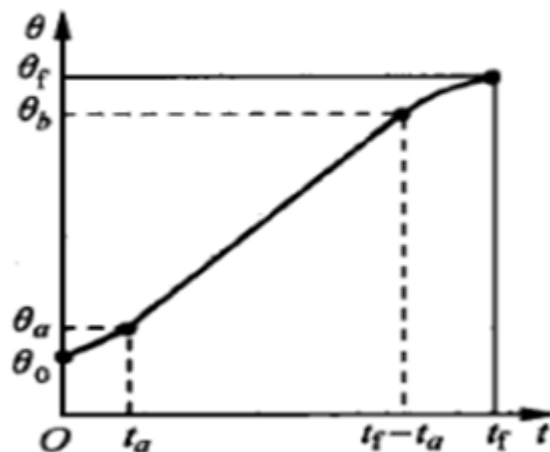


图5.4 带有抛物线过渡域的线性轨迹

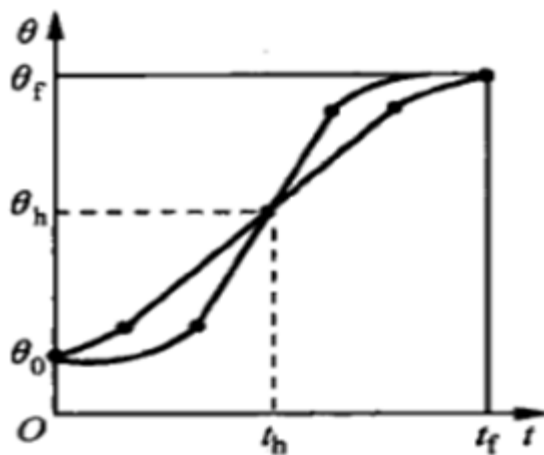


图5.5 轨迹的多解性与对称性

若要保证路径轨迹的连续、光滑，则要求抛物线轨迹的终止点角速度必须等于线性段的角速度，故有下列关系

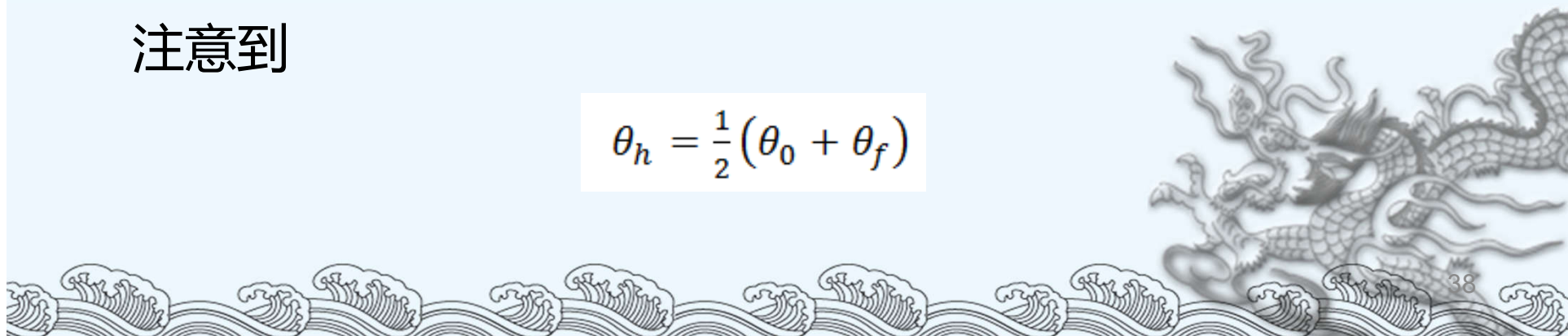
$$\dot{\theta}_{ta} = \frac{\theta_h - \theta_a}{t_h - t_a} = \ddot{\theta} t_a$$

式中： θ_a 为对应于抛物线持续时间 t_a 的关节角度。其值 θ_a 可由下式求出：

$$\theta_a = \theta_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta} t_a^2$$

设关节从起始点到终止点的总运动时间为 t_f ，则 $t_f = 2t_h$ 并注意到

$$\theta_h = \frac{1}{2} (\theta_0 + \theta_f)$$



则由前三式得

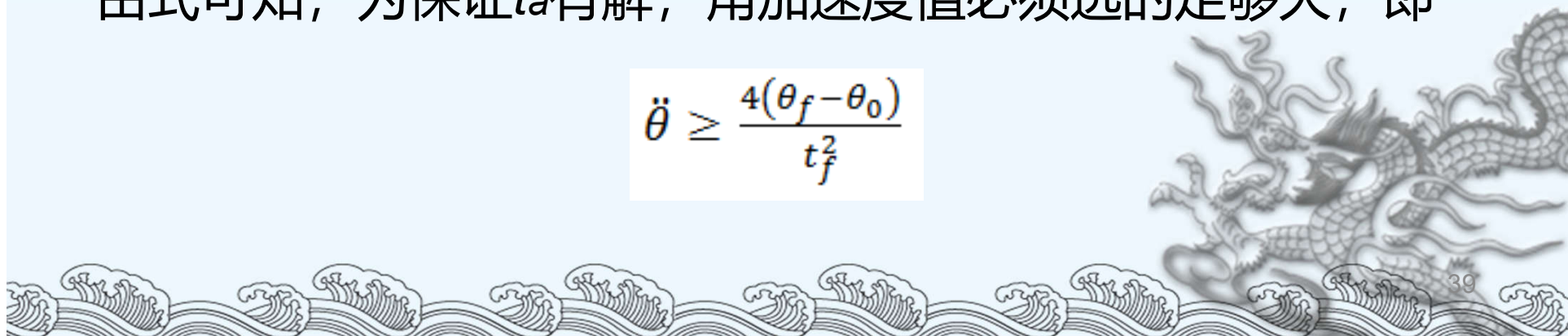
$$\ddot{\theta} t_a^2 + \ddot{\theta} t_a t_f + (\theta_f - \theta_0) = 0$$

一般情况下，都是按任务规划好的参数，是已知条件，这样，根据式可以选择相应的和，得到相应的轨迹。通常的做法是先选定角加速度的值，然后求出相应的。即 t_a ，即

$$t_a = \frac{t_f}{2} - \frac{\sqrt{\ddot{\theta}^2 t_f^2 - 4\ddot{\theta}(\theta_f - \theta_0)}}{2\ddot{\theta}}$$

由式可知，为保证 t_a 有解，角加速度值必须选的足够大，即

$$\ddot{\theta} \geq \frac{4(\theta_f - \theta_0)}{t_f^2}$$



当上式中的等号成立时，轨迹线性段的长度缩减为零，整个轨迹由两个过渡抛物线组成，这两个过渡抛物线在衔接处的斜率（关节速度）相等。角加速度值的值愈大，过渡抛物线的长度会愈短；若角加速度的值趋于无穷大，轨迹又复归到简单的线性插值情况。



任务三 直角坐标空间法

- 直角坐标空间描述
- 直角坐标空间的轨迹规划



1、直角坐标空间描述

图5.6所示为平面两关节机器人，假设末端操作器要在A、B两点之间画一条直线。为使机器人从点A沿直线运动到点B，将直线AB分成许多小段，并使机器人的运动经过所有的中间点。为了完成该任务，在每一个中间点处都要求解机器人的逆运动学方程，计算出一系列的关节量，然后由控制器驱动关节到达下一目标点。当通过所有的中间目标点时，机器人便到达了所希望到达的点B。与前面提到的关节空间描述不同，这里机器人在所有时刻的位形运动都是已知的，机器人所产生的运动序列首先在直角坐标空间描述，然后转化为关节空间描述。



由此也容易看出，采用直角坐标空间描述的计算量远大于采用关节空间描述的，然而使用该方法能得到一条可控、可预知的路径。

直角坐标空间轨迹在常见的直角坐标空间中表示，因此非常直观，人们也能很容易地看到机器人末端操作器的轨迹。然而，直角坐标空间轨迹计算量大，需要较快的处理速度才能得到类似于关节空间轨迹的计算精度。此外，虽然在直角坐标空间中得到的轨迹非常直观，但难以确保不存在奇

异点。

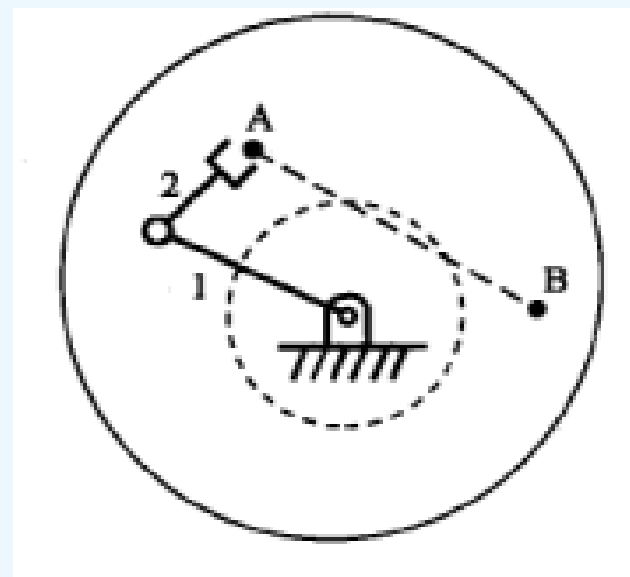


图5.6 直角坐标空间轨迹规划的问题

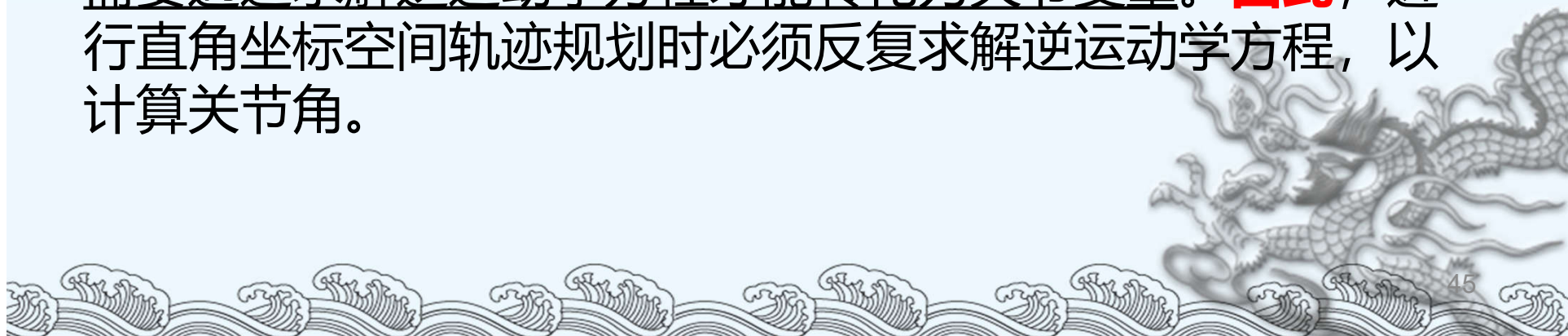
如图5.6中，连杆2比连杆1短，所以在工作空间中从点A运动到点B没有问题。但是如果机器人末端操作器试图在直角坐标空间中沿直线运动，将无法到达路径上的某些中间点。该例表明在某些情况下，在关节空间中直线路径容易实现，而在直角坐标空间中的直线路径将无法实现。此外，两点间的运动有可能使机器人关节值发生突变。为解决上述问题，可以指定机器人必须通过的中间点，以避免这些奇异点。

正因为直角坐标空间轨迹规划存在上述问题，现有的多数工业机器人轨迹规划器都具有**关节空间**和**直角坐标空间**轨迹生成两种功能。用户**通常使用关节空间法**，只有在**必要时**，才采用**直角坐标空间法**。

2、直角坐标空间的轨迹规划

直角坐标空间轨迹与机器人相对于直角坐标系的运动有关，如机器人末端操作器的位姿便是沿循直角坐标空间的轨迹。除了简单的直线轨迹以外，也可以用许多其他的方法来控制机器人，使之在不同点之间沿一定轨迹运动。而且，用于关节空间轨迹规划的方法都可用于直角坐标空间的轨迹规划。

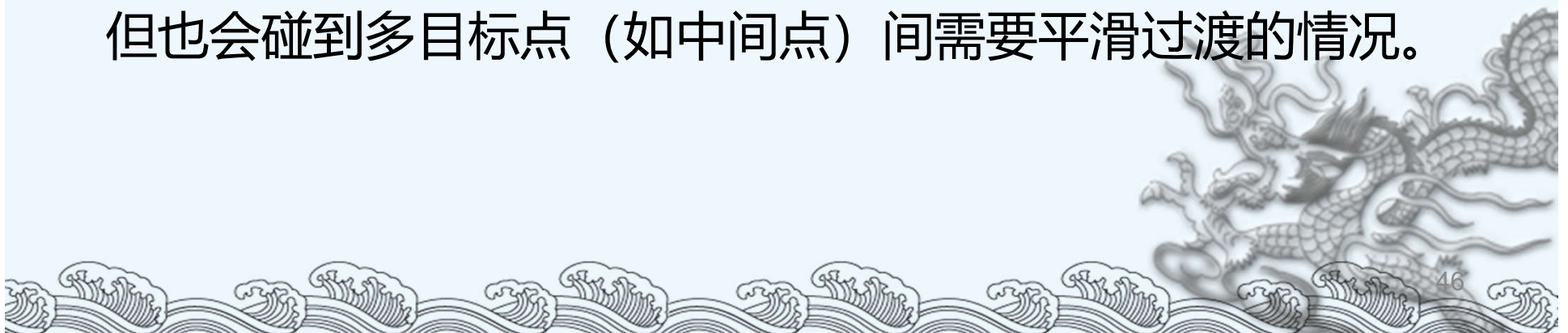
直角坐标空间轨迹规划与关节空间轨迹规划的**根本区别**在于，关节空间轨迹规划函数生成的值是关节变量，而直角坐标空间轨迹规划函数生成的值是机器人末端操作器的位姿，需要通过求解逆运动学方程才能转化为关节变量。**因此**，进行直角坐标空间轨迹规划时必须反复求解逆运动学方程，以计算关节角。



上述过程可以简化为如下循环：

- (1) 将时间增加一个增量 $t=t+\Delta t$;
- (2) 利用所选择的轨迹函数计算出手的位姿;
- (3) 利用机器人逆运动学方程计算出对应末端操作器位姿的关节变量;
- (4) 将关节信息送给控制器;
- (5) 返回到循环的开始。

在工业应用中，最实用的轨迹是点到点之间的直线运动，但也会碰到多目标点（如中间点）间需要平滑过渡的情况。



为实现一条直线轨迹，必须计算起始点和终止点位姿之间的变换，并将该变换划分为许多小段。**起始点构形**和**终止点构形**之间的**总变换R**可通过下面的方程计算：

$$\begin{cases} T_f = T_0 R \\ T_0^{-1} T_f = T_0^{-1} T_0 R \\ R = T_0^{-1} T_f \end{cases}$$

可以用以下几种方法将该总变换化为许多的小段变换。

(1) 将起始点和终止点之间的变换分解为一个平移运动和两个旋转运动：

- 平移是指将坐标原点从起始点移动到终止点；
- 旋转分别是指将末端操作器坐标系与期望姿态对准和将末端操作器坐标系绕其自身轴转到最终的姿态。
- 这三个变换是同时进行的。



(2) 将起始点和终止点之间的变换 R 分解为一个平移运动和一个绕点轴的旋转运动：

- 平移仍是将坐标原点从起始点移动到终止点；
- 而旋转是将手臂坐标系与最终的期望姿态对准；
- 两个变换也是同时进行的，如图5.7所示。

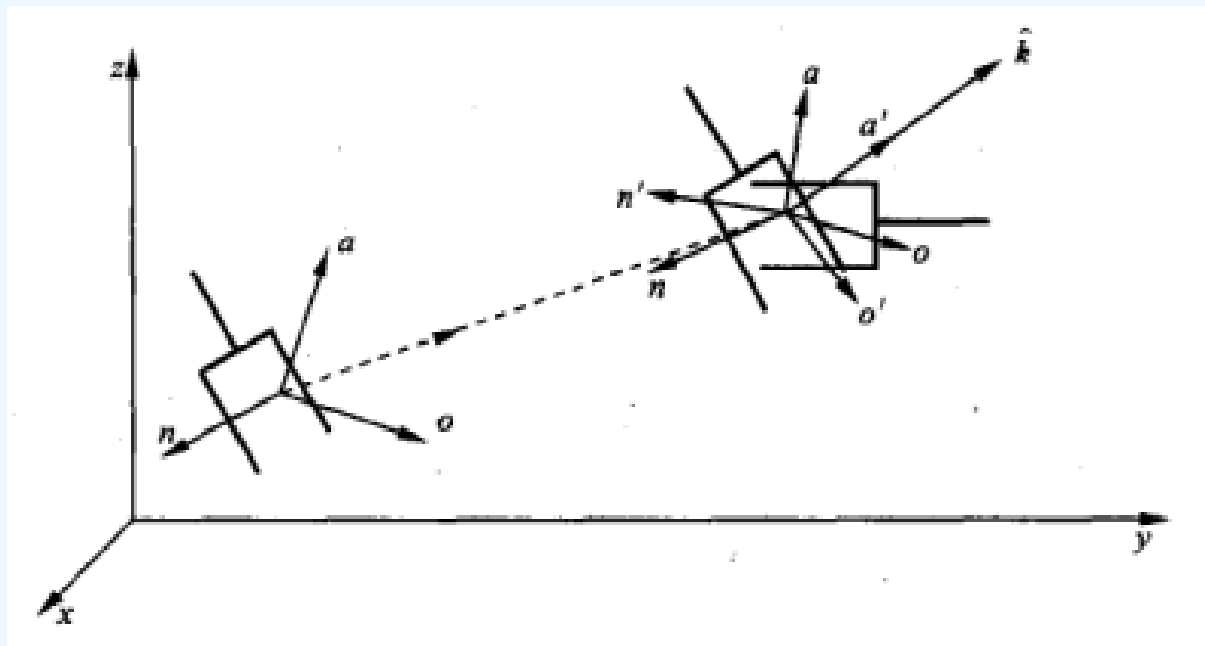


图5.7 直角坐标系空间轨迹规划中起始点和终止点之间的变换

(3) 对轨迹进行大量分段，以使起始点和终止点之间有平滑的线性变换。这样会产生大量的微分运动，利用微分运动方程，可将末端坐标系在每一段上的位姿与微分运动、雅可比矩阵及关节速度联系在一起。不过，采用该方法时需要进行大量的计算，并且仅当雅可比矩阵存在时才有效。



任务四 轨迹的实时生成

- 关节空间轨迹的生成
- 直角坐标空间轨迹的生成



1、关节空间轨迹的生成

按照关节空间轨迹规划的方法所得的计算结果都是有关各个路径段的数据。控制系统的轨迹生成器利用这些数据以轨迹更新的速率具体计算出关节的位置、速度和加速度。

对于三次多项式，轨迹生成器只需要随 t 的变化不断按公式计算位置、速度和加速度。当到达路径段的终止点时，调用新路径段的三次多项式系数，重新把 t 置成零，继续生成轨迹即可。



对于带抛物线拟合的直线样条曲线，每次更新轨迹时，应首先检测时间t的值以判断当前是处在路径段的直线区段还是抛物线拟合区段。

1) 在直线区段，对每个关节的轨迹计算如下：

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 + \omega \left(t - \frac{1}{2} t_a \right) \\ \dot{\theta} = \omega \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

式中： ω 、 t_a 为根据驱动器的性能而选择的定值；故可计算出关节的位置、速度和加速度。

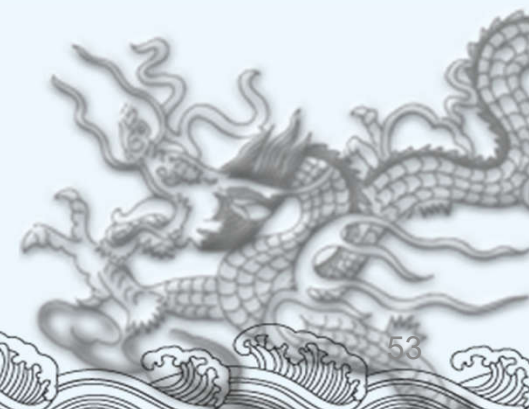


2) 在起始点抛物线拟合区段，对各关节的轨迹计算如下：

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 + \frac{1}{2} \omega t_a \\ \dot{\theta} = \frac{\omega}{t_a} t \\ \ddot{\theta} = \frac{\omega}{t_a} \end{cases}$$

3) 终止点的抛物线段与起始点抛物线段是对称的，只是其加速度为负，因此可按照下式计算：

$$\begin{cases} \theta = \theta_f - \frac{\omega}{2t_a} (t_f - t)^2 \\ \dot{\theta} = \frac{\omega}{t_a} (t_f - t) \\ \ddot{\theta} = -\frac{\omega}{t_a} \end{cases}$$



上式中 t_f 为该段抛物线终止点时间。轨迹生成器按照以上两式随时间 t 的变化实时生成轨迹。当进入新的运动段以后，必须基于给定的关节速度求出新的关节位置、速度和加速度，根据边界条件计算抛物线段的系数，继续计算，直到计算出所有路径段的数据集合。



2、直角坐标空间轨迹的生成

前面已经介绍了直角坐标空间轨迹规划的方法，在直角坐标空间的轨迹必须变换为等效的关节空间变量。先通过逆运动学方程求出的关节位置，然后用逆雅可比矩阵计算关节速度，用逆雅可比矩阵及其导数计算角加速度，这样计算量非常大。

在实际中往往采用简便的方法，先根据逆运动学求出关节运动轨迹，即先把操作空间变量转换成关节角矢量，然后再由数值微分根据下式计算关节的速度和加速度。



$$\dot{\theta}(t) = \frac{\theta(t) - \theta(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{\dot{\theta}(t) - \dot{\theta}(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

最后，将轨迹规划器所生成的关节的位置、速度和加速度送往机器人的控制系统。至此轨迹规划的任务才算完成。



综合实例分析

加利福尼亚理工学院实验室研究使用的一个三自由度机器人有两根连杆，每根连杆长9英寸，如图5.8所示。假设定义坐标系使得当所有关节角均为0时，手臂处于垂直向上状态。要求机器人沿直线从点 (9, 6, 10) 移动到点 (3, 5, 8)。求3个关节在每个中间点的角度值，并绘制出这些角度值。已知该机器人的逆运动学方程为：

$$\theta_1 = \arctan(-P_x/P_y)$$

$$\theta_3 = \arccos \left[\left((P_y / \cos \theta_1)^2 + (P_z)^2 - 162 \right) / 162 \right]$$

$$\theta_2 = \arccos \left[(P_z \cos \theta_1 (1 + \cos \theta_3) + P_y \sin \theta_3) / (18 (1 + \cos \theta_3) \cos \theta_1) \right]$$

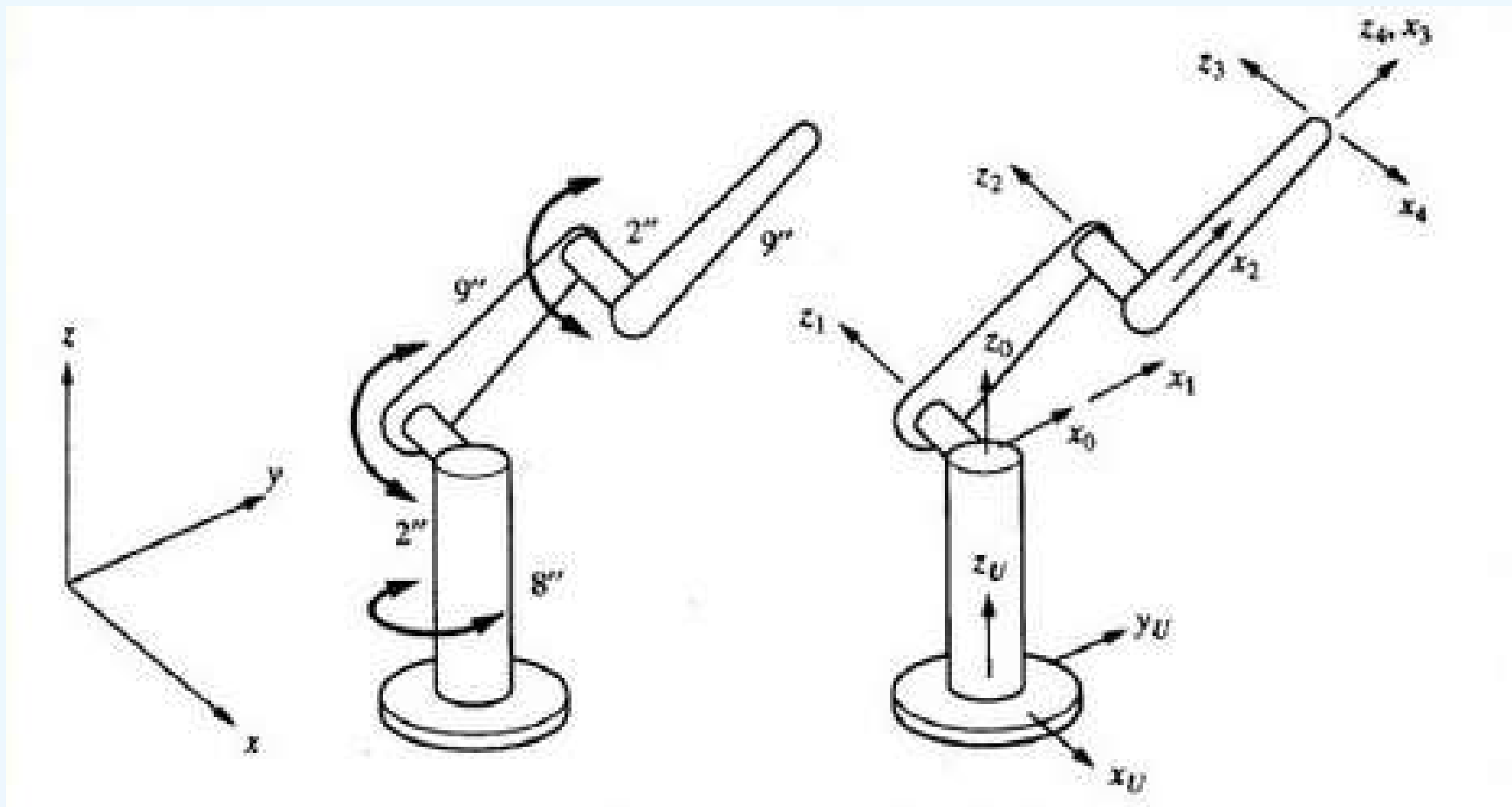


图5.8 机器人及其坐标系

解：

在实际应用中起点和终点之间要分成许多很小的部分。但为了简便起见，求解本题时只将起点和终点之间分成10段。每个中间点的坐标可简单的通过将起点和终点之间的距离进行10等分得到。通过求解逆运动学方程即可算得每个中间点的关节角，结果如表5—1所示。相应的关节角曲线如图5.9所示。



表5—1 机器人的手坐标系坐标及关节角

X°	Y°	Z°	θ_1°	θ_2°	θ_3°
9 $^{\circ}$	6 $^{\circ}$	10 $^{\circ}$	56.3 $^{\circ}$	104.7 $^{\circ}$	27.2 $^{\circ}$
8.4 $^{\circ}$	5.9 $^{\circ}$	9.8 $^{\circ}$	54.9 $^{\circ}$	109.2 $^{\circ}$	25.4 $^{\circ}$
7.8 $^{\circ}$	5.8 $^{\circ}$	9.6 $^{\circ}$	53.4 $^{\circ}$	113.6 $^{\circ}$	23.8 $^{\circ}$
7.2 $^{\circ}$	5.7 $^{\circ}$	9.4 $^{\circ}$	51.6 $^{\circ}$	117.9 $^{\circ}$	22.4 $^{\circ}$
6.6 $^{\circ}$	5.6 $^{\circ}$	9.2 $^{\circ}$	49.7 $^{\circ}$	121.9 $^{\circ}$	21.2 $^{\circ}$
6 $^{\circ}$	5.5 $^{\circ}$	9 $^{\circ}$	47.5 $^{\circ}$	125.8 $^{\circ}$	20.1 $^{\circ}$
5.4 $^{\circ}$	5.4 $^{\circ}$	8.8 $^{\circ}$	45 $^{\circ}$	129.5 $^{\circ}$	19.3 $^{\circ}$
4.8 $^{\circ}$	5.3 $^{\circ}$	8.6 $^{\circ}$	42.2 $^{\circ}$	133 $^{\circ}$	18.7 $^{\circ}$
4.2 $^{\circ}$	5.2 $^{\circ}$	8.4 $^{\circ}$	38.9 $^{\circ}$	136.3 $^{\circ}$	18.4 $^{\circ}$
3.6 $^{\circ}$	5.1 $^{\circ}$	8.2 $^{\circ}$	35.2 $^{\circ}$	139.4 $^{\circ}$	18.5 $^{\circ}$
3 $^{\circ}$	5 $^{\circ}$	8 $^{\circ}$	31 $^{\circ}$	142.2 $^{\circ}$	18.9 $^{\circ}$

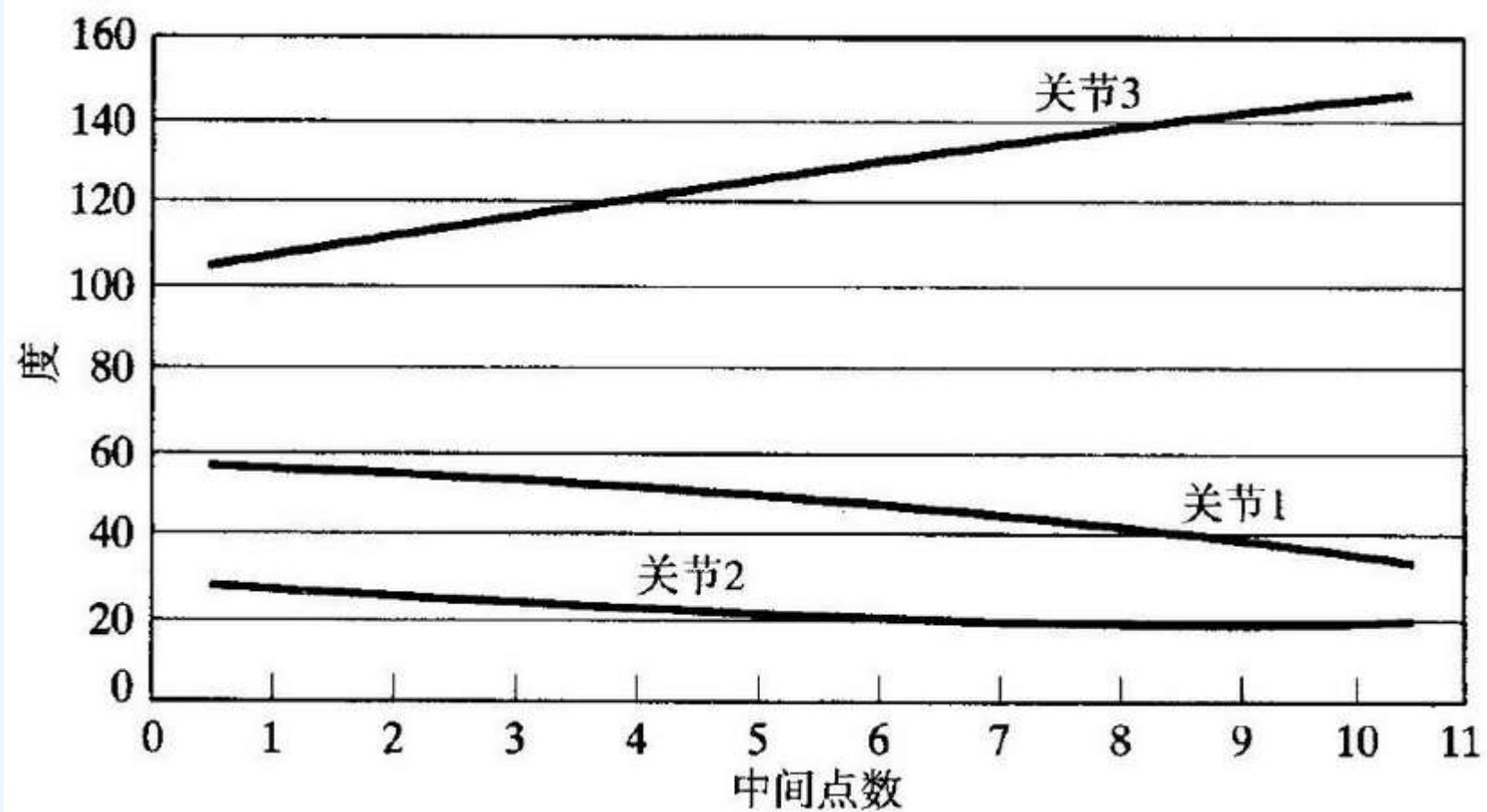


图5.9 机器人的关节角曲线

思考与练习

3. 设一机器人具有 6 个转动关节，其关节运动均按 3 次多项式规划，要求经过两个中间路径点后停在一个目标位置。试问欲描述该机器人关节的运动，共需要多少个独立的 3 次多项式？要确定这些 3 次多项式，需要多少个系数？

4. 单连杆机器人的转动关节，从 $\theta = -5^\circ$ 静止开始运动，要想在 4 s 内使该关节平滑地运动到 $\theta = +80^\circ$ 的位置停止。试按下述要求确定运动轨迹：

- (1) 关节运动依 3 次多项式插值方式规划。
- (2) 关节运动按抛物线过渡的线性插值方式规划。

10月18日前交！

命名规则：姓名_学号_第五章作业
robotics2019@163.com

