

项目8 并联机器人

任务一 并联机器人的定义与特点

任务二 典型的并联机构

任务三 并联机构自由度的计算

任务四 并联机构的位置分析



【案例导入】

在食品工厂的分拣包装车间里，对一种新口味饼干的分拣工作正在井然有序地进行着。在流水线上，散乱放置的饼干不断被传送带传递到分拣区域，而几名“三头六臂”的特殊员工正不断将一块块饼干快速而精准地抓取起来，再整齐地码放在旁边的包装盒内，整套动作迅速而有条不紊，如图8.1所示。



图8.1 并联机器人食品包装



【教学目标】

- ◆ 掌握并联机器人的定义，了解并联机器人的特点
- ◆ 了解典型并联机器人的结构及应用，掌握并联机器人的自由度计算方法
- ◆ 掌握并联机器人位置正解、逆解的计算方法



任务一 并联机器人的定义与特点

- 并联机器人的定义
- 并联机器人的历史
- 并联机器人的特点
- 并联机器人的应用



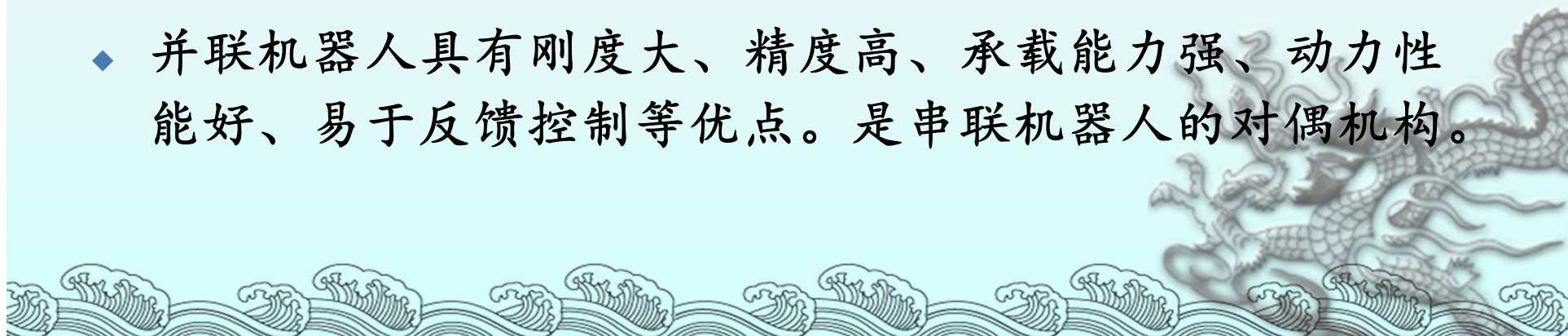
1 并联机器人的定义

并联机器人 (Parallel Manipulator) 由动平台、定平台以及连接它们的两个或者两个以上的独立运动支链组成，末端定平台具有两个或两个以上自由度的可控执行器。

并联机构的命名一般为开头的数目字表示机构的分支数，后边的字母表示分支运动链的结构，一般用支链的运动副来描述，R代表转动副，P代表移动副，S代表球副，U代表万向节。



- ◆ 并联机器人与传统工业机器人（即串联机器人）之间在哲学上呈对立统一的关系。
- ◆ 并联机器人是包括一个动平台和一个定平台并通过至少两个独立的运动链相连接，机构具有两个或两个以上自由度，且以并联方式驱动的一种闭环机构。
- ◆ 闭链结构使其运动学和动力学研究（尤其是奇异性分析）与串联机器人有着本质的区别，但是在分析方法上又可以借鉴串联机器人的一些成熟的分析方法，例如D-H方法、坐标变换等方法。
- ◆ 并联机器人具有刚度大、精度高、承载能力强、动力性能好、易于反馈控制等优点。是串联机器人的对偶机构。



6条支链

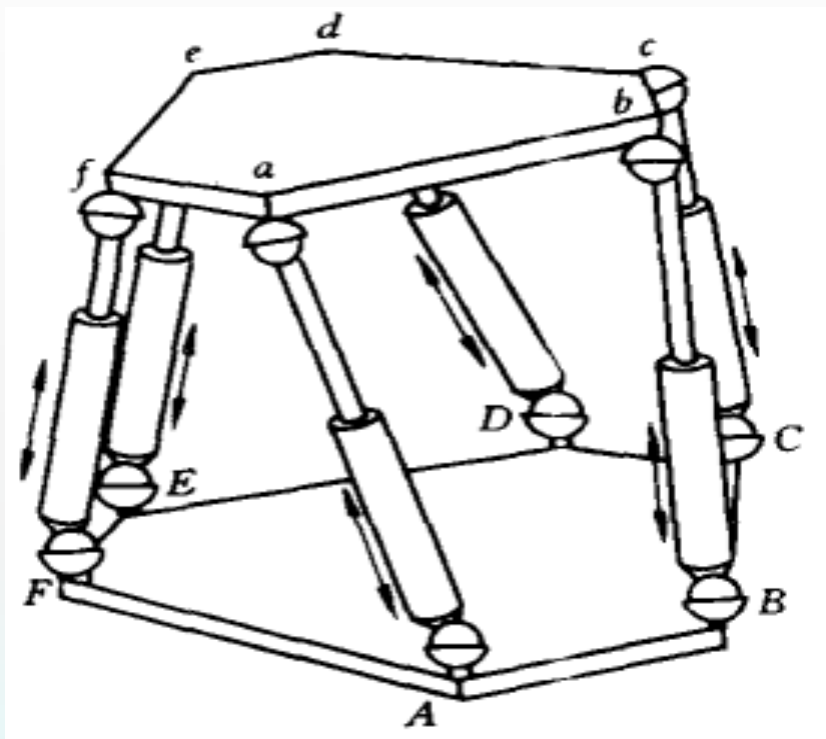


图8.2 6-SPS机构

3条支链

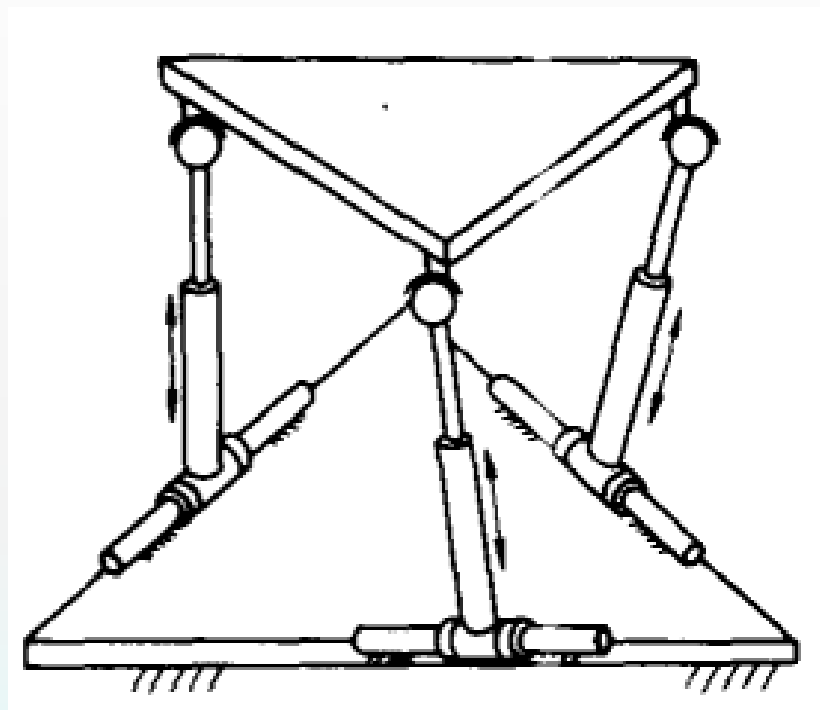
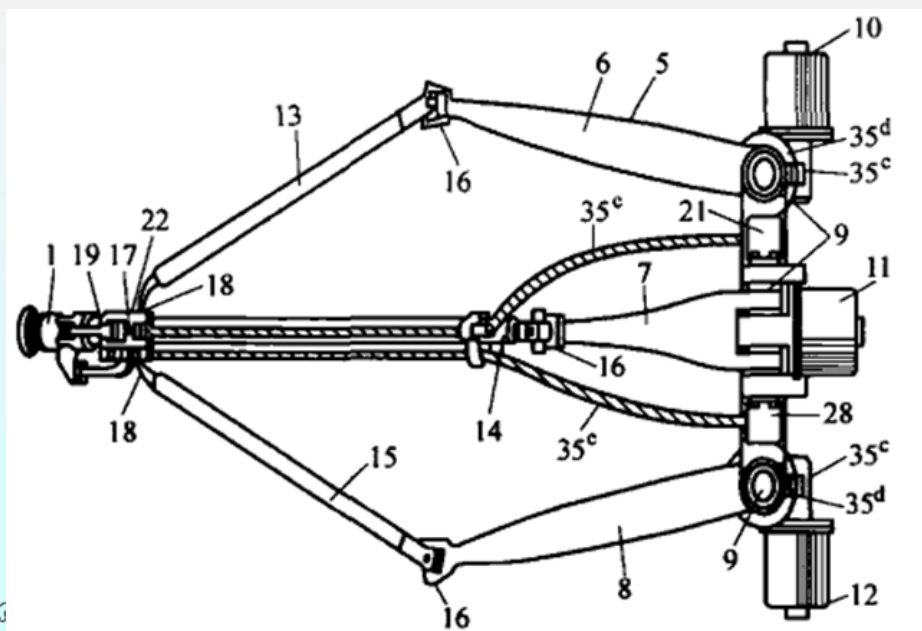


图8.4 3-RPS机构

2. 并联机器人的历史

并联机构的出现可以追溯到1931年，Gwinnett获得了并联机构式的娱乐设备的专利授权，此专利是国际上有记载的第一个关于并联机构的发明专利。

1934年，Pollard提出了一种空间作业并联机构，并于1940年获得了用于汽车喷漆装置的并联机构专利，如图8.6所示。



1962年，Gough发明了一种基于并联机构的六自由度轮胎检测装置，如图8.7所示。

三年后，Stewart首次对Gough发明的这种机构进行了机构学意义上的研究，并将其推广应用为飞行模拟器的运动产生装置，如图8.8所示。

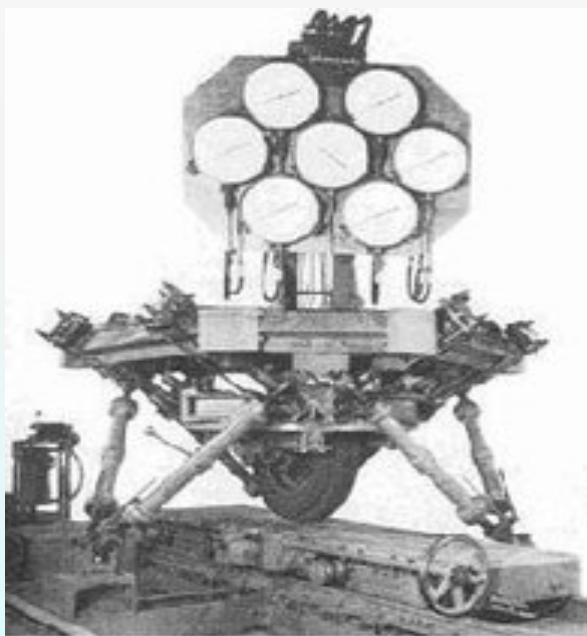


图8.7 Gough并联机构图

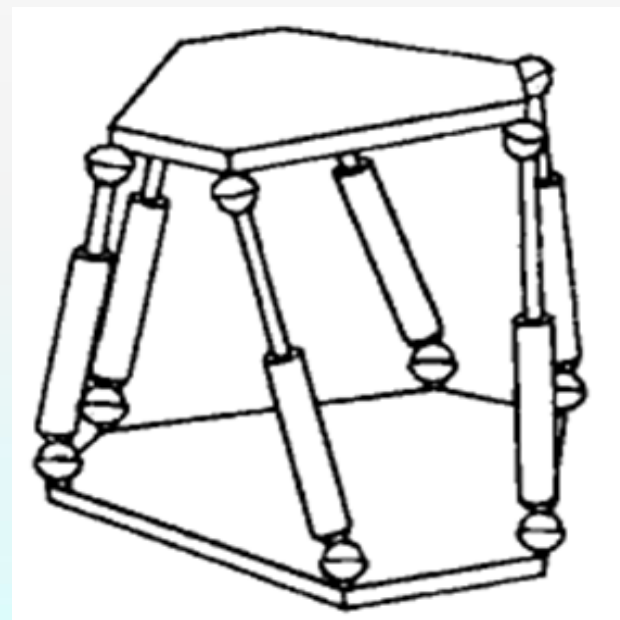


图8.8 Stewart 并联机构



1978年，Hunt首次提出把六自由度并联机构作为机器人操作器，由此拉开了并联机器人研究的序幕，但在随后的近十年里，并联机器人的研究似乎停滞不前。

黄真教授等人于1990年研制出我国第一台六自由度并联机器人样机，见图8.9。1994年研制出一台柔性铰链并联式六自由度机器人误差补偿器，见图8.10。



图8.9我国第一台六自由度并联机器人



图8.10六自由度机器人误差补偿器

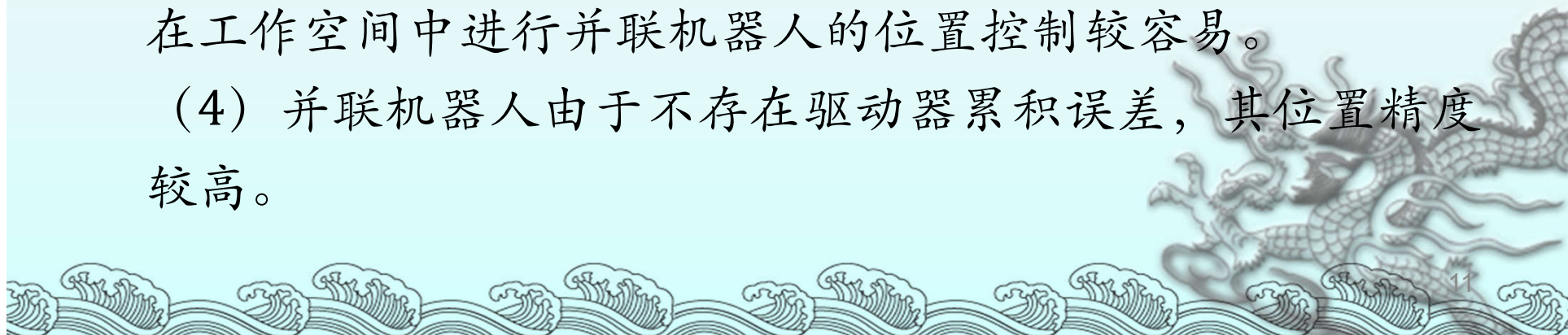
3. 并联机器人的特点

(1) 并联机器人驱动装置可以安放在基座或接近基座的位置，故其运动部件的质量和惯量可以大大减小，因此动态性能好，可以实现高速运动。

(2) 并联机器人一般可以实现基座驱动器的良好密封，故可以工作在诸如高温、辐射、潮湿、太空和水下等恶劣的环境下。

(3) 并联机器人运动学反解容易计算而正解相当复杂，故在工作空间中进行并联机器人的位置控制较容易。

(4) 并联机器人由于不存在驱动器累积误差，其位置精度较高。



(5) 并联机器人的运动平台通过几个运动链以并联方式与基座相连接，因此承载能力强、刚性好、结构紧凑。

(6) 并联机器人机构通常采用对称式结构，故具有较好的各向同性。

(7) 并联机器人具有运动学奇异和力奇异，在奇异点处，机器人可能失去约束度，即获得额外的自由度。

(8) 工作空间小、可操作性差是并联机器人的缺点。



4. 并联机器人的应用

(1) 并联机床



图8.11 清华大学并联机床

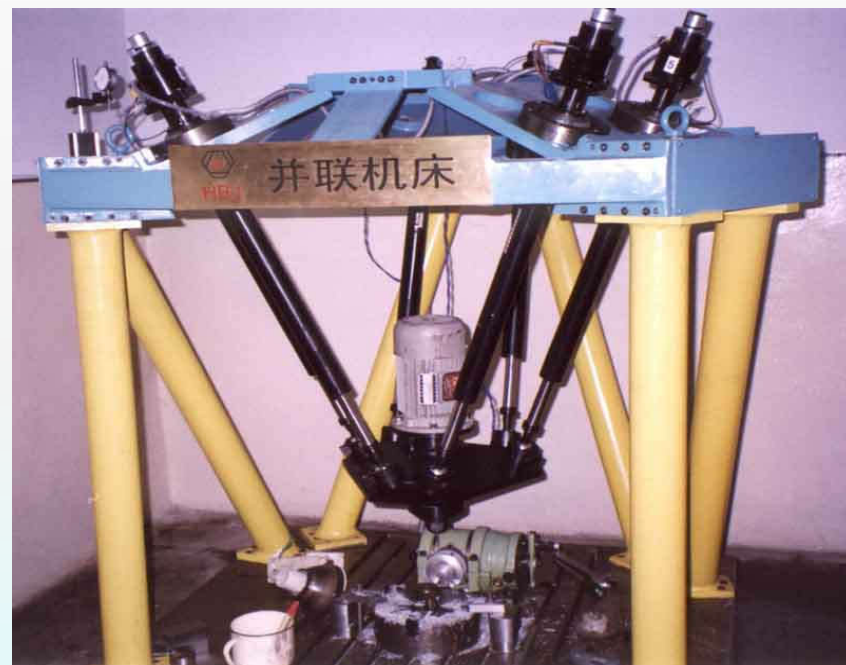


图8.12 哈尔滨工业大学并联机床



(2) 动态模拟



图8.13 飞行模拟器

(3) 医疗器械

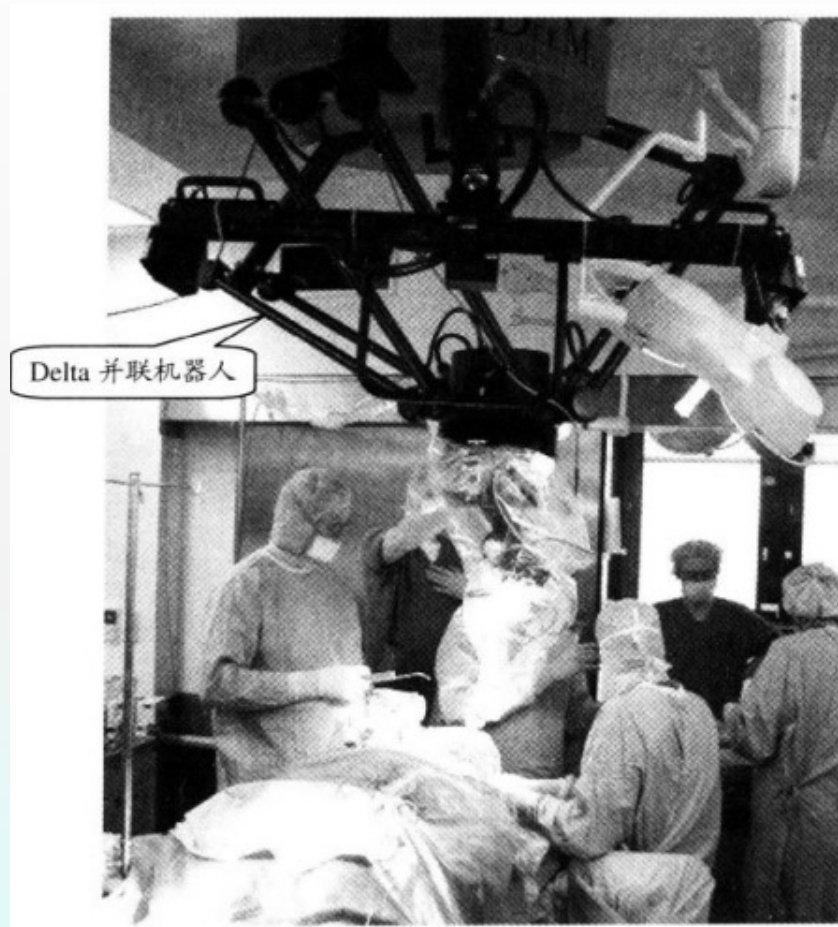


图8.14 洪堡大学手术机器人实验室的现场实况

(4) 工业机器人

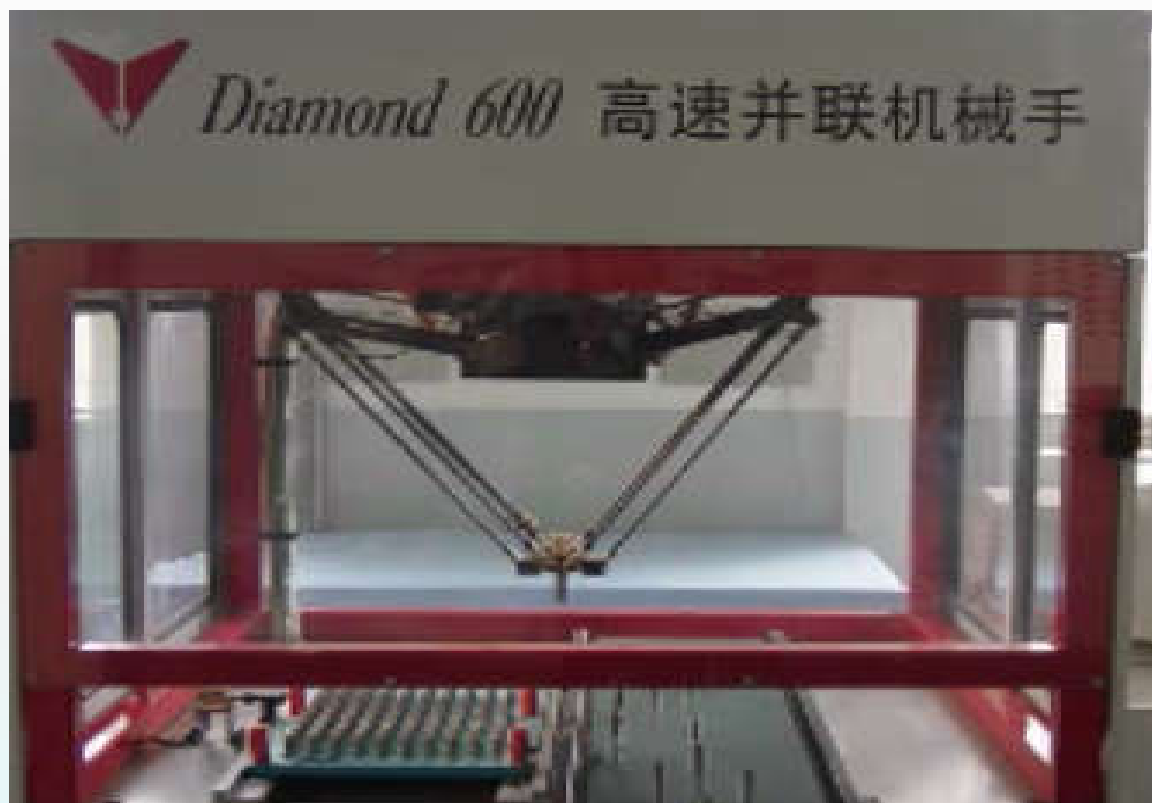
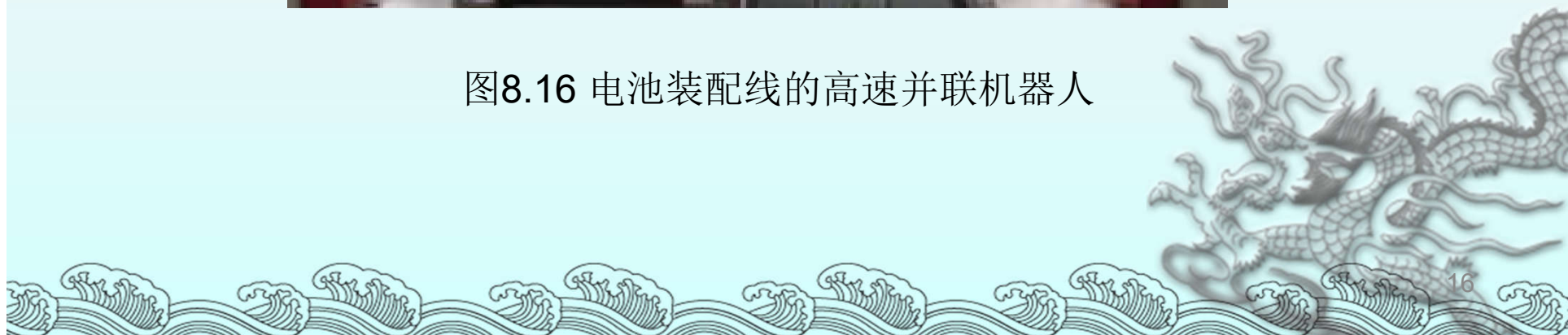


图8.16 电池装配线的高速并联机器人



(5) 微纳操作

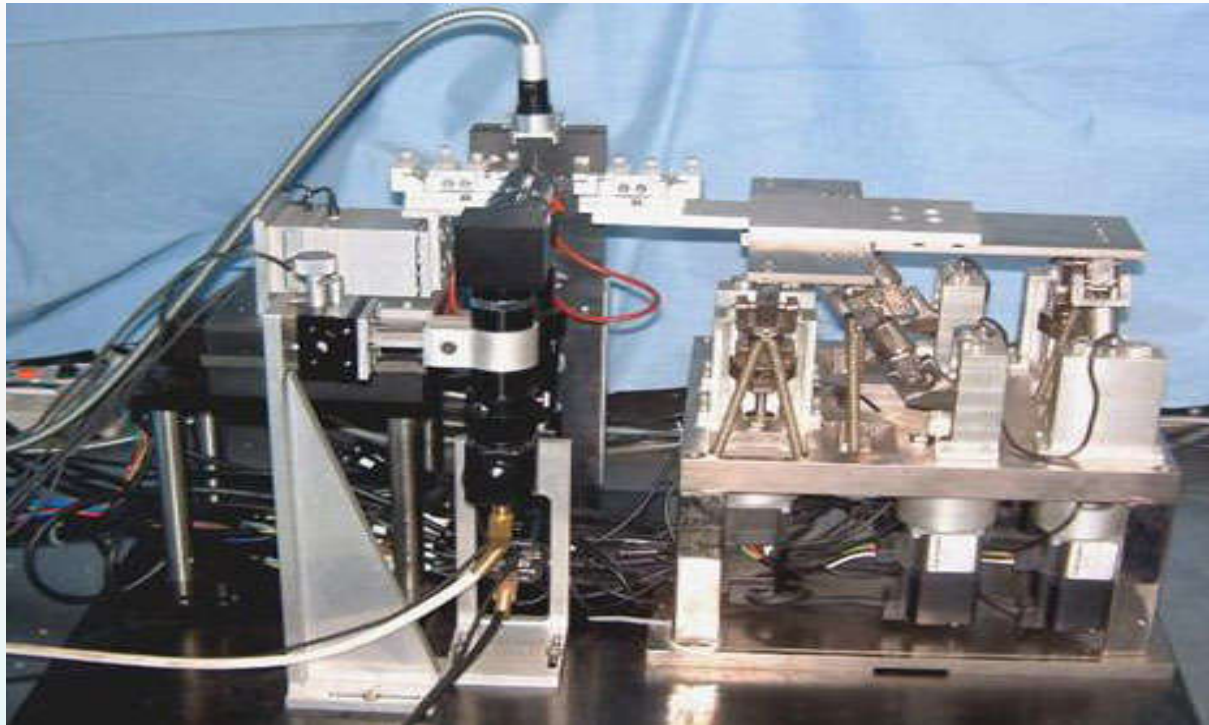
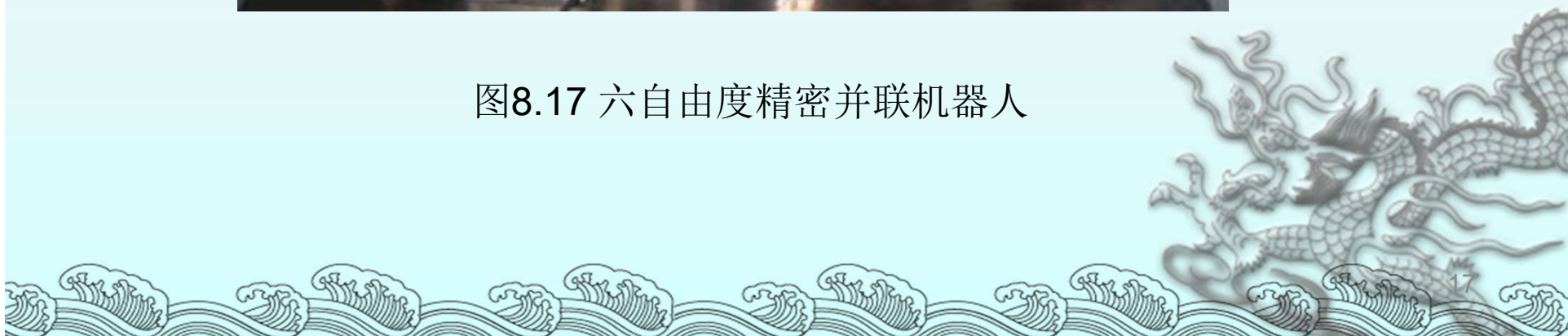


图8.17 六自由度精密并联机器人



(6) 力与力矩传感器

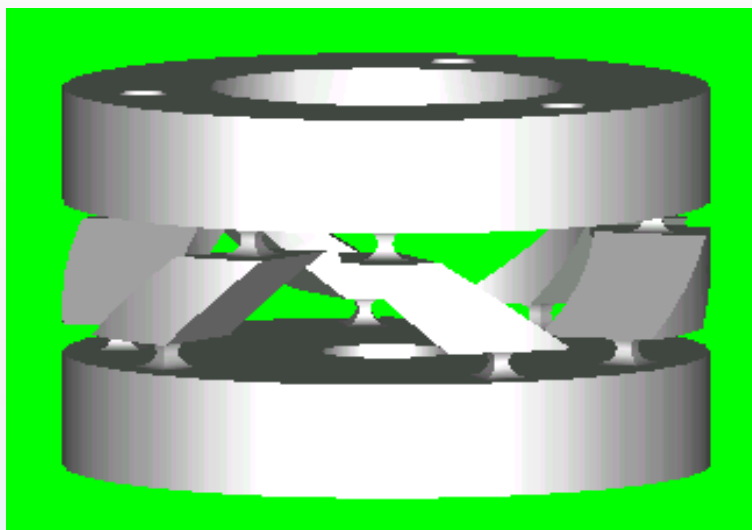
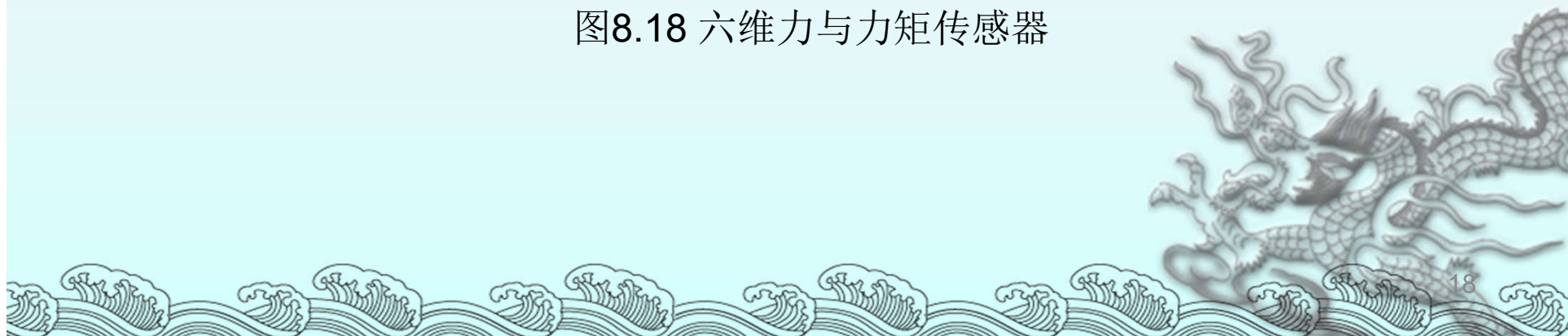


图8.18 六维力与力矩传感器

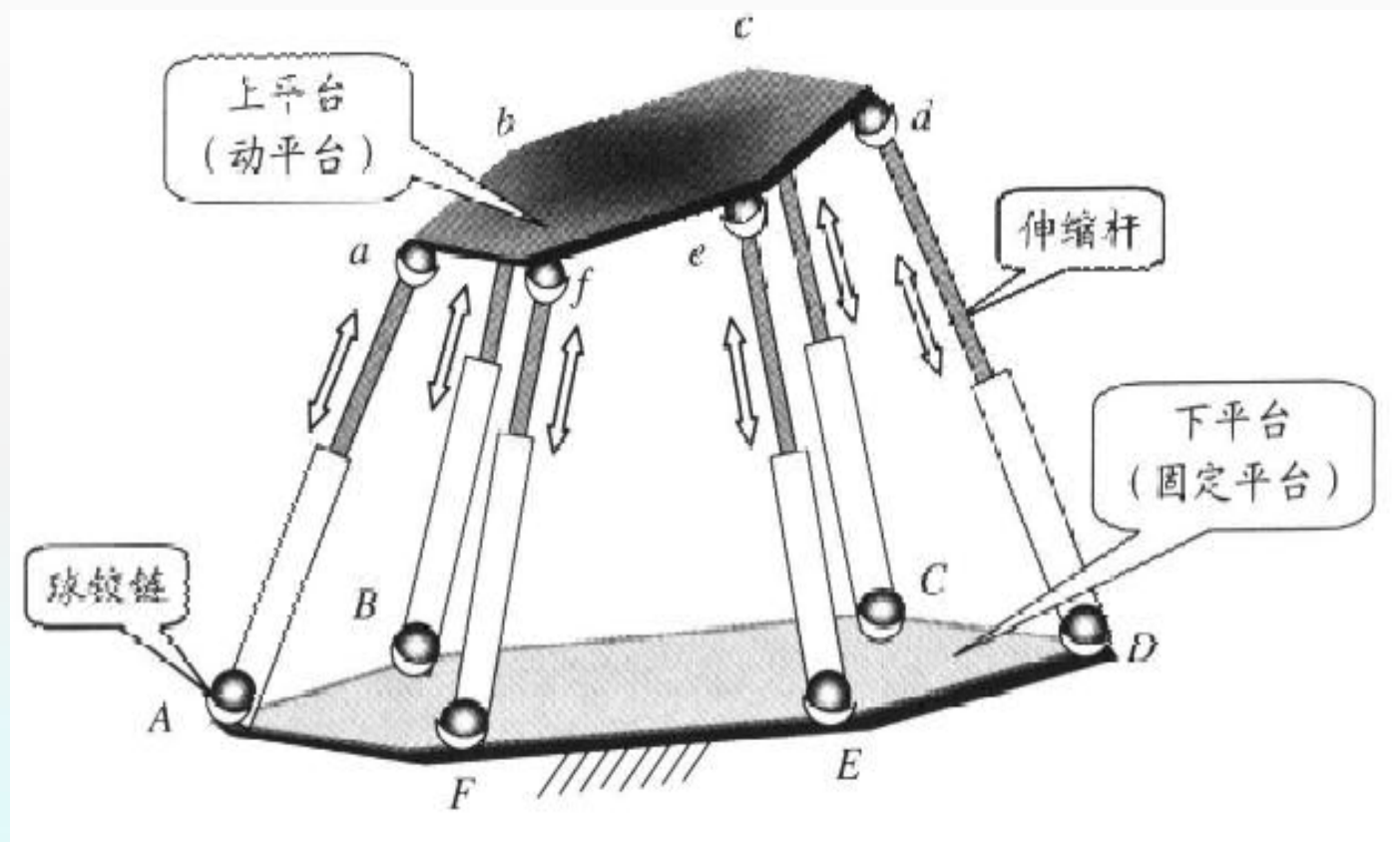


任务二 典型的并联机构

- Stewart平台
- Delta并联机器人
- Tricept机器人

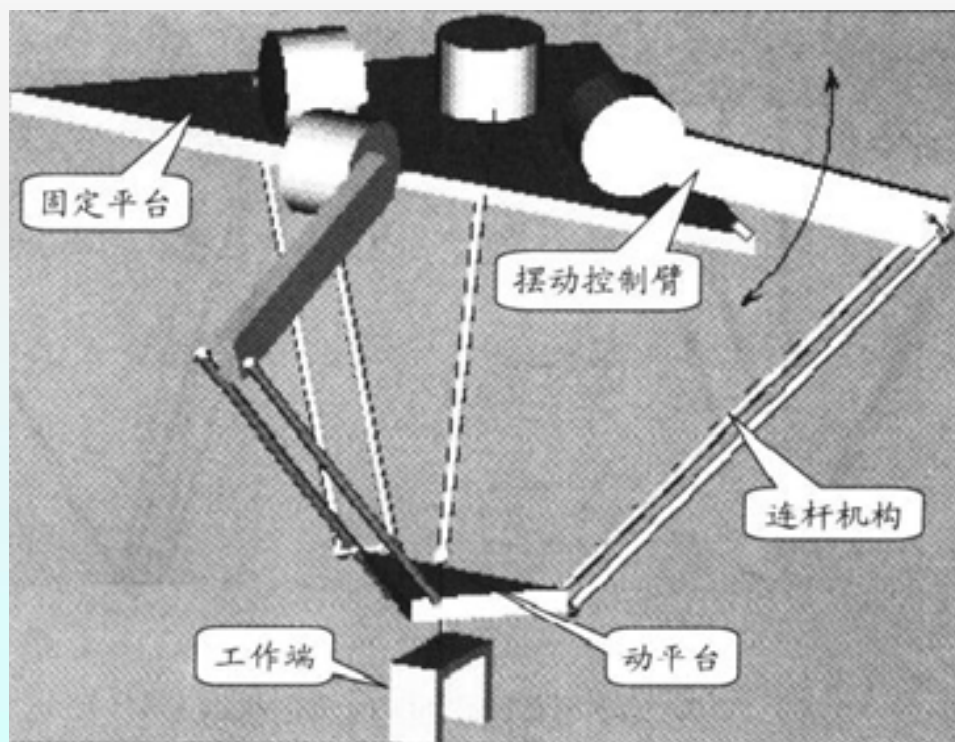


1. Stewart平台

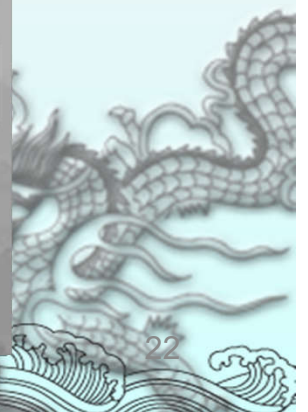
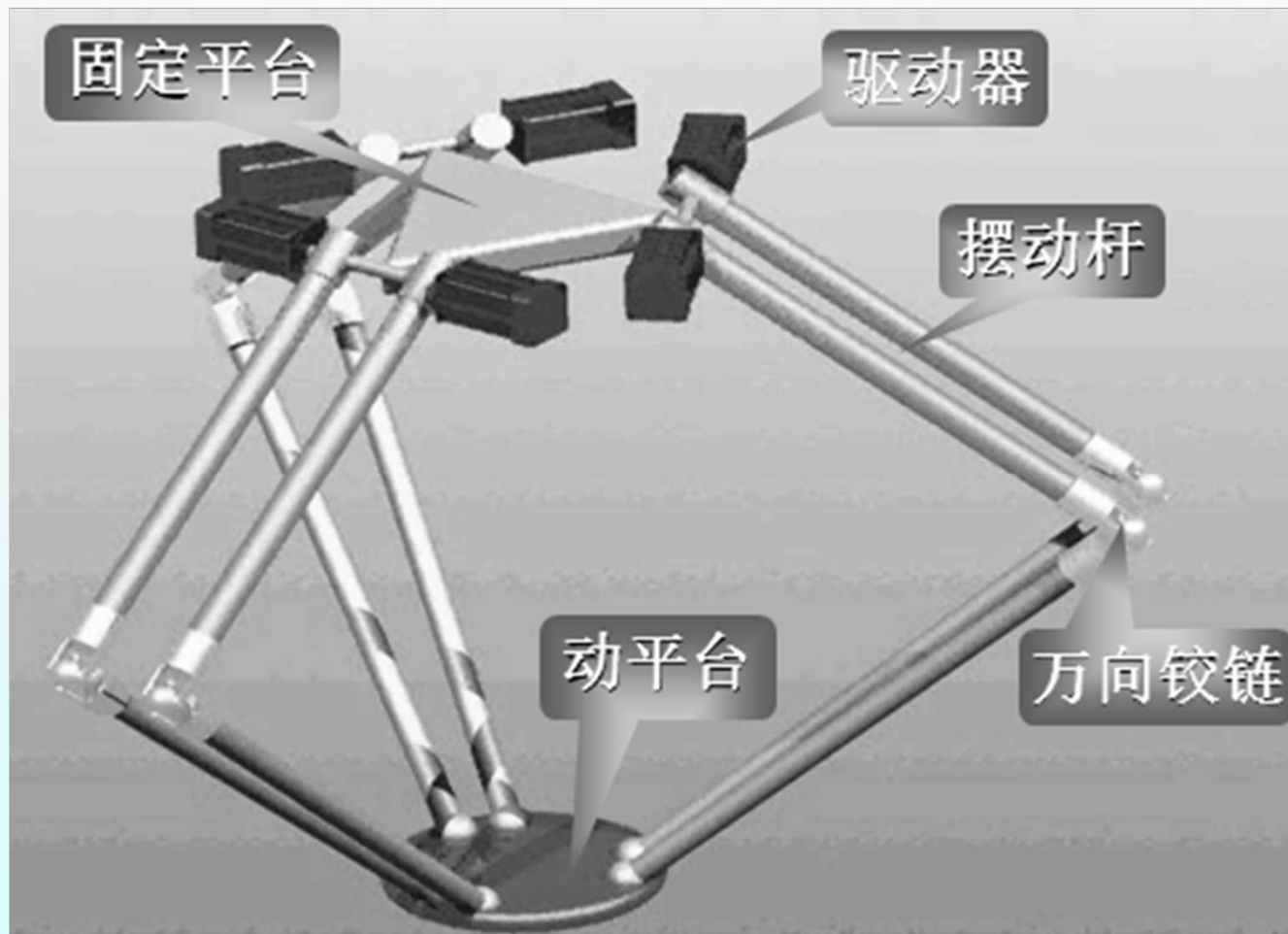


2. Delta并联机器人

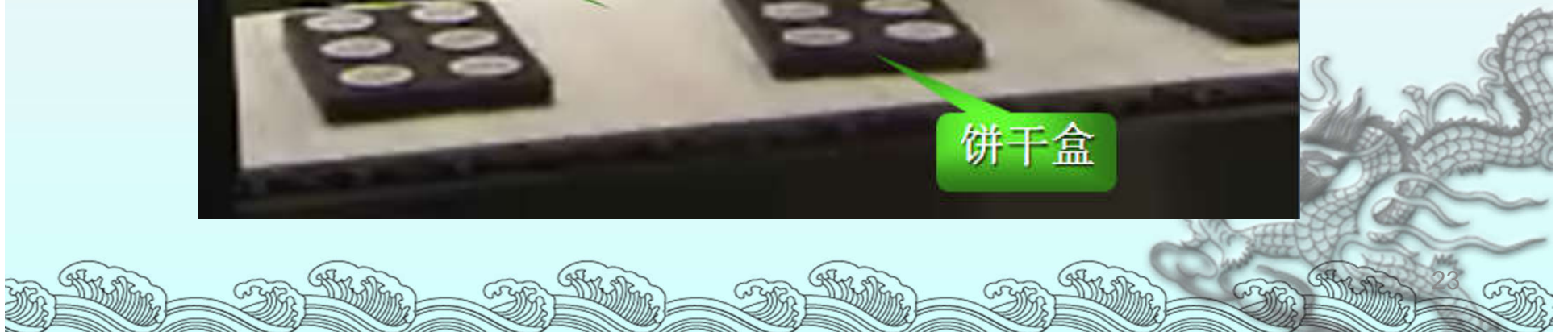
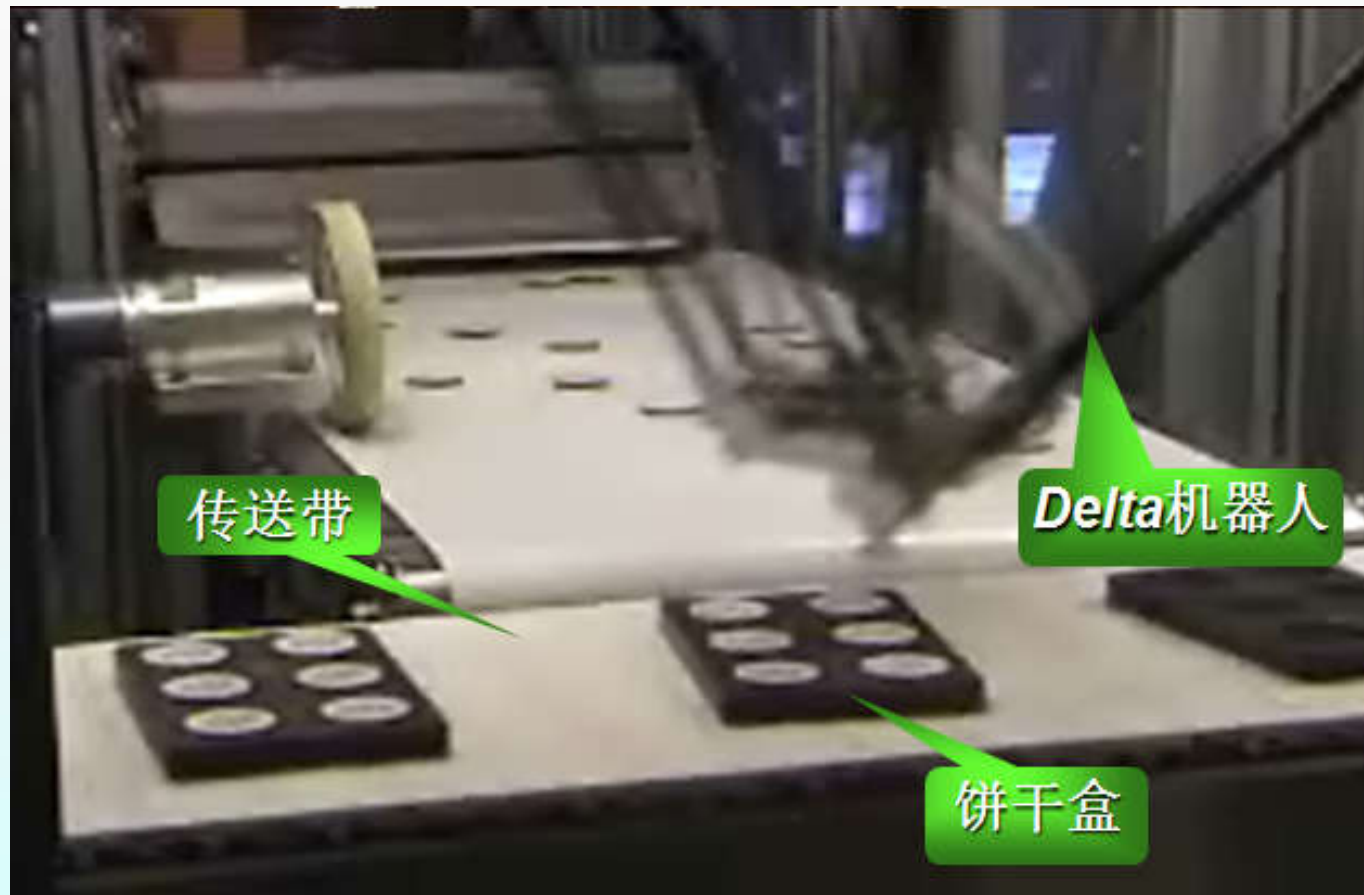
Delta并联机器人有两种典型的结构，一种为3自由度结构，一种为6自由度机构。3自由度的Delta并联机器人由3组连杆机构和摆动控制臂连接固定平台（上平台）和动平台（下平台），其结构如图8.20所示。



6自由度的Delta并联机器人由6组连杆机构和摆动控制臂连接固定平台（上平台）和动平台（下平台），其结构如图8.21所示。



Delta并联机器人的应用

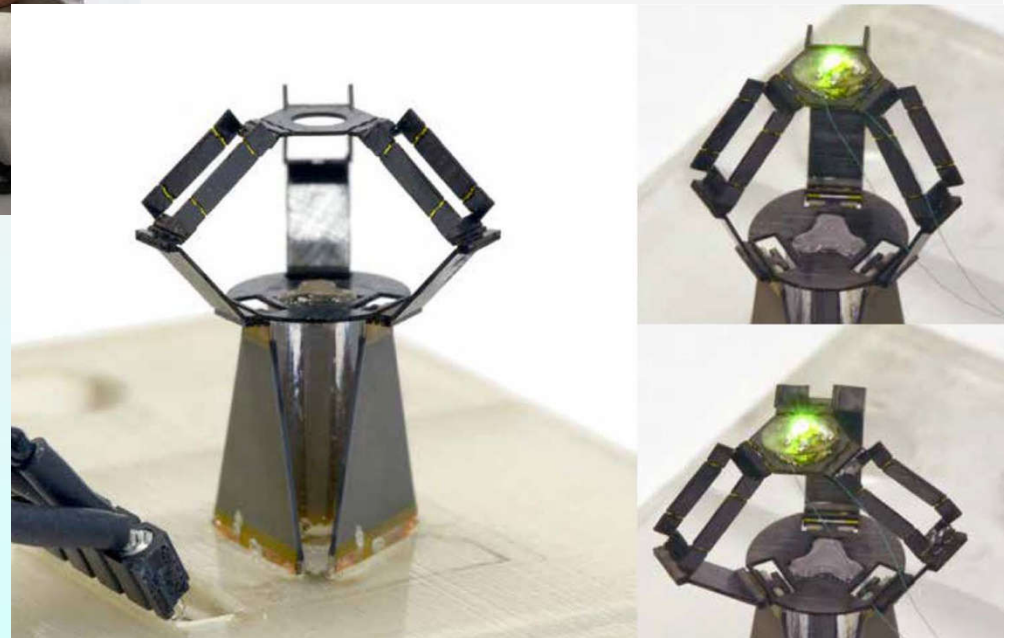


Delta robot



Reymond Clavel @ EPFL

millDelta robot @ Harvard



3. Tricept机器人



图8.23 Tricept并联机器人

Tricept机器人的应用

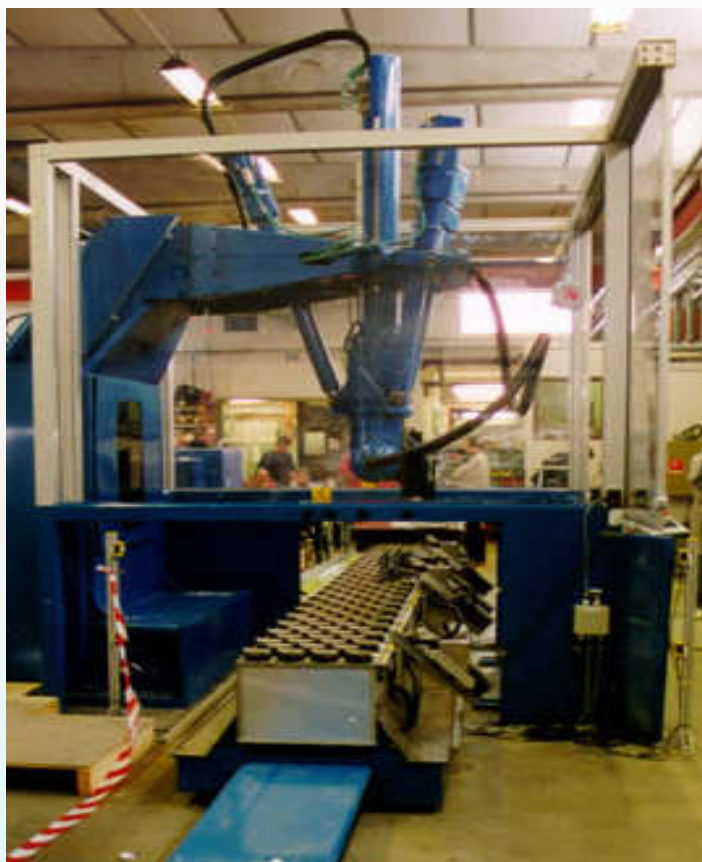


图8.24 Tricept并联机器人加工飞机零件

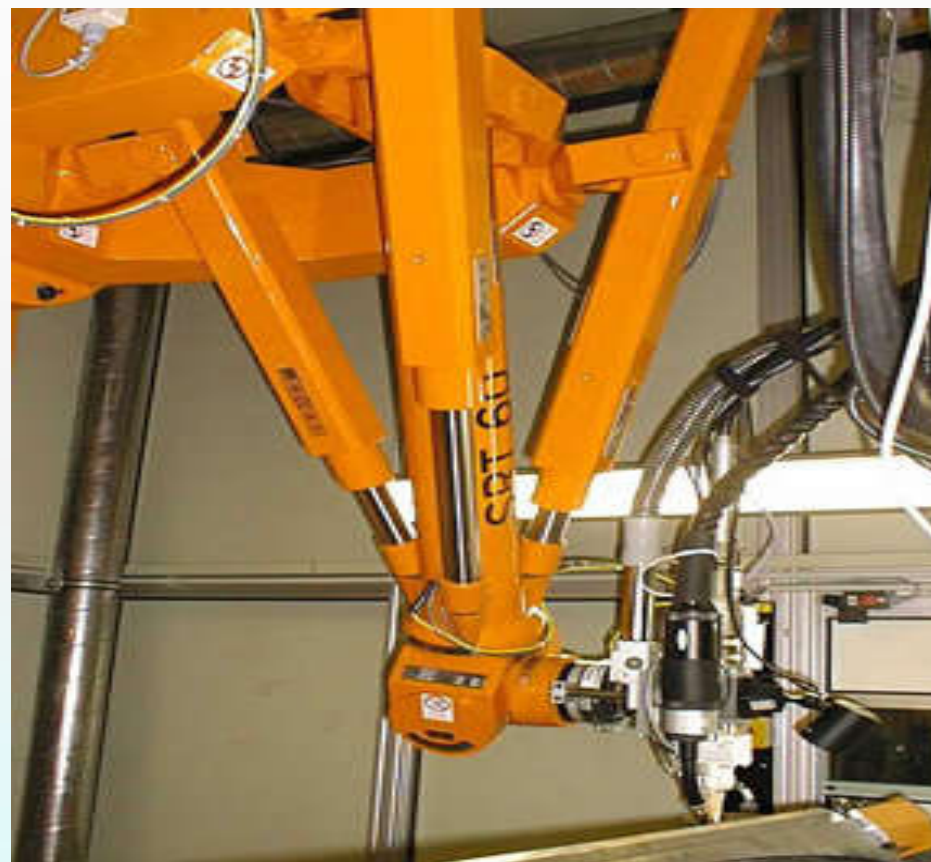


图8.25 Tricept并联机器人激光加工

Rigid-Link
Manipulators

Serial
Manipulators



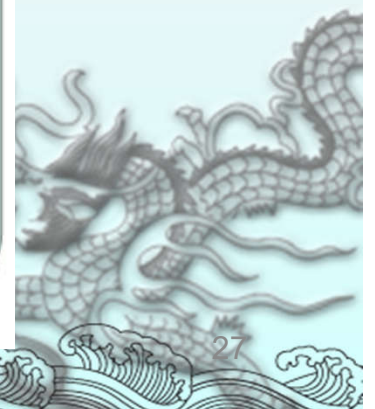
Parallel
Manipulators



Continuum
Manipulators



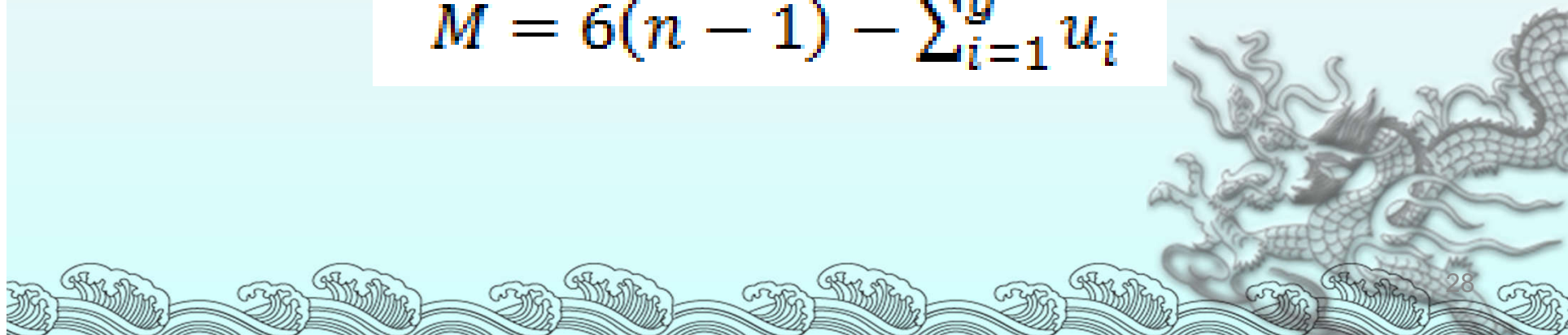
Parallel Continuum
Manipulators



任务三 并联机构自由度的计算

若在三维空间中有 n 个完全不受约束的物体，并且任选其中的一个为固定参照物，因每个物体相对参照物都有6个运动自由度，则 n 个物体相对参照物共有 $6(n-1)$ 个运动自由度。若在所有物体之间用运动副联接起来，设第 i 个运动副的约束为 u_i ，此约束可以是1和5之间的任何数，如果所有 n 个物体之间的运动副数目为 g ，则这时的运动自由度应减去所有的约束数的总和，为机构的自由度，即

$$M = 6(n - 1) - \sum_{i=1}^g u_i$$

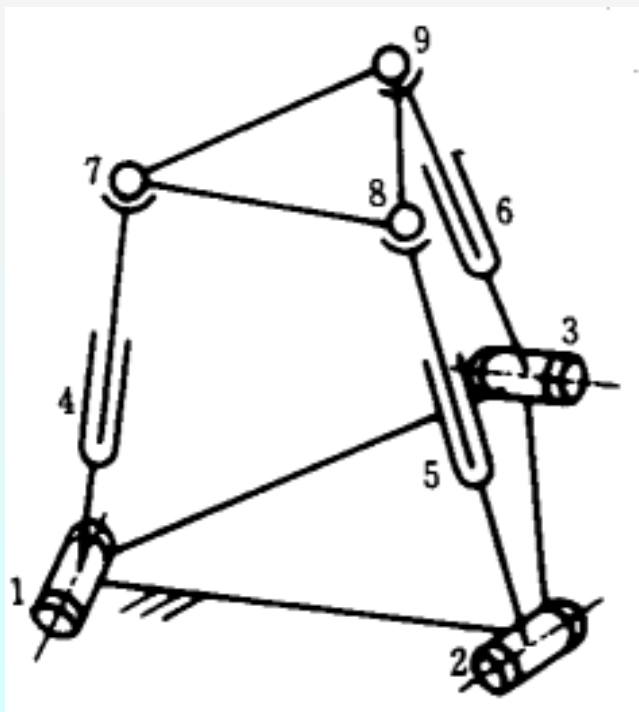


这里 M 表示自由度。在一般情况下，式中的 u_i 可以用 $(6 - f_i)$ 代之， f_i 为第 i 个运动副的相对自由度数。则有 Kutzbach Grubler 公式：

$$M = 6(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i$$

一般形式的空间机构自由度计算公式

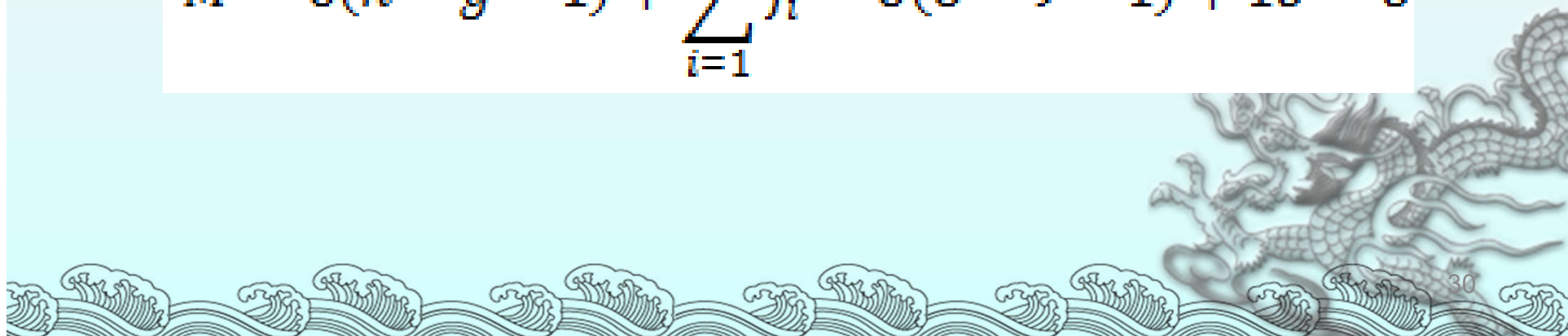
例8-1 计算下图所示的空间多环机构的自由度。



由上图可知，该机构的总的构件数 $M=8$ 。运动副数 $=9$ ，
其中

- 运动副1~3为转动副，其自由度皆为1，
- 运动副4~6为移动副，它们的自由度也为1，
- 运动副7~9是球面副，每个球面副的自由度为3

$$M = 6(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i = 6(8 - 9 - 1) + 15 = 3$$



对于多环空间机构，自由度计算公式还可以写成更加方便的形式

$$M = 6(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i$$



$$M = \sum_{i=1}^g f_i - 6l$$

l 为独立的环路数目。

注意：上述公式只适用于公共约束为零，即不具有公共约束的情况。而熟知的平面机构及球面机构的自由度计算公式，则对应公共约束为3。



对于更为普遍的情形，机构可能具有从零到6之间任何数目的公共约束，机构的自由度可以表示为更加一般的形式。

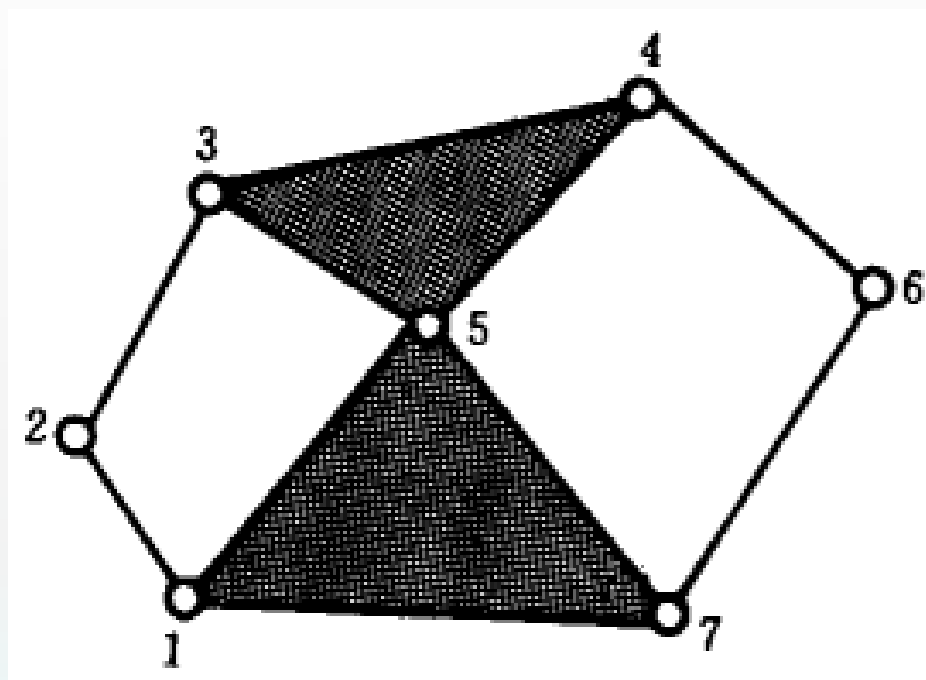
$$M = d(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i$$

$$M = \sum_{i=1}^g f_i - dl$$

d 为机构的阶数



例8.2 计算图8.27所示的平面机构的自由度



$$M = \sum_{i=1}^g f_i - dl = 7 - 3 \times 2 = 1$$

任务四 并联机构的位置分析

- 位置反解
- 位置正解的数值方法



机构的位置分析是求解机构的输入与输出构件之间的位置关系，这是机构运动分析的最基本的任务，也是机构速度、加速度、受力分析、误差分析、工作空间分析、动力分析和机构综合等的基础。由于并联机构结构复杂，对并联机构进行位置分析要比单环空间机构的位置分析复杂得多。

1. 位置反解

当已知机构主动件的位置，求解机构的输出件的位置和姿态称为位置分析的正解，若已知输出件的位置和姿态，求解机构输入件的位置称为**机构位置的反解**。

在串联机器人机构的位置分析中，正解比较容易，而反解比较困难；相反在并联机器人机构的分析中，反解比较简单而正解却十分复杂。



这里以6—SPS并联机构为例讨论并联机构的位置反解方法。6—SPS并联机构的上下平台以6个分支相联，每个分支两端是两个球铰，中间是一移动副。驱动器推动移动副作相对移动，改变各杆的长度，使上平台变化在空间的位置和姿态。当给定上平台在空间的位置和姿态，求各个杆长，即各移动副的位移，这就是该机构的位置反解。



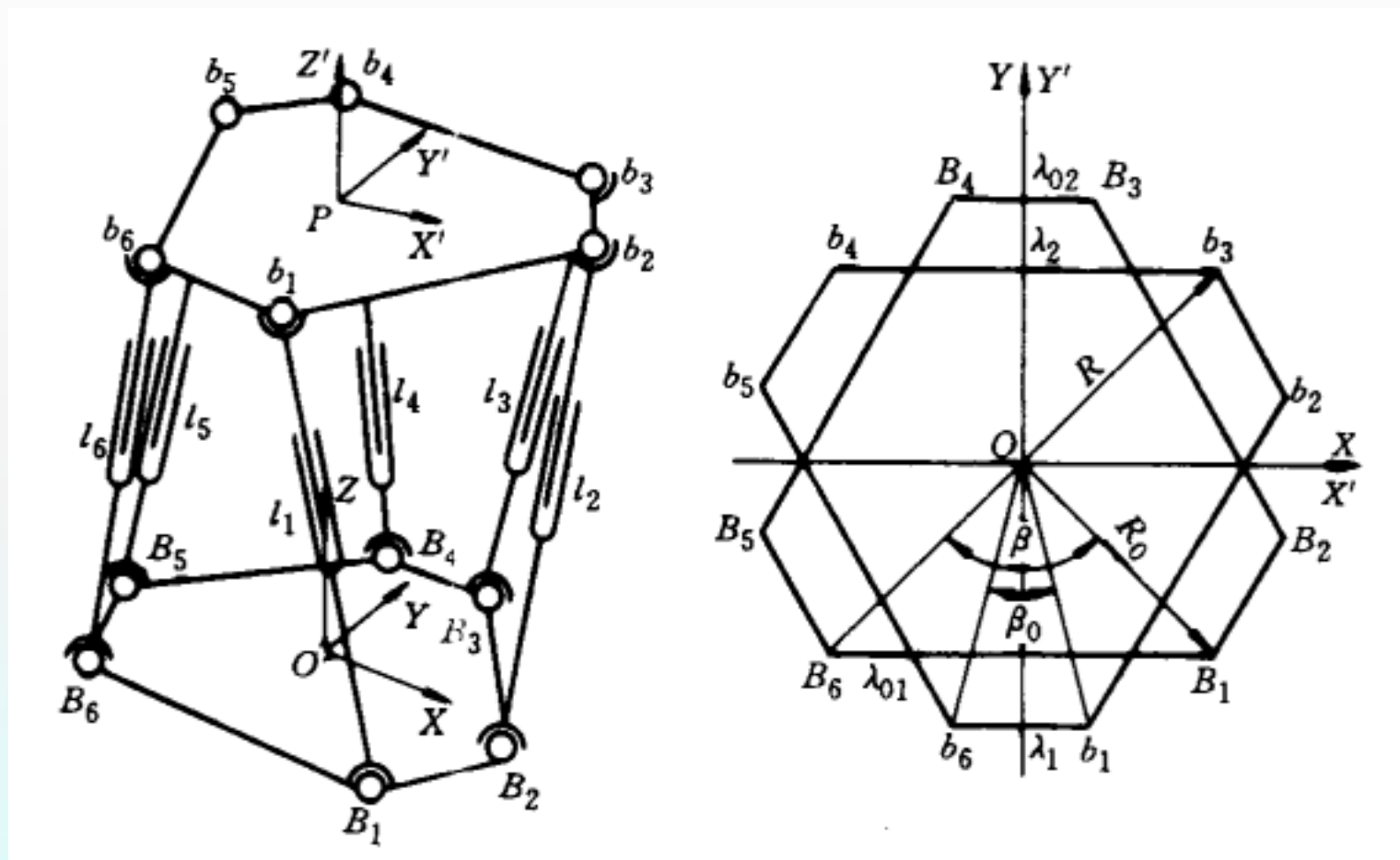


图8.28 6—SPS并联机构

动坐标系中的任一向量 R' 可以变换到固定坐标系中的 R :

$$R = TR' + P$$

上平台姿势的方向余弦矩阵: $T = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}^T$

上平台选定的参考点:

$$P = \{X_p \quad Y_p \quad Z_p\}^T$$

6个驱动器的杆长矢量:

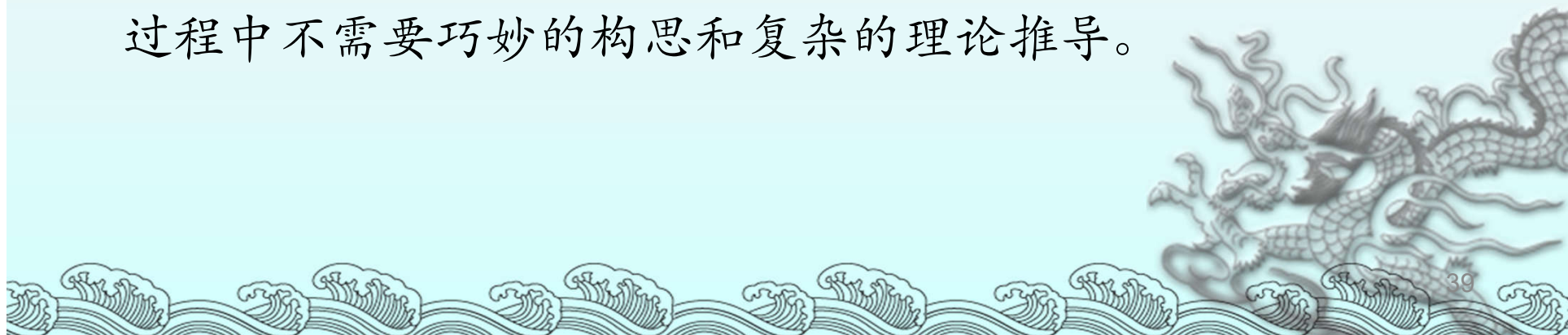
$$l_i = b_i - B_i \quad (i=1, 2, \dots, 6)$$

$$l_i = \begin{bmatrix} d_{11}b'_{ix} + d_{12}b'_{iy} + X_p - B_{ix} \\ d_{21}b'_{ix} + d_{22}b'_{iy} + Y_p - B_{iy} \\ d_{31}b'_{ix} + d_{32}b'_{iy} + Z_p \end{bmatrix}$$

$$l_i = \sqrt{l_{ix}^2 + l_{iy}^2 + l_{iz}^2} \quad (i=1, 2, \dots, 6)$$

2. 位置正解的数值方法

在机构的运动分析中，并联机构的位置正解分析是最基本也是最困难的。分析并联机构位置正解的方法很多，概括起来有**迭代法**、**解析法**、**同伦算法**和**数学机械化方法**。**迭代法**的特点是求解速度较快，缺点是需要选取比较接近真实解的初始值；**解析法**的优点是不需选定初值，可求出所有位置正解，该方法具有推导过程复杂、技巧性较强的缺点；**同伦算法**的优点是无需将位置正解的非线性方程组消元至一元代数方程，也不需选取初值且可求得所有解。缺点是求解速度很低；**数学机械化法**的优点是在整个计算过程中不需要巧妙的构思和复杂的理论推导。



一种用于6—SPS机构位置分析的三维搜索法。

机构的位置反解计算方程：

$$l_i = \sqrt{l_{ix}^2 + l_{iy}^2 + l_{iz}^2} \quad (i=1, 2, \dots, 6)$$

首先将6—SPS机构的非线性方程组的未知数个数通过数学处理降为3个。即将方程组 (8.14) 的6个独立方程分为3组，即

$$(l_1^2, l_6^2), (l_2^2, l_5^2), (l_3^2, l_4^2)$$

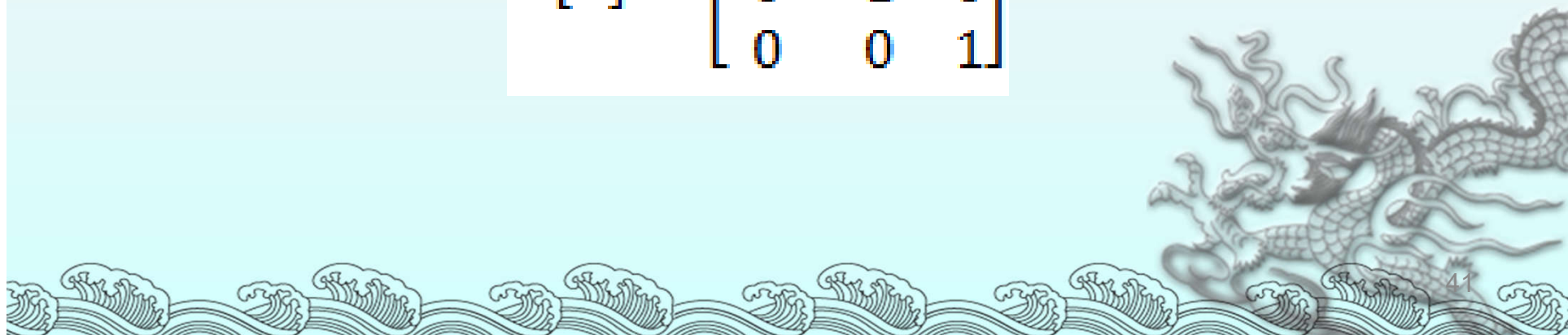


在每组两个方程之间进行相加、相减，会得到另外形式的6个独立方程。在进行化简时，应注意机构各铰链点之间存在如下的关系

$$\begin{aligned} \{b'_{4+n}\} &= [S]\{b'_{3-n}\} \\ \{B_{4+n}\} &= [S]\{B_{3-n}\} \end{aligned} \quad (n=0, 1, 2)$$

式中：

$$[S] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



为使方程进一步简化，将方程中各项展开，并利用如下诸关系式

$$\left. \begin{aligned} d_{11}^2 - d_{21}^2 + d_{31}^2 &= 1 \\ d_{12}^2 - d_{22}^2 + d_{32}^2 &= 1 \\ d_{11}d_{12} + d_{21}d_{22} + d_{31}d_{32} &= 1 \end{aligned} \right\}$$
$$\left. \begin{aligned} b_{ix}'^2 + b_{iy}'^2 &= R^2 \\ B_{iX}^2 + B_{iY}^2 &= R_0^2 \end{aligned} \right\}$$



在每组两个方程之间进行相加、相减，会得到另外形式的6个独立方程。

$$\frac{l_1^2 + l_6^2}{2} = R^2 + R_0^2 + W - 2Y_P B_{1Y} - 2(d_{11}b'_{1x}B_{1X} + d_{22}b'_{1y}B_{1Y}) + 2b'_{1y}(D_2 * P) \quad (8.18)$$

$$\frac{l_1^2 - l_6^2}{4} = -X_P B_{1X} - d_{21}b'_{1x}B_{1Y} - d_{12}b'_{1y}B_{1X} + b'_{1x}(D_1 * P) \quad (8.19)$$

$$\frac{l_2^2 + l_5^2}{2} = R^2 + R_0^2 + W - 2Y_P B_{2Y} - 2(d_{11}b'_{2x}B_{2X} + d_{22}b'_{2y}B_{2Y}) + 2b'_{2y}(D_2 * P) \quad (8.20)$$

$$\frac{l_2^2 - l_5^2}{4} = -X_P B_{2X} - d_{21}b'_{2x}B_{2Y} - d_{12}b'_{2y}B_{2X} + b'_{2x}(D_1 * P) \quad (8.21)$$

$$\frac{l_3^2 + l_4^2}{2} = R^2 + R_0^2 + W - 2Y_P B_{3Y} - 2(d_{11}b'_{3x}B_{3X} + d_{11}b'_{3y}B_{3Y}) + 2b'_{3y}(D_2 * P) \quad (8.22)$$

$$\frac{l_3^2 - l_4^2}{4} = -X_P B_{3X} - d_{21}b'_{3x}B_{3Y} - d_{12}b'_{3y}B_{3X} + b'_{3x}(D_1 * P) \quad (8.23)$$

式中：

$$D_1 = \{d_{11}, d_{12}, d_{13}\}^T$$

$$D_{21} = \{d_{21}, d_{22}, d_{23}\}^T$$

$$W = X_P^2 + Y_P^2 + Z_P^2$$

式 (8.18) — (8.23) 中的6个独立方程已比原式 (8.14) 化简了许多，再将式 (8.18)、(8.20)、(8.22) 作为一组，将式 (8.19)、(8.21)、(8.23) 作为一组，并利用下面关系式

$$\left. \begin{aligned} b'_{1x} + b'_{3x} &= b'_{2x} \\ B_{1X} + B_{3X} &= B_{2X} \end{aligned} \right\}$$
$$\left. \begin{aligned} b'_{1y} + b'_{3y} &= -b'_{2y} \\ B_{1Y} + B_{3Y} &= -B_{2Y} \end{aligned} \right\}$$

将式 (8.19) 减去式 (8.21) 再减去式 (8.23) 得

$$E_{11}d_{21} + E_{12}d_{12} = E_{13}X_P + E_{14} \quad (8.26)$$

将式 (8.19) x方向的分量乘以 b'_{2x} 减去式 (8.21) x方向的分量乘以 b'_{1x} 并整理得

$$E_{21}d_{23} + E_{22}d_{12} = E_{23}X_P + E_{24} \quad (8.27)$$



将式 (8.18) 加上式 (8.21) 再加上式 (8.23) 得:

$$E_{31}d_{11} + E_{32}d_{22} = E_{33}Y_P + E_{34}W + E_{35} \quad (8.28)$$

将式 (8.18) x方向的分量乘以 b'_{2y} 减去式 (8.20) x方向的分量乘以 b'_{1y} 并整理得

$$E_{41}d_{11} + E_{42}d_{22} = E_{43}Y_P + E_{44}W + E_{45} \quad (8.29)$$



式 (8.26) ~ (8.29) 中:

E_{ij} ($i=0, 1, 2, 3, 4$; $j=0, 1, 2, 3, 4, 5$) 只与输入量 (杆长) 和基本尺寸有关, 是与输出量, 即机构的位置和姿态无关的常量, 具体表达如下:

$$E_{11} = b'_{1x}B_{1Y} - b'_{2x}B_{2Y} + b'_{3x}B_{3Y}$$

$$E_{12} = b'_{1y}B_{1X} - b'_{2y}B_{2X} + b'_{3y}B_{3X}$$

$$E_{13} = 0$$

$$E_{14} = \frac{l_2^2 + l_4^2 + l_6^2 - l_1^2 - l_3^2 - l_5^2}{4}$$

$$E_{21} = b'_{1x}B_{1Y}b'_{2x} - b'_{2x}B_{2Y}b'_{1x}$$

$$E_{22} = b'_{1y}B_{1X}b'_{2x} - b'_{2y}B_{2X}b'_{1x}$$

$$E_{23} = B_{2X}b'_{1x} - B_{1X}b'_{2x}$$

$$E_{24} = \frac{[(l_2^2 - l_5^2)b'_{1x} - (l_1^2 - l_6^2)b'_{2x}]}{4}$$

$$E_{31} = 2(b'_{1x}B_{1X} + b'_{2x}B_{2X} + b'_{3x}B_{3X})^{\ast}$$

$$E_{32} = 2(b'_{1y}B_{1Y} + b'_{2y}B_{2Y} + b'_{3y}B_{3Y})^{\ast}$$

$$E_{33} = 0^{\ast}$$

$$E_{34} = 3^{\ast}$$

$$E_{35} = 3(R^2 + R_0^2) - \frac{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 + l_6^2}{2}^{\ast}$$

$$E_{41} = 2(b'_{1x}B_{1X}b'_{2y} - b'_{2x}B_{2X}b'_{1y})^{\ast}$$

$$E_{42} = 2(b'_{1y}B_{1Y}b'_{2y} - b'_{2y}B_{2Y}b'_{1y})^{\ast}$$

$$E_{43} = 2(B_{2Y}b'_{1y} - B_{1Y}b'_{2y})^{\ast}$$

$$E_{44} = b'_{2y} - b'_{1y}^{\ast}$$

$$E_{45} = (R^2 + R_0^2)(b'_{2y} - b'_{1y}) - \frac{[(l_1^2 + l_6^2)b'_{2y} - (l_2^2 + l_5^2)b'_{1y}]}{2}^{\ast}$$

具体形式由线性方程组 (8.26) 和 (8.27) 可得:

$$\left. \begin{aligned} d_{21} &= N_1 X_P + M_1 \\ d_{12} &= N_2 X_P + M_2 \end{aligned} \right\} \quad (8.30)$$

由线性方程组 (8.28) 和 (8.29) 可得:

$$\left. \begin{aligned} d_{11} &= L_1 Y_P + K_1 W + J_1 \\ d_{22} &= L_2 Y_P + K_2 W + J_2 \end{aligned} \right\} \quad (8.31)$$



我们从第一组中取方程式 (8.28) , 从第二组中取方程式 (8.29) ,

$$\frac{l_3^2 + l_4^2}{2} = R^2 + R_0^2 + W - 2Y_P B_{3Y} - 2(d_{11}b'_{3x}B_{3X} + d_{22}b'_{3y}B_{3Y}) + 2b'_{3y}(\mathbf{D}_2 * \mathbf{P}) \quad (8.32)$$

$$\frac{l_3^2 - l_4^2}{4} = -X_P B_{3X} - d_{21}b'_{3x}B_{3Y} - d_{12}b'_{3y}B_{3X} + b'_{3x}(\mathbf{D}_1 * \mathbf{P}) \quad (8.33)$$

另外还有约束方程

$$d_{11}d_{12} + d_{21}d_{22} + d_{31}d_{32} = 0 \quad (8.34)$$



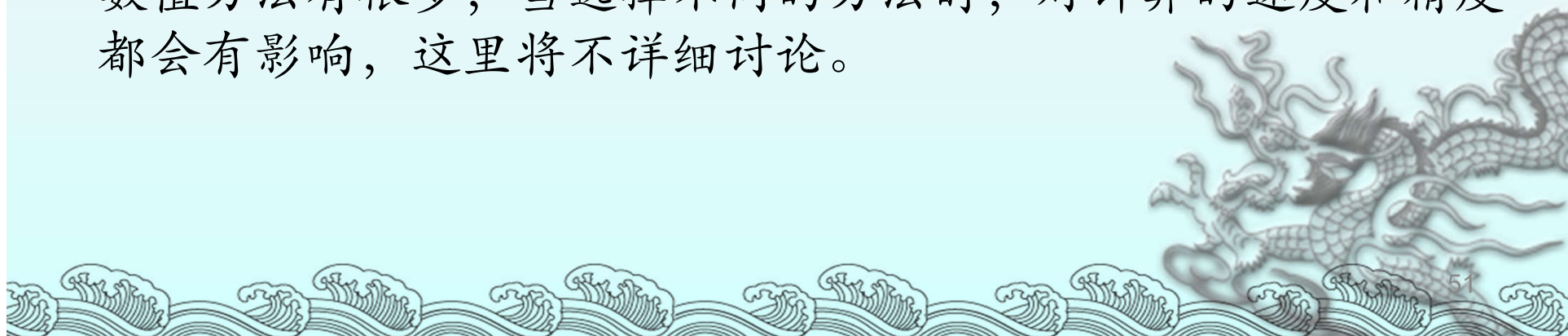
将式 (8.30)、式 (8.31) 各项代入式 (8.32) — (8.34) 后，就可得到只含3维变量的3个非线性方程的方程组

$$F_1 = \frac{l_3^2 + l_4^2}{2} - (R^2 + R_0^2) - W + 2Y_P B_{3Y} + 2(d_{11}b'_{3x}B_{3X} + d_{22}b'_{3y}B_{3Y}) - 2b'_{3y}(d_{12}X_P + d_{22}Y_P + d_{32}Z_P) = 0 \quad (8.35)$$

$$F_2 = \frac{l_3^2 - l_4^2}{4} + X_P B_{3X} + d_{21}b'_{3x}B_{3Y} + d_{12}b'_{3y}B_{3X} - b'_{3x}(d_{11}X_P + d_{21}Y_P + d_{31}Z_P) = 0 \quad (8.36)$$

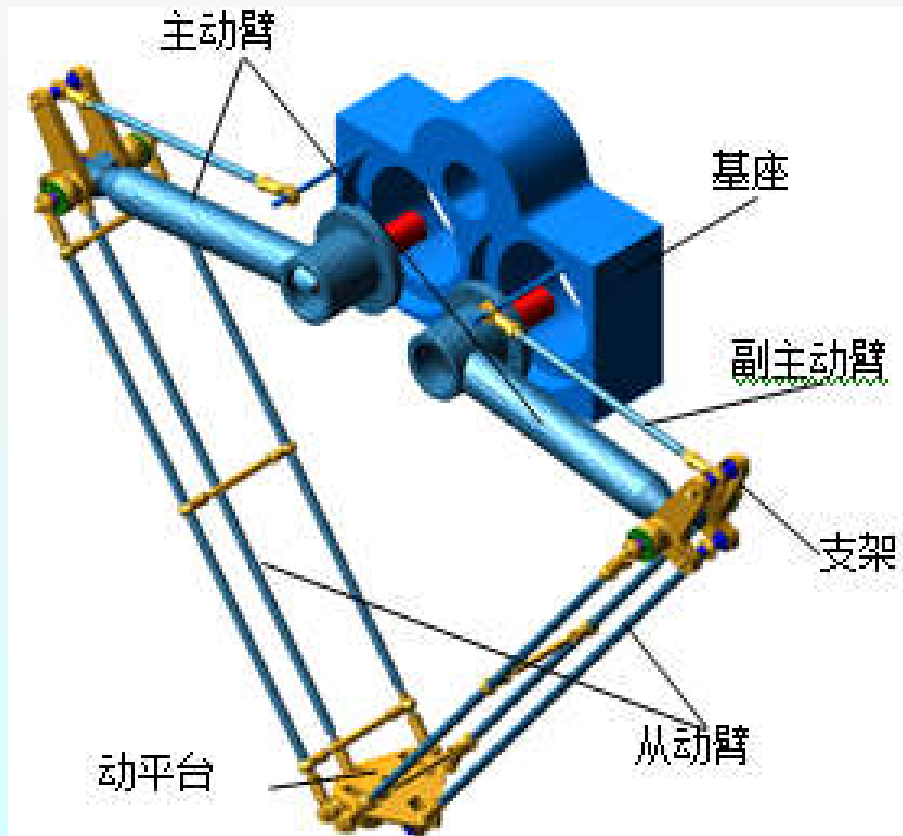
$$F_3 = d_{11}d_{12} + d_{21}d_{22} + d_{31}d_{32} = 0 \quad (8.37)$$

当采用数值方法求解方程组 (8.35) — (8.37) 时，计算速度将会明显比采用方程组 (8.14) 时要快得多。求解非线性方程的数值方法有很多，当选择不同的方法时，对计算的速度和精度都会有影响，这里将不详细讨论。

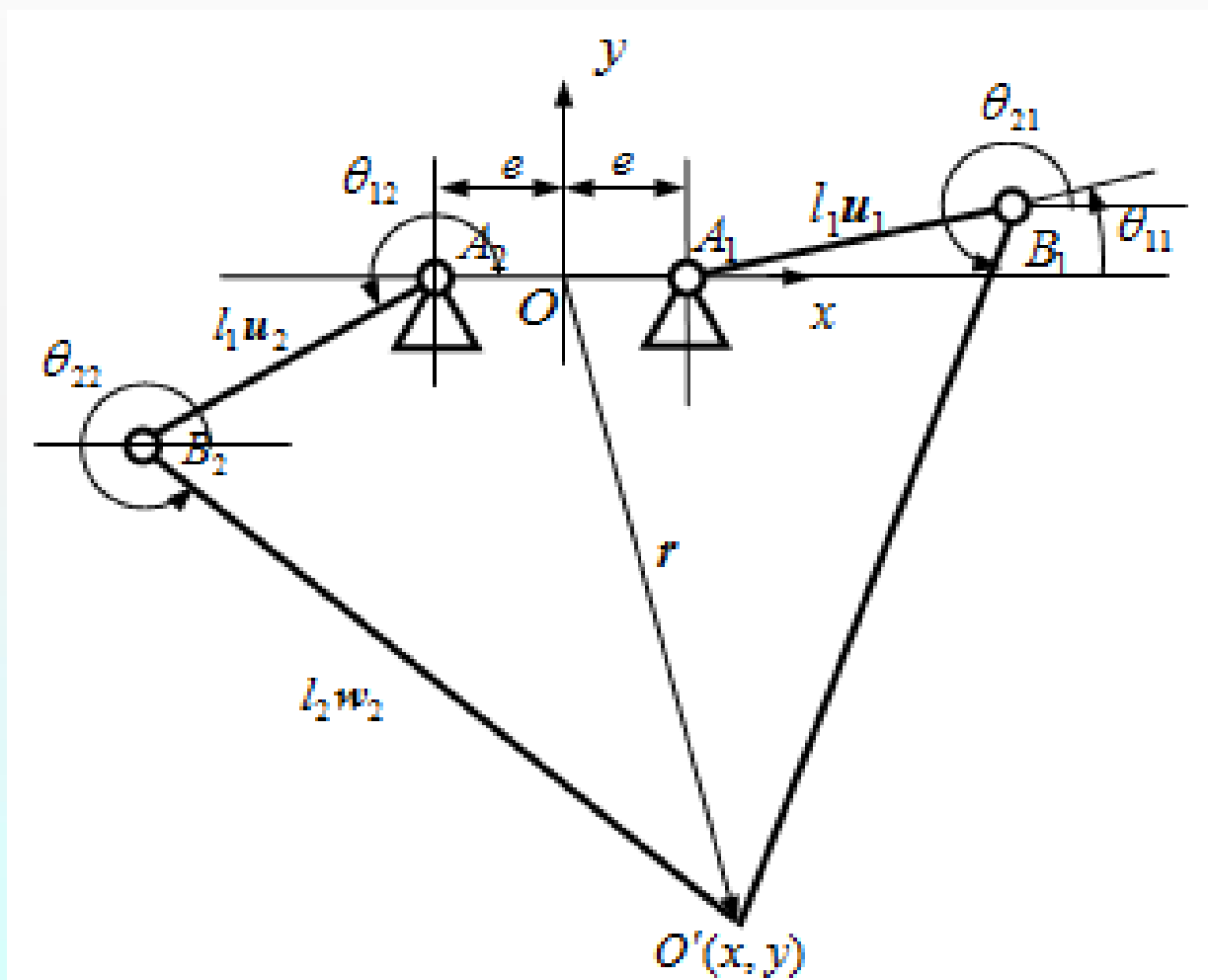


【综合实例分析】

Diamond并联机械手的位置求解



位置逆解



$$OO' = OA_i + A_iB_i + B_iO' \quad (8.38)$$



$$\|OO' - OA_i - A_iB_i\| = \|B_iO'\| \quad (8.39)$$

式中：

$$OO' = [x, y]^T ; \quad OA_i = [e \cos \phi_i, e \sin \phi_i]^T ;$$

$$A_iB_i = [l_1 \cos \theta_i \cos \phi_i, l_1 \sin \theta_i \cos \phi_i]^T \circ$$

考虑到Diamond机构的对称性

$$\phi_i = (i - 1) * 180^\circ \quad (i = 1, 2)$$

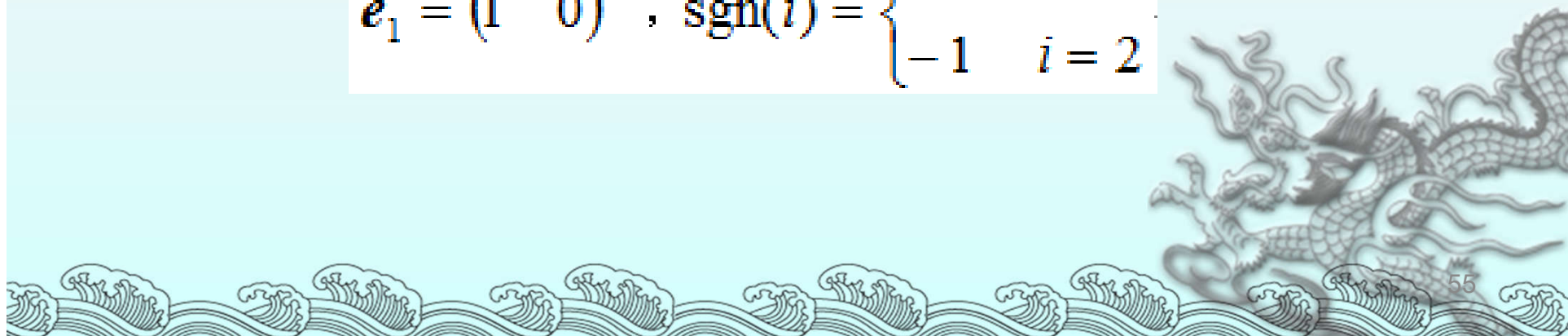
将 (8.39) 表示为矢量形式, 可写为

$$\boldsymbol{r} - \text{sgn}(i)\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}_1 - l_1\boldsymbol{u}_i = l_2\boldsymbol{w}_i, \quad i=1,2 \quad (8.40)$$

$l_1, l_2, \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{w}_i$ 分别表示支链*i*主、从动臂杆长和单位矢量

$$\boldsymbol{u}_i = (\cos\theta_{1i} \quad \sin\theta_{1i})^T, \quad \boldsymbol{w}_i = (\cos\theta_{2i} \quad \sin\theta_{2i})^T$$

$$\boldsymbol{e}_1 = (1 \quad 0)^T, \quad \text{sgn}(i) = \begin{cases} 1 & i=1 \\ -1 & i=2 \end{cases}$$



展开 (8.40) 得:

$$x^2 + y^2 + e^2 - 2l_1 y \sin \theta_{li} - 2l_1(x - \operatorname{sgn}(i)e) \cos \theta_{li} + l_1^2 - l_2^2 - 2 \operatorname{sgn}(i)ex = 0$$

令:

(8.41)

$$A_i = -2l_1 y, \quad B_i = -2l_1(x - \operatorname{sgn}(i)e)$$

$$C_i = x^2 + y^2 + e^2 + l_1^2 - l_2^2 - 2 \operatorname{sgn}(i)ex$$

则方程 (8.41) 化为:

$$A_i \sin \theta_{li} + B_i \cos \theta_{li} + C_i = 0$$

$$\theta_{li} = 2 \arctan \frac{-A_i + \operatorname{sgn}(i) \sqrt{A_i^2 - C_i^2 + B_i^2}}{C_i - B_i}$$

位置正解

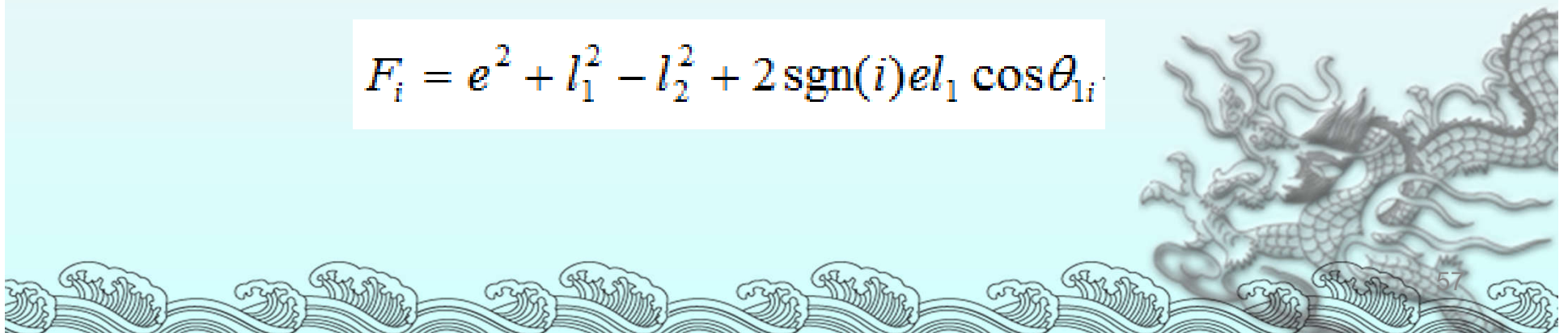
改写式(8-41)为如下形式

$$x^2 + y^2 + D_i x + E_i y + F_i = 0 \quad , \quad i = 1, 2 \quad (8.44)$$

式中：

$$D_i = -\operatorname{sgn}(i)e - 2l_1 \cos \theta_{1i} \quad , \quad E_i = -2l_1 \sin \theta_{1i}$$

$$F_i = e^2 + l_1^2 - l_2^2 + 2\operatorname{sgn}(i)el_1 \cos \theta_{1i}$$



展开方程组 (8.44) 可以得到二元二次方程组:

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$$

求解得:

$$y = -\frac{F_1 - F_2 + (D_1 - D_2)x}{E_2 - E_1}$$



$$x = \frac{-H - \sqrt{H^2 - 4GR}}{2G}$$

式中：

$$G = 1 + \frac{(D_1 - D_2)^2}{(E_2 - E_1)^2}$$

$$H = 2 \frac{D_1 - D_2}{E_2 - E_1} + D_1 + E_1 \frac{D_1 - D_2}{E_2 - E_1} +$$

$$R = \frac{(F_1 - F_2)^2}{(E_2 - E_1)^2} + E_1 \frac{F_1 - F_2}{E_2 - E_1} + F_1$$