

# 第1章 绪论

“机器人”已是家喻户晓的“大明星”，它迅速崛起，并对整个工业生产、太空和海洋探索，以及人类生活的各方面产生越来越大的影响。但是，现实世界中的机器人，并不像普通人们想象的那样完美。现有的机器人既不像神话和文艺作品所描写的那样智勇双全，也不如某些企业家和宣传家们所宣扬的那样多才多艺。

## 1.1 机器人学的发展

### 1.1.1 机器人的由来

人类长期以来存在一种愿望，即创造出一种像人一样的机器或人造人，以便能够代替人去进行各种工作。这就是“机器人”出现的思想基础。机器人的概念在人类的想象中已存在三千多年了，尽管直到 40 多年前，“机器人”才作为专有名词加以引用。

随着第一次工业和科学革命的进行，各种自动机器、动力机和动力系统的不断问世，机器人也开始由幻想时期转入自动机械时期，各种精巧的机器人玩具和工艺品应运而生。这些机器人玩具和工艺品的出现，标志着人类在机器人从梦想到现实这一漫长道路上，前进了一大步。进入 20 世纪之后，机器人已躁动于人类社会和经济的母胎之中，人们含有几分不安地期待着它的诞生。他们不知道即将问世的机器人将是个宠儿，还是个怪物。1920 年，捷克剧作家卡雷尔·凯培克在他的幻想情节剧《罗萨姆的万能机器人》中，第一次提出了“机器人”这个名词。1950 年，美国著名科学幻想小说家阿西摩夫在他的小说《我是机器人》中，提出了有名的“机器人三守则”：

- 1) 机器人必须不危害人类，也不允许它眼看人将受害而袖手旁观；
- 2) 机器人必须绝对服从于人类，除非这种服从有害于人类；
- 3) 机器人必须保护自身不受伤害，除非为了保护人类或者是为人类做出牺牲。

这三条守则，给机器人社会赋以新的伦理性，并使机器人概念通俗化，更易于为人类社会所接受。

多连杆机构和数控机床的发展和应用为机器人技术打下重要基础。

美国人乔治·德沃尔于 1954 年设计了第一台可编电子程序的工业机器人，并于 1961 年发表了该项机器人专利。1962 年，美国万能自动化( Unimation )公司的第一台机器人 Unimate 在美国通用汽车公司(GM)投入使用，这标志着第一代机器人的诞生。从此，机器人开始成为人类生活中的现实。

### 1.1.2 机器人的定义

国际上至今还没有合适的和为人们普遍同意的“机器人”定义，专家们采用不同的方法来定义这个术语。它的定义还因公众对机器人的想象以及科学幻想小说、电影和电视中对机器人形状的描绘而变得更为困难。为了规定技术、开发机器人新的工作能力和比较不同国家和公司的成果，就需要对机器人这一术语有某些共同的理解。各国对机器人有自己的定义。这些定义之

间差别较大。

国际上，关于机器人的定义主要有如下几种：

1) 英国简明牛津字典的定义。机器人是“貌似人的自动机，具有智力的和顺从于人的但不具人格的机器”。

2) 美国机器人协会(RIA)的定义。机器人是“一种用于移动各种材料、零件、工具或专用装置的，通过可编程序动作来执行种种任务的，并具有编程能力的多功能机械手(manipulator)”。

3) 日本工业机器人协会(JIRA)的定义。工业机器人是“一种装备有记忆装置和末端执行器(end effector)的，能够转动并通过自动完成各种移动来代替人类劳动的通用机器”。

4) 美国国家标准局(NBS)的定义。机器人是“一种能够进行编程并在自动控制下执行某些操作和移动作业任务的机械装置”。

5) 国际标准组织(ISO)的定义。“机器人是一种自动的、位置可控的、具有编程能力的多功能机械手，这种机械手具有几个轴，能够借助于可编程序操作来处理各种材料、零件、工具和专用装置，以执行种种任务”。

我国对于机器人尚无统一的定义。随着机器人技术的发展，我国也面临讨论和制定关于机器人技术的各项标准问题，其中包括对机器人的定义。我们可以参考各国的定义，结合我国情况，对机器人做出统一的定义。

上述各种定义有共同之处，即认为机器人是1)像人或人的上肢，并能模仿人的动作；2)具有智力或感觉与识别能力；3)是人造的机器或机械电子装置。

### 1.1.3 机器人的进展

从20世纪60年代初期到70年代初期，即第一台工业机器人问世后头十年，机器人技术的发展较为缓慢，许多研究单位和公司所做的努力均未获得成功。这一阶段的主要成果有美国斯坦福国际研究所(SRI)于1968年研制的移动式智能机器人，夏凯(Shakey)和辛辛那提·米拉克龙(Cincinnati Milacron)公司于1973年制成的第一台适于投放市场的机器人T3等。

人工智能学界在20世纪70年代后开始对机器人产生浓厚兴趣。他们发现，机器人的出现与发展为人工智能的发展带来了新的生机，提供了一个很好的试验平台和应用场所，是人工智能可能取得重大进展的潜在领域。这一认识，很快为许多国家的科技界、产业界和政府有关部门所赞同。到了70年代中期，机器人技术进入了一个新的发展阶段。到70年代末期，工业机器人有了更大的发展。进入80年代后，机器人生产继续保持70年代后期的发展势头，机器人制造业成为发展最快和最好的经济部门之一。

到20世纪80年代后期，由于传统机器人用户应用工业机器人已趋饱和，从而造成工业机器人产品的积压，不少机器人厂家倒闭或被兼并，使国际机器人学研究和机器人产业出现不景气。到90年代初，机器人产业出现复苏和继续发展迹象。但是，好景不长，1993~1994年又出现低谷。1995年以来，世界机器人数量逐年增加，增长率也较高。到2000年，服役机器人约100万台，机器人学也维持着较好的发展势头。进入21世纪以来，国际机器人产业处于比较稳定的发展阶段。

机器人的应用范围已遍及工业、科技和国防的各个领域。服务机器人的开发与应用更是引人注目。机器人技术的迅速发展，已对许多国家的工业生产、太空和海洋探索、国防以及整个国民经济和人民生活产生了重大影响，而且这种影响必将进一步扩大。当一种工业、技术和经济发生重大变化时，总是要求科学和教育系统发生与之相适应的调整和发展。知识经济促进了对机器人的需求和机器人工业的迅速发展，为机器人学的建立奠定了基础。

在我国，自1985年起已先后在几个全国一级学会内设立了机器人专业委员会，以组织和发展机器人学科的学术交流，促进机器人技术的发展，提高我国机器人学的学术水平和技术水平。机器人学这一新学科在我国也已经形成，并开展了经常性的研究和学术交流活动。

严格地说，目前在工业上运行的90%以上的机器人，都不具有智能。随着工业机器人数量的快速增长和工业生产的发展，对机器人的工作能力也提出更高的要求，特别是需要各种具有不同程度智能的机器人和特种机器人。21世纪的机器人智能水平，将提高到更高的水平，值得关注。

## 1.2 机器人的特点、结构与分类

### 1.2.1 机器人的主要特点

机器人具有下列两个主要特征。

#### 1. 通用性

机器人的通用性(versatility)取决于其几何特性和机械能力。通用性指的是某种执行不同的功能和完成多样的简单任务的实际能力。通用性也意味着，机器人具有可变的几何结构，即根据生产工作需要进行变更的几何结构；或者说，在机械结构上允许机器人执行不同的任务或以不同的方式完成同一工作。

#### 2. 适应性

机器人的适应性(adaptivity)是指其对环境的自适应能力，即所设计的机器人能够自我执行未经完全指定的任务，而不管任务执行过程中所发生的没有预计到的环境变化。这一能力要求机器人认识其环境，即具有人工知觉。

### 1.2.2 机器人的系统结构

一般情况下，一个机器人系统由下列四个互相作用的部分组成：机械手、环境、任务和控制器，如图1-1a所示，图1-1b为其简化形式。

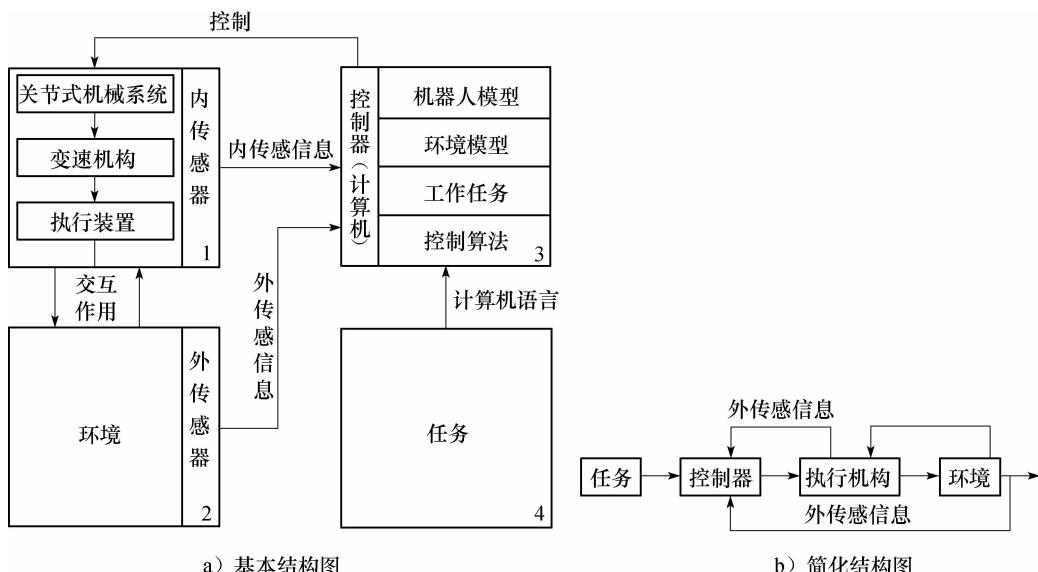


图1-1 机器人系统的基本结构

机械手是具有传动执行装置的机械，它由臂、关节和末端执行装置（工具等）构成，组合为一个互相连接和互相依赖的运动机构。机械手用于执行指定的作业任务。不同的机械手具有不同的结构类型。图 1-2 给出机械手的几何结构简图。机械手又称为操作机、机械臂或操作手。大多数机械手是具有几个自由度的关节式机械结构，一般具有六个自由度。其中，头三个自由度引导夹手装置至所需位置，而后三个自由度用来决定末端执行装置的方向。

环境即指机器人所处的周围环境。环境不仅由几何条件（可达空间）所决定，而且由环境和它所包含的每个事物的全部自然特性所决定的。机器人的固有特性，由这些自然特性及其环境间的互相作用所决定。在环境中，机器人会遇到一些障碍物和其他物体，它必须避免与这些障碍物发生碰撞，并对这些物体发生作用。环境信息一般是确定的和已知的，但在许多情况下，环境具有未知的和不确定的性质。

我们把任务定义为环境的两种状态（初始状态和目标状态）间的差别。必须用适当的程序设计语言来描述这些任务，并把它们存入机器人系统的控制计算机中去。

计算机是机器人的控制器或脑子。机器人接收来自传感器的信号，对之进行数据处理，并按照预存信息、机器人的状态及其环境情况等，产生出控制信号去驱动机器人的各个关节。

对于技术比较简单的机器人，计算机只含有固定程序；对于技术比较先进的机器人，可采用程序完全可编的小型计算机、微型计算机或微处理机作为其电脑。具体说来，在计算机内存储有下列信息：

- 1) 机器人动作模型 表示执行装置在激发信号与机器人运动之间的关系。
- 2) 环境模型 描述机器人在可达空间内的每一个事物。
- 3) 任务程序 使计算机能够理解其所要执行的作业任务。
- 4) 控制算法 计算机指令的序列，它提供对机器人的控制。

### 1.2.3 机器人的自由度

自由度是机器人的一个重要技术指标，它是由于机器人的结构决定的，并直接影响到机器人的机动性。

#### 1. 刚体的自由度

物体上任何一点都与坐标轴的正交集合有关。物体能够对坐标系进行独立运动的数目称为自由度（degree of freedom, DOF）。物体所能进行的运动见图 1-3，即：

沿着坐标轴  $ox$ 、 $oy$  和  $oz$  的三个平移运动  $T_1$ 、 $T_2$  和  $T_3$ ；

绕着坐标轴  $ox$ 、 $oy$  和  $oz$  的三个旋转运动  $R_1$ 、 $R_2$  和  $R_3$ 。

这意味着物体能够运用三个平移和三个旋转，相对于坐标系进行定向和运动。

一个简单物体有六个自由度。当两个物体间确立起某

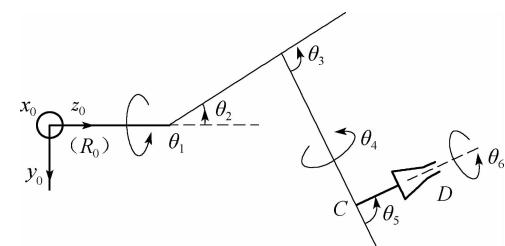


图 1-2 机械手的几何结构简图

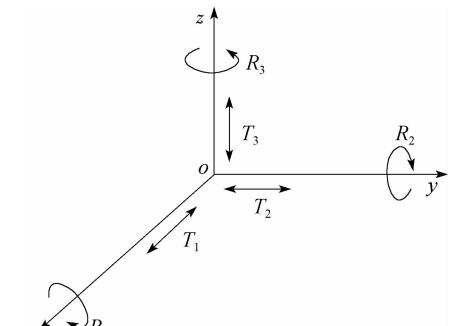


图 1-3 刚体的六个自由度

种关系时，每一物体就对另一物体失去一些自由度。这种关系也可以用两物体间由于建立连接关系而不能进行的移动或转动来表示。

## 2. 机器人的自由度

人们期望机器人能够以准确的方位把它的末端执行装置或与它连接的工具移动到给定点。如果机器人的用途是未知的，那么它应当具有六个自由度。不过，如果工具本身具有某种特别结构，那么就可能不需要六个自由度。例如，要把一个球放到空间某个给定位置，有三个自由度就足够了。

一般情况下，机器人机械手的手臂具有三个自由度，其他的自由度数为末端执行装置所具有。当要求某一机器人钻孔时，其钻头必须转动。不过，这一转动总是由外部的马达带动的，因此，不把它看作机器人的一个自由度。这同样适用于机器人的机械手。机械手的夹手应能开闭。不过，也不能把夹手的这个开闭所用的自由度当作机器人的自由度之一，因为这个自由度只对夹手的操作起作用。这一点是很重要的，必须记住。

### 1.2.4 机器人的分类

机器人分类方法有很多种。这里首先介绍三种分类法，即分别按机器手的几何结构、机器人的控制方式以及机器人控制器的信息输入方式来分。

#### 1. 按机械手的几何结构来分

机器人机械手的机械配置形式多种多样。最常见的结构形式是用其坐标特性来描述的。这些坐标结构包括笛卡儿坐标结构、柱面坐标结构、极坐标结构、球面坐标结构和关节式球面坐标结构等。这里简单介绍柱面、球面和关节式球面坐标结构三种最常见的机器人。

##### (1) 柱面坐标机器人

柱面坐标机器人主要由垂直柱子、水平手臂(或机械手)和底座构成。水平机械手装在垂直柱子上，能自由伸缩，并可沿垂直柱子上下运动。垂直柱子安装在底座上，并与水平机械手一起(作为一个部件)能在底座上移动。这样，这种机器人的工作包迹(区间)就形成一段圆柱面，如图 1-4 所示。因此，把这种机器人叫做柱面坐标机器人。

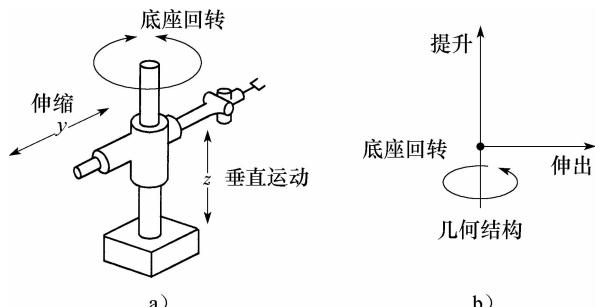


图 1-4 柱面坐标机器人

##### (2) 球面坐标机器人

这种机器人如图 1-5 所示。它像坦克的炮塔一样。机械手能够做里外伸缩移动、在垂直平面上摆动以及在水平面上绕底座转动。因此，这种机器人的工作包迹形成球面的一部分，并被称为球面坐标机器人。

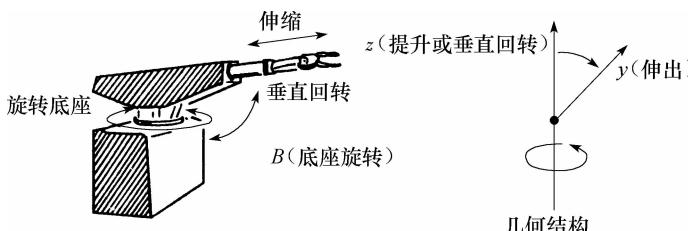


图 1-5 球面坐标机器人

### (3) 关节式球面坐标机器人

这种机器人主要由底座(或躯干)、上臂和前臂构成。上臂和前臂可在通过底座的垂直平面上运动,如图 1-6 所示。在前臂和上臂间,机械手有个肘关节;而在上臂和底座间,有个肩关节。在水平平面上的旋转运动,既可由肩关节进行,也可以绕底座旋转来实现。这种机器人的工作包迹形成球面的大部分,称为关节式球面机器人。

#### 2. 按机器人的控制方式分

按照机器人的控制方式可把机器人分为非伺服机器人和伺服控制机器人两种。

##### (1) 非伺服机器人

非伺服机器人(non-servo robots)工作能力比较有限,它们往往涉及那些叫做“终点”、“抓放”或“开关”式机器人,尤其是“有限顺序”机器人。这种机器人按照预先编好的程序顺序进行工作,使用终端限位开关、制动器、插销板和定序器来控制机器人机械手的运动。其工作原理方块图如图 1-7 所示。图中,插销板用来预先规定机器人的工作顺序,而且往往是可调的。定序器是一种定序开关或步进装置,它能够按照预定的正确顺序接通驱动装置的能源。驱动装置接通能源后,就带动机器人的手臂、腕部和抓手等装置运动。当它们移动到由终端限位开关所规定的位置时,限位开关切换工作状态,送给定序器一个“工作任务(或规定运动)业已完成”的信号,并使终端制动器动作,切断驱动能源,使机械手停止运动。

##### (2) 伺服控制机器人

伺服控制机器人(servo-controlled robots)比非伺服机器人有更强的工作能力,因而价格较贵,但在某些情况下不如简单的机器人可靠。图 1-8 表示伺服控制机器人的方块图。伺服系统的被控制量(输出)可为机器人端部执行装置(或工具)的位置、速度、加速度和力等。通过反馈传感器取得的反馈信号与来自给定装置(如给定电位器)的综合信号,用比较器加以比较后,得到误差信号,经过放大后用以激发机器人的驱动装置,进而带动末端执行装置以一定规律运动,到达规定的位置或速度等。显然,这就是一个反馈控制系统。

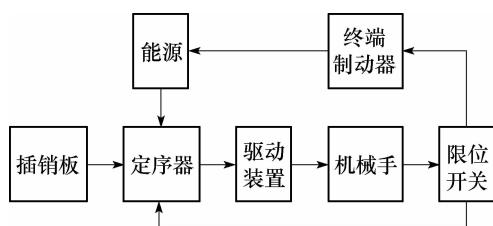


图 1-7 有限顺序机器人方块图

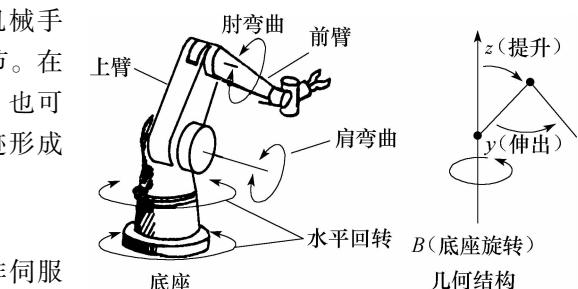


图 1-6 关节式球面机器人

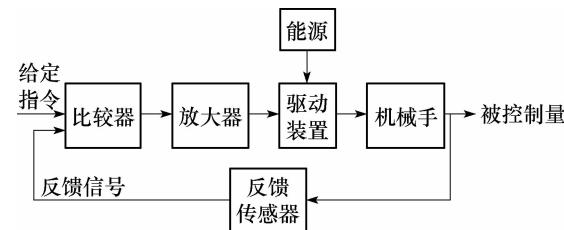


图 1-8 伺服控制机器人方块图

#### 3. 按机器人控制器的信息输入方式分

在采用这种分类法进行分类时,不同国家也略有不同,但它们都有统一的标准。这里主要介绍日本工业机器人协会(JIRA)、美国机器人协会(RIA)和法国工业机器人协会(AFRI)所采用的分类法。

##### (1) JIRA 分类法

日本工业机器人协会把机器人分为六类:

第 1 类: 手动操作手, 是一种由操作人员直接进行操作的具有几个自由度的加工装置。

第2类：定序机器人，是按照预定的顺序、条件和位置，逐步地重复执行给定的作业任务的机械手，其预定信息(如工作步骤等)难以修改。

第3类：变序机器人，它与第2类一样，但其工作次序等信息易于修改。

第4类：复演式机器人，这种机器人能够按照记忆装置存储的信息来复现原先由人示教的动作。这些示教动作能够被自动地重复执行。

第5类：程控机器人，操作人员并不是对这种机器人进行手动示教，而是向机器人提供运动程序，使它执行给定的任务。其控制方式与数控机床一样。

第6类：智能机器人，它能够采用传感信息来独立检测其工作环境或工作条件的变化，并借助其自我决策能力，成功地进行相应的工作，而不管其执行任务的环境条件发生了什么变化。

## (2) RIA 分类法

美国机器人协会把 JIRA 分类法中的后四种机器当作机器人。

## (3) AFRI 分类法

法国工业机器人协会把机器人分为四种型号：

A型：第1类，手控或遥控加工设备。

B型：包括第2类和第3类，具有预编工作周期的自动加工设备。

C型：含第4类和第5类，程序可编和伺服机器人，具有点位或连续路径轨迹，称为第一代机器人。

D型：第6类，能获取一定的环境数据，称为第二代机器人。

此外，还可以有其他的分类方法，如下所述。

## 4. 按机器人的智能程度分

1)一般机器人，不具有智能，只具有一般编程能力和操作功能。

2)智能机器人，具有不同程度的智能，又可分为：

a. 传感型机器人，具有利用传感信息(包括视觉、听觉、触觉、接近觉、力觉和红外、超声及激光等)进行传感信息处理，实现控制与操作。

b. 交互型机器人，机器人通过计算机系统与操作员或程序员进行人-机对话，实现对机器人的控制与操作。

c. 自立型机器人，在设计制作之后，机器人无须人的干预，能够在各种环境下自动完成各项拟人任务。

## 5. 按机器人的用途分

1)工业机器人或产业机器人，应用在工农业生产中，主要应用在制造业部门，进行焊接、喷漆、装配、搬运、检验、农产品加工等作业。

2)探索机器人，用于进行太空和海洋探索，也可用于地面和地下探险和探索。

3)服务机器人，一种半自主或全自主工作的机器人，其所从事的服务工作可使人类生存得更好，使制造业以外的设备工作的更好。

4)军事机器人，用于军事目的，或进攻性的，或防御性的。它又可分为空中军用机器人、海洋军用机器人和地面军用机器人。或简称为空军机器人、海军机器人和陆军机器人。

## 6. 按机器人移动性分

1)固定式机器人，固定在某个底座上，整台机器人(或机械手)不能移动，只能移动各个关节。

2)移动机器人，整个机器人可沿某个方向或任意方向移动。这种机器人又可分为辆式机器

人、履带式机器人和步行机器人，其中后者又有单足、双足、四足、六足和八足行走机器人之分。

## 1.3 机器人学与人工智能

机器人学，特别是智能机器人，与人工智能有十分密切的关系。人工智能的近期目标在于研究智能计算机及其系统，以模仿和执行人类的某些智力功能，如判断、推理、理解、识别、规划、学习和其他问题求解。这一研究抓住了创造力的首要问题——人类智能。

### 1.3.1 机器人学与人工智能的关系

大多数机器人学的研究目前还是以控制理论的反馈概念为基础的。也就是说，迄今为止，机器人上的“智能”是由于应用反馈控制而产生的。但是，反馈控制技术本身并不是建立在人工智能技术的基础上的，而是属于古典工程控制理论范畴的。

反馈控制有其局限性，因为数学(模型)及其实现有其众多的强烈约束。而人工智能则有许多对环境和周围相关事物产生灵活得多响应的方法。按照古典控制理论，对事物的响应取决于经过数学化的输入，而人工智能技术可采用诸如自然语言、知识、算法和其他非数学符号的输入。一方面，机器人学的进一步发展需要人工智能基本原理的指导，并采用各种人工智能技术；另一方面，机器人学的出现与发展又为人工智能的发展带来了新的生机，产生了新的推动力，并提供一个很好的试验与应用场所。也就是说，人工智能想在机器人学上找到实际应用，并使问题求解、搜索规划、知识表示和智能系统等基本理论得到进一步发展。

从人工智能已在机器人学方面进行的一些研究课题可以看出两者的密切关系。

#### 1. 传感器信息处理

机器人学今后能够从人工智能方面得到多大现实好处，人们能够使机器人技术发展到什么程度，其重要关键之一是在传感器信息处理方面。机器人具有越来越强的获取周围信息的能力，包括视觉、触觉、力觉、嗅觉、味觉、听觉、接近感和光滑觉等。

#### 2. 机器人规划

机器人学的研究促进了许多人工智能思想的发展。它所导致的一些技术可用来模拟世界的状态，用来描述从一种世界状态转变为另一种世界状态的过程。它对于怎样产生动作序列的规划以及怎样监督这些规划的执行有了一种较好的理解。复杂的机器人控制问题迫使我们发展一些方法，先在抽象和忽略细节的高层进行规划，然后再逐步在细节越来越重要的低层进行规划，这就是所谓机器人规划问题。设想机器人面对一些问题，必须完成某些作业任务，要求设计出一个动作序列规划，以便让机器人按照这一规划去完成预定的任务。

#### 3. 专家系统

专家系统是一种智能计算机系统，它处理问题的能力达到人类专家的水平。有些未来的机器人系统是专家系统，它们将具有极其大量的有关某个主题的知识，并对这些知识不断修正、改进与完善。

#### 4. 自然语言理解

自然语言理解是人工智能最困难的课题之一，近10年来已取得长足进展。人工智能工作者一直在进行机器理解自然语言的研究。能够理解自然语言的程序，其关键在于：计算机内存包含一个由计算机和程序设计员两者共用的世界模型。谈话涉及计算机内部模型具有某些明确表示的物体、动作和关系。

### 1.3.2 机器人学的研究领域

机器人学有着极其广泛的研究和应用领域。这些领域体现出广泛的学科交叉，涉及众多的课题，如机器人体系结构、机构、控制、智能、传感、机器人装配、恶劣环境下的机器人以及机器人语言等。机器人已在工业、农业、商业、旅游业、空中和海洋以及国防等各种领域获得越来越普遍的应用。下面是一些比较重要的研究领域。

- 1) 传感器与感知系统
- 2) 驱动、建模与控制
- 3) 自动规划与调度
- 4) 机器人用计算机系统
- 5) 机器人应用研究
- 6) 其他机器人课题

### 1.3.3 智能机器人

尽管目前在工业上运行的 90% 以上的机器人都谈不上有什么智能，机器人执行的许多任务也根本不需要运用传感器，但是，随着机器人技术的迅速发展和自动化程度的进一步提高，对机器人的功能提出了更高的要求，特别是需要各种具有不同智能程度的机器人和机器人化装置。

最近 30 年已生产出一批具有传感装置(如视觉、触觉和听觉等)的机器人以及少数具有与环境进行“对话”能力的交互机器人(interactive robot)。这些机器人都属于智能机器人，它们能够执行一些过去无法解决的工作任务。

图 1-9 给出一种智能机器人的典型方框图。

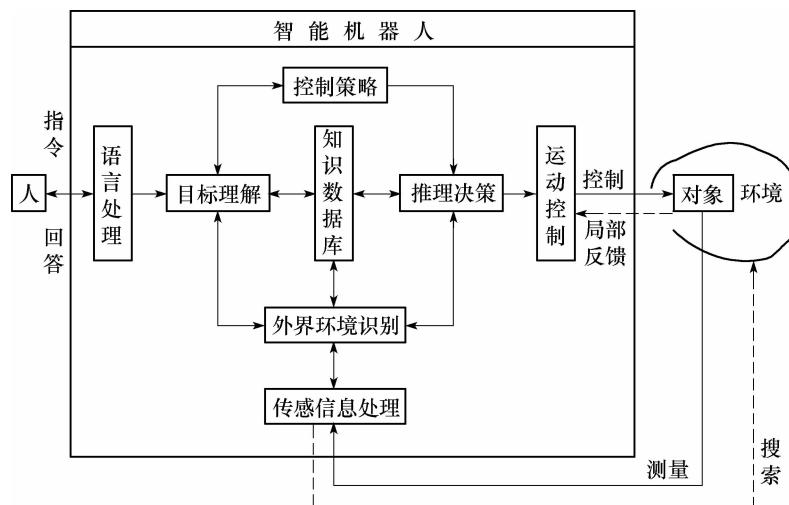


图 1-9 智能机器人的典型方框图

从图 1-9 可以看出，该智能机器人的控制系统主要由两部分组成，即以知识为基础的知识决策系统和信号识别与处理系统。前者涉及知识数据库与推理机，后者为各种信号的感测与处理器。这些信号可为取自话筒的语音信号、来自压力传感器的触感信号、由电视摄像机拍下的景物图像，或环境中的其他信号，如光线、颜色、物体位置和运动速度等信息。

智能机器人已在自主系统和柔性加工系统等领域得到日益广泛的应用。自主机器人能够设定自己的目标，规划并执行自己的动作，使自己不断适应环境的变化。柔性加工系统由机器人工段(robotic work cell)或柔性工段组成。每个机器人工段能够完全自动地完成一系列操作、装卸、运输或加工。把机器人工段与其他工段相连接，就形成一个柔性组合式机器人生产系统，简称柔性加工系统。

### 1.3.4 人工智能的争论及其对机器人学的影响

人工智能从孕育于人类社会的母胎时，就引起人们的争议。自1956年问世以来，人工智能是在比较艰难的环境中顽强地拼搏与成长的。一方面，社会上对人工智能的科学性有所怀疑，或者对人工智能的发展产生恐惧。在一些国家(如前苏联)，甚至曾把人工智能视为反科学的异端邪说。在我国那“史无前例”的年代里，也有人把人工智能作为迷信来批判，以致连“人工智能”这个名词也不敢公开提及；另一方面，科学界内对人工智能也表示怀疑。在人工智能研究者内部，也存在几个不同的学派。近年来，他们围绕人工智能的基础理论和方法等问题，展开论战。这种争论必将促进人工智能的进一步发展。

人工智能现在有哪些重要学派？他们的主要观点是什么？他们之间有何争论？我们在下面略加说明。

#### 1. 人工智能的主要学派

目前人工智能的主要学派有下列三类：

一是符号主义(Symbolicism)，又称为逻辑主义(Logicism)、心理学派(Psychlogism)或计算机学派(Computerism)，其原理主要为物理符号系统(符号操作系统)假设和有限合理性原理。

二是连接主义(Connectionism)，又称为仿生学派(Bionicsism)或生理学派(Physiologism)，其原理主要为神经网络及神经网络间的连接机制与学习算法。

三是行为主义(Actionism)，又称进化主义(Evolutionism)或控制论学派(Cyberneticsism)，其原理为控制理论及感知-动作型控制系统。

他们对人工智能发展历史具有不同的看法。

##### (1) 符号主义

认为人工智能源于数理逻辑。数理逻辑从19世纪末起就获得迅速发展，到20世纪30年代开始用于描述智能行为。正是这些符号主义者，早在1956年首先采用“人工智能”这个术语。后来又发展了启发式算法→专家系统→知识工程理论与技术，并在80年代取得很大发展。符号主义曾长期一枝独秀，为人工智能的发展做出重要贡献，尤其是专家系统的成功开发与应用，为人工智能走向工程应用和实现理论联系实际具有特别重要意义。在人工智能的其他学派出现之后，符号主义仍然是人工智能的主流学派。

##### (2) 连接主义

认为人工智能源于仿生学，特别是对人脑模型的研究。它的代表性成果是1943年由生理学家麦卡洛克(McCulloch)和数理逻辑学家皮茨(Pitts)创立的脑模型，即MP模型，开创了用电子装置模仿人脑结构和功能的新途径。它从神经元开始进而研究神经网络模型和脑模型，开辟了人工智能的又一发展道路。20世纪60~70年代，连接主义，尤其是对以感知机(perceptron)为代表的脑模型的研究曾出现过热潮。由于当时的理论模型、生物原型和技术条件的限制，脑模型研究在70年代后期至80年代初期落入低潮，直到Hopfield教授在1982年和1984年发表两篇重要论文，提出用硬件模拟神经网络时，连接主义又才重新抬头。1986年鲁梅尔哈特(Rumelhart)等

人提出多层网络中的反向传播(BP)算法，此后，连接主义从模型到算法，从理论分析到工程实现，为神经计算打下了基础。

### (3) 行为主义

认为人工智能源于控制论。控制论思想早在 20 世纪 40~50 年代就成为时代思潮的重要部分，影响了早期的人工智能工作者。维纳(Winner)和麦克洛(McCloe)等人提出的控制论和自组织系统以及钱学森等人提出的工程控制论和生物控制论，影响了许多领域。控制论把神经系统的工作原理与信息理论、控制理论、逻辑以及计算机联系起来。早期的研究工作重点是模拟人在控制过程中的智能行为和作用，如对自寻优、自适应、自校正、自镇定、自组织和自学习等控制论系统的研究，并进行“控制论动物”的研制。到 60~70 年代，上述控制论系统的研究取得一定进展，播下智能控制和智能机器人的种子，并在 80 年代诞生了智能控制和智能机器人系统。

## 2. 对人工智能理论的争论

人工智能至今尚未形成一个统一的理论体系，甚至也没有统一的人工智能定义。各人工智能学派对于 AI 的基本理论问题，诸如定义、基础、核心、要素、认知过程、学科体系以及人工智能与人类智能的关系等，均有不同观点。

### (1) 符号主义

认为人的认知基元是符号，而且认知过程即符号操作过程。认为人是一个物理符号系统，计算机也是一个物理符号系统，因此，能够用计算机来模拟人的智能行为，即用计算机的符号操作来模拟人的认知过程。也就是说，人的思维是可操作的。还认为，知识是信息的一种形式，是构成智能的基础。人工智能的核心问题是知识表示、知识推理和知识运用。知识可用符号表示，也可用符号进行推理，因而有可能建立起基于知识的人类智能和机器智能的统一理论体系。

### (2) 连接主义

认为人的思维基元是神经元，而不是符号处理过程。它对物理符号系统假设持反对意见，认为人脑不同于电脑，并提出连接主义的大脑工作模式，用于取代符号操作的电脑工作模式。

### (3) 行为主义

认为智能取决于感知和行动(所以被称为行为主义)，提出智能行为的“感知-动作”模式。行为主义者认为智能不需要知识、不需要表示、不需要推理；人工智能可以像人类智能一样逐步进化(所以又称为进化主义)；智能行为只能在现实世界中与周围环境交互作用而表现出来。行为主义还认为：符号主义(还包括连接主义)对真实世界客观事物的描述及其智能行为工作模式是过于简化的抽象，因而是不能真实地反映客观存在的。

从一枝独秀的符号主义发展到多学派百花争艳，是一件大好事，必将促进人工智能的进一步发展。

尽管未来的人工智能系统很可能是集各家之长的多种方法的结合产物，但是单独研究各种方法仍然是必要的和有价值的。在努力实现某种主要目标之前，很可能有几种方法相互竞争和角逐。人工智能的研究者们已经开发和编制出许多表演系统和实用系统，这些系统显示出有限领域内的优良智能水平，有的系统已具有商业价值。人工智能各学派已携起手来，并肩开创人工智能的新世界。

## 3. 人工智能争论对机器人学的影响

从上面讨论中可以看出，以控制理论的反馈概念为基础的机器人学，尽管不是建立在人工智能理论之上的，但是很自然地可把它归于人工智能的行为主义或控制论学派。

随着机器人学的发展，智能机器人日益受到重视，应用也日益普遍。智能机器人的研究开发是与人工智能的发展密不可分的。因而人工智能各学派思想必然会在机器人学上得到反映，各种人工智能思想都在机器人学上得到应用。在机器人学上，人工智能各派思想能够“和谐共处”，不存在排他性，甚至可在一个机器人系统上同时共存几个学派的思想，如同时应用人工神经网络和反馈控制，并采用专家系统的推理方法。这就表明连接主义、符号主义和行为主义共存在一个机器人系统中。图 1-9 所示系统，是这方面的一个具体例证。

人工智能应当向机器人学及智能控制学习，不同学派的人们携起手来，取长补短，共同推动人工智能向前发展。

## 1.4 本书概要

本书介绍机器人学的基本原理及其应用，是一部机器人学的导论性教材。除了讨论一般的原理外，还特别阐述一些新的方法与技术，并用一定篇幅叙述机器人学的应用以及发展趋势。本书包含下列具体内容：

- 1) 简述机器人学的起源与发展，讨论机器人学的定义，分析机器人的特点、结构与分类，探讨机器人学与人工智能的关系、机器人学的研究领域和人工智能争论对机器人学的影响。这些内容将使读者对机器人学有个初步认识。
- 2) 讨论机器人学的数学基础，包括空间任意点的位置和姿态变换、坐标变换、齐次坐标变换、物体的变换和逆变换，以及通用旋转变换等。这些数学基础知识为后面有关各章研究机器人运动学、动力学和控制建模提供有力的数学工具。
- 3) 阐述机器人运动方程的表示与求解。这些表示包括机械手运动姿态、方向角、运动位置和坐标的运动方程，以及连杆变换矩阵的表示。对于运动方程的求解则讨论欧拉变换解、滚-仰-偏变换解和球面变换解等方法。这些内容是研究机器人动力学和控制所必不可少的基础。
- 4) 涉及机器人动力学方程、动态特性和静态特性，着重分析机械手动力学方程的两种求法，即拉格朗日功能平衡法和牛顿-欧拉动态平衡法，然后在分析二连杆机械手的基础上，总结出建立拉格朗日方程的步骤，并据之计算出机械手连杆上一点的速度、动能和位能，进而推导出四连杆机械手的动力学方程。机器人动力学问题的研究，对于快速运动的机器人及其控制具有特别重要的意义。
- 5) 研究机器人的控制原则和各种控制方法。这些方法包括机器人的位置伺服控制、力/混合控制和智能控制等。作为机器人智能控制的应用实例，介绍机器人自适应模糊控制和多指灵巧手的神经控制。这些例子提供了实际研究结果，说明各种相关智能控制方法的有效性和适用性。
- 6) 分析机器人传感器的作用原理和应用。阐述机器人传感器的特点与分类以及机器人对环境自适应能力的要求。介绍机器人内传感器，包括位置(位移)传感器、速度传感器、加速度传感器和力觉传感器等。讨论机器人外传感器，涉及视觉传感器、触觉传感器、应力传感器和接近度传感器等。
- 7) 讨论机器人轨迹规划问题，它是在机械手运动学和动力学的基础上，研究关节空间和笛卡尔空间中机器人运动的轨迹规划和轨迹生成方法。在阐明轨迹规划应考虑的问题之后，着重讨论关节空间轨迹的插值计算方法和笛卡尔空间路径轨迹规划方法，并简介规划轨迹的实时生成方法。
- 8) 比较概括地论述机器人的程序设计。机器人的程序设计即编程，是机器人运动和控制的

结合点，也是实现人与机器人通信的主要方法。首先研究对机器人编程的要求和分类；接着讨论机器人语言系统的结构和基本功能；然后介绍几种重要的专用机器人编程语言，如 VAL、SI-GLA、IML 和 AL 语言等；最后讨论机器人离线编程的特点、主要内容和系统结构。

9) 探讨机器人应用问题。首先论述应用机器人必须考虑的因素和采用机器人的步骤；然后分析机器人的应用领域，涉及工业机器人、探索机器人、服务机器人和军事机器人；最后介绍几个工业机器人的应用实例，包括材料搬运机器人、焊接机器人和喷漆机器人等。

10) 概括机器人学的现状，展望机器人学的未来，包括国际机器人技术和市场的发展现状及预测、国内机器人的发展现状、21 世纪机器人技术的发展趋势等。还探讨应用机器人引起的一些社会问题。这部分内容连贯过去、现在与未来，具有一定的探索性和前瞻性，值得探讨。

## 1.5 小 结

作为本书的开篇，本章首先讨论机器人的由来、定义和发展。人类对机器人的幻想与追求已有 3000 多年历史，而第一台工业机器人的投产至今不足 50 年。然而短短 50 年间，机器人从无到有，已经形成“百万大军”，成为人类社会的一个现实，并为经济发展和人类生活做出重要贡献。

至今对机器人尚无统一的定义。本章介绍了国际上关于机器人的几种主要定义，并归纳出这些定义的共同点。

机器人具有通用性和适应性的特点，这是它获得广泛应用的重要基础。我们可以把一个机器人系统看作由执行机构、环境、任务和控制器四个部分组成。

机器人的分类方法很多，我们分别按照机械手的几何结构、机器人的控制方式、机器人的信息输入方式、机器人的智能程度、机器人的用途以及机器人的移动性来讨论机器人的分类问题。

机器人学与人工智能有着十分密切的关系。机器人学的进一步发展需要人工智能基本原理和方法的指导；同时，机器人学的发展又为人工智能的发展带来新的生机，产生新的推动力，并提供一个良好的试验平台和应用场所。

机器人学有着十分广阔的研究领域，涉及传感器与感知系统、驱动与控制、自动规划、计算机系统以及应用研究等。

本章最后讨论了人工智能主要学派围绕人工智能基础和理论线所进行的争论，并探讨了人工智能争论对机器人学的影响。这些争论在机器人学上有所反映，但不存在排他性，机器人学为人工智能各学派的研究都提供了宽松的环境。这种学术环境必将促进人工智能和机器人学走向更加繁荣。

## 习 题

1. 国内外机器人技术的发展有何特点？
2. 请为工业机器人和智能机器人下个定义。
3. 什么是机器人的自由度？试举出一、二种你知道的机器人的自由度数，并说明为什么需要这个数目。
4. 有哪几种机器人分类方法？是否还有其他的分类方法？
5. 试编写一个工业机器人大事年表(从 1954 年起，必要时可查阅有关文献)。

6. 机器人学与哪些学科有密切关系？机器人学和发展将对这学科产生什么影响？
7. 试编写一个图表，说明现有工业机器人的主要应用领域(如点焊、装配等)及其所占百分比。
8. 用一、二句话定义下列术语：适应性、伺服控制、偿还期、智能机器人、人工智能。
9. 什么叫做“机器人三守则”？它的重要意义是什么？
10. 人工智能与机器人学的关系为何？有哪些人工智能技术已在机器人学上得到应用？哪些人工智能技术将在机器人学上获得应用？
11. 人工智能有哪些学派？它们之间有什么争论？这些争论对机器人学有何影响？

# 第2章 数学基础

现有的大多数机器人实际上是各种不同复杂程度的机械手。对于机器人系统，机械手则是其机械运动部分，它的执行机构是用来保证复杂空间运动的综合刚体，而且它自身也往往需要在机械加工或装配等过程中作为统一体进行运动。因此，需要一种描述单一刚体位移、速度和加速度以及动力学问题的有效而又方便的数学方法。本书将采用矩阵法来描述机器人机械手的运动学和动力学问题。这种数学描述是以四阶方阵变换三维空间点的齐次坐标为基础的，能够将运动、变换和映射与矩阵运算联系起来。

研究操作机器人的运动，不仅涉及机械手本身，而且涉及各物体间以及物体与机械手的关系。因此需要讨论的齐次坐标及其变换，用来表达这些关系。

## 2.1 位置和姿态的表示

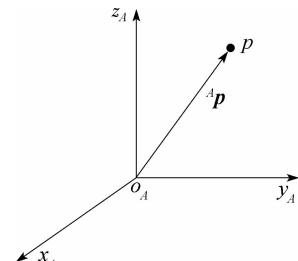
需要用位置矢量、平面和坐标系等概念来描述物体(如零件、工具或机械手)间的关系。首先，让我们来建立这些概念及其表示法。

### 2.1.1 位置描述

一旦建立了一个坐标系，就能够用某个 $3 \times 1$  位置矢量来确定该空间内任一点的位置。对于直角坐标系 $\{A\}$ ，空间任一点 $p$ 的位置可用 $3 \times 1$  的列矢量 ${}^A\boldsymbol{p}$

$${}^A\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

表示。其中， $p_x$ ， $p_y$ ， $p_z$  是点 $p$  在坐标系 $\{A\}$  中的三个坐标分量。 ${}^A\boldsymbol{p}$  的上标 $A$  代表参考坐标系 $\{A\}$ 。我们称 ${}^A\boldsymbol{p}$  为位置矢量，见图 2-1。



### 2.1.2 方位描述

图 2-1 位置表示

研究机器人的运动与操作，往往不仅要表示空间某个点的位置，而且需要表示物体的方位(orientation)。物体的方位可由某个固接于此物体的坐标系描述。为了规定空间某刚体 $B$ 的方位，设置一直角坐标系 $\{B\}$ 与此刚体固接。用坐标系 $\{B\}$ 的三个单位主矢量 $x_B$ ， $y_B$ ， $z_B$ 相对于参考坐标系 $\{A\}$ 的方向余弦组成的 $3 \times 3$  矩阵。

$${}^A_R = [{}^A x_B \quad {}^A y_B \quad {}^A z_B] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

来表示刚体 $B$  相对于坐标系 $\{A\}$ 的方位。 ${}^A_R$  称为旋转矩阵。式中，上标 $A$  代表参考坐标系 $\{A\}$ ，下标 $B$  代表被描述的坐标系 $\{B\}$ 。 ${}^A_R$  共有 9 个元素，但只有 3 个是独立的。由于 ${}^A_R$  的三个列矢量 ${}^A x_B$ ， ${}^A y_B$  和 ${}^A z_B$  都是单位矢量，且双双相互垂直，因而它的 9 个元素满足 6 个约束条件(正交条件)：

$${}^A x_B \cdot {}^A x_B = {}^A y_B \cdot {}^A y_B = {}^A z_B \cdot {}^A z_B = 1 \quad (2.3)$$

$${}^A x_B \cdot {}^A y_B = {}^A y_B \cdot {}^A z_B = {}^A z_B \cdot {}^A x_B = 0 \quad (2.4)$$

可见, 旋转矩阵 ${}^A R$ 是正交的, 并且满足条件

$${}^B R^{-1} = {}^B R^T; \quad |{}^B R| = 1 \quad (2.5)$$

式中, 上标 $T$ 表示转置;  $| \cdot |$ 为行列式符号。

对应于轴 $x$ ,  $y$ 或 $z$ 作转角为 $\theta$ 的旋转变换, 其旋转矩阵分别为:

$$R(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$R(y, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$R(z, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

式中,  $s$ 表示 $\sin$ ,  $c$ 表示 $\cos$ 。以后将一律采用此约定。

图 2-2 表示一物体(这里为抓手)的方位。此物体与坐标系 $\{B\}$ 直接, 并相对于参考坐标系 $\{A\}$ 运动。

### 2.1.3 位姿描述

上面我们已经讨论了采用位置矢量描述点的位置, 而用旋转矩阵描述物体的方位。要完全描述刚体 $B$ 在空间的位姿(位置和姿态), 通常将物体 $B$ 与某一坐标系 $\{B\}$ 相固接。 $\{B\}$ 的坐标原点一般选在物体 $B$ 的特征点上, 如质心等。相对参考系 $\{A\}$ , 坐标系 $\{B\}$ 的原点位置和坐标轴的方位, 分别由位置矢量 ${}^A p_{Bo}$ 和旋转矩阵 ${}^A R$ 描述。这样, 刚体 $B$ 的位姿可由坐标系 $\{B\}$ 来描述, 即有

$$\{B\} = \{{}^A R \quad {}^A p_{Bo}\} \quad (2.9)$$

当表示位置时, 式(2.9)中的旋转矩阵 ${}^A R = I$ (单位矩阵); 当表示方位时, 式(2.9)中的位置矢量 ${}^A p_{Bo} = o$ 。

## 2.2 坐标变换

空间中任意点 $p$ 在不同坐标系中的描述是不同的。为了阐明从一个坐标系的描述到另一个坐标系的描述关系, 需要讨论这种变换的数学问题。

### 2.2.1 平移坐标变换

设坐标系 $\{B\}$ 与 $\{A\}$ 具有相同的方位, 但 $\{B\}$ 坐标系的原点与 $\{A\}$ 的原点不重合。用位置矢量 ${}^A p_{Bo}$ 描述它相对于 $\{A\}$ 的位置, 如图 2-3 所示。称 ${}^A p_{Bo}$ 为 $\{B\}$ 相对于 $\{A\}$ 的平移矢量。如果点 $p$ 在坐标系 $\{B\}$ 中的位置为 ${}^B p$ ,

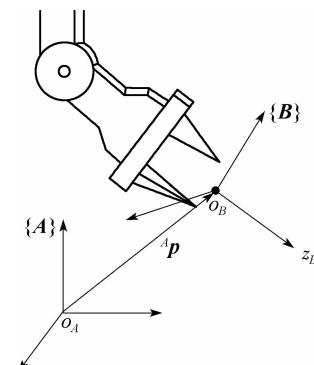


图 2-2 方位表示

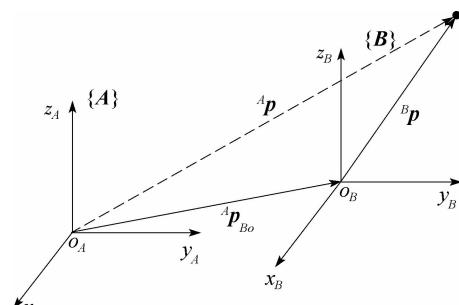


图 2-3 平移变换

那么它相对于坐标系  $\{A\}$  的位置矢量  ${}^A p$  可由矢量相加得出, 即

$${}^A p = {}^B p + {}^A p_{Bo} \quad (2.10)$$

上式称为坐标平移方程。

## 2.2.2 旋转坐标变换

设坐标系  $\{B\}$  与  $\{A\}$  有共同的坐标原点, 但两者的方位不同, 如图 2-4 所示。用旋转矩阵  ${}_B^A R$  描述  $\{B\}$  相对于  $\{A\}$  的方位。同一点  $p$  在两个坐标系  $\{A\}$  和  $\{B\}$  中的描述  ${}^A p$  和  ${}^B p$  具有如下变换关系:

$${}^A p = {}_B^A R {}^B p \quad (2.11)$$

上式称为坐标旋转方程。

我们可以类似地用  ${}_A^R$  描述坐标系  $\{A\}$  相对于  $\{B\}$  的方位。 ${}_B^A R$  和  ${}_A^R$  都是正交矩阵, 两者互逆。根据正交矩阵的性质(2.5)可得:

$${}_A^R = {}_B^A R^{-1} = {}_B^A R^T \quad (2.12)$$

对于最一般的情形: 坐标系  $\{B\}$  的原点与  $\{A\}$  的原点既不重合,  $\{B\}$  的方位与  $\{A\}$  的方位也不相同。用位置矢量  ${}^A p_{Bo}$  描述  $\{B\}$  的坐标原点相对于  $\{A\}$  的位置; 用旋转矩阵  ${}_B^A R$  描述  $\{B\}$  相对于  $\{A\}$  的方位, 如图 2-5 所示。对于任一点  $p$  在两坐标系  $\{A\}$  和  $\{B\}$  中的描述  ${}^A p$  和  ${}^B p$  具有以下变换关系:

$${}^A p = {}_B^A R {}^B p + {}^A p_{Bo} \quad (2.13)$$

可把上式看成坐标旋转和坐标平移的复合变换。实际上, 规定一个过渡坐标系  $\{C\}$ , 使  $\{C\}$  的坐标原点与  $\{B\}$  的原点重合, 而  $\{C\}$  的方位与  $\{A\}$  的相同。据式(2.11)可得向过渡坐标系的变换:

$${}^C p = {}_B^C R {}^B p = {}_B^A R {}^A p$$

再由式(2.10), 可得复合变换:

$${}^A p = {}^C p + {}^A p_{Co} = {}_B^A R {}^B p + {}^A p_{Bo}$$

**例 2.1** 已知坐标系  $\{B\}$  的初始位姿与  $\{A\}$  重合, 首先  $\{B\}$  相对于坐标系  $\{A\}$  的  $z_A$  轴转  $30^\circ$ , 再沿  $\{A\}$  的  $x_A$  轴移动 12 单位, 并沿  $\{A\}$  的  $y_A$  轴移动 6 单位。求位置矢量  ${}^A p_{Bo}$  和旋转矩阵  ${}_B^A R$ 。假设点  $p$  在坐标系  $\{B\}$  的描述为  ${}^B p = [5.9, 0]^T$ , 求它在坐标系  $\{A\}$  中的描述  ${}^A p$ 。

据式(2.8)和式(2.1), 可得  ${}_B^A R$  和  ${}^A p_{Bo}$  分别为:

$${}_B^A R = R(z, 30^\circ) = \begin{bmatrix} c30^\circ & -s30^\circ & 0 \\ s30^\circ & c30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^A p_{Bo} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由式(2.14), 则得:

$${}^A p = {}_B^A R {}^B p + {}^A p_{Bo} = \begin{bmatrix} -0.902 \\ 7.562 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.098 \\ 13.562 \\ 0 \end{bmatrix}$$

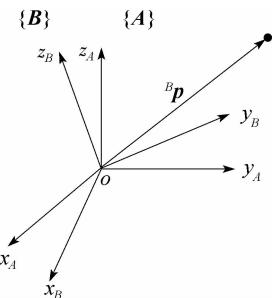


图 2-4 旋转变换

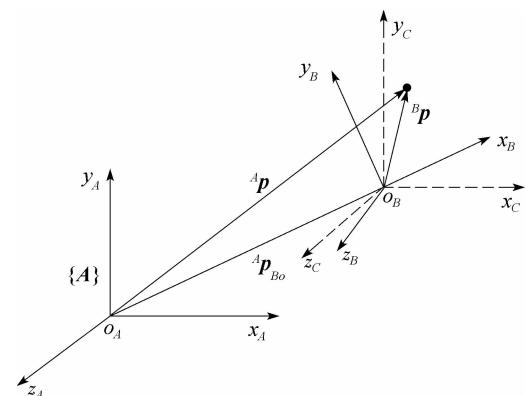


图 2-5 复合变换

## 2.3 齐次坐标变换

已知一直角坐标系中的某点坐标, 那么该点在另一直角坐标系中的坐标可通过齐次坐标变

换求得。

### 2.3.1 齐次变换

变换式(2.13)对于点 ${}^B p$ 而言是非齐次的，但是可以将其表示成等价的齐次变换形式：

$$\begin{bmatrix} {}^A p \\ 1 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} {}^A R & {}^A p_{Bo} \\ \hline {}^B R & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} {}^B p \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

其中， $4 \times 1$  的列向量表示三维空间的点，称为点的齐次坐标，仍然记为 ${}^A p$  或 ${}^B p$ 。可把上式写成矩阵形式：

$${}^A p = {}^B T {}^B p \quad (2.15)$$

式中，齐次坐标 ${}^A p$  和 ${}^B p$  是 $4 \times 1$  的列矢量，与式(2.13)中的维数不同，加入了第4个元素1。齐次变换矩阵 ${}^B T$ 是 $4 \times 4$  的方阵，具有如下形式：

$${}^B T = \left[ \begin{array}{c|c} {}^A R & {}^A p_{Bo} \\ \hline {}^B R & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \quad (2.16)$$

${}^B T$ 综合地表示了平移变换和旋转变换。变换式(2.13)和式(2.14)是等价的，实质上，式(2.14)可写成：

$${}^A p = {}^A R {}^B p + {}^A p_{Bo}; \quad 1 = 1$$

位置矢量 ${}^A p$  和 ${}^B p$ 到底是 $3 \times 1$  的直角坐标还是 $4 \times 1$  的齐次坐标，要根据上下文关系而定。

例 2.2 试用齐次变换方法求解例 2.1 中的 ${}^A p$ 。

由例 2.1 求得的旋转矩阵 ${}^B R$  和位置矢量 ${}^B p_{Bo}$ ，可以得到齐次变换矩阵：

$${}^B T = \left[ \begin{array}{c|c} {}^A R & {}^A p_{Bo} \\ \hline {}^B R & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0.866 & -0.5 & 0 & 12 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

代入齐次变换式(2.15)得：

$${}^A p = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0.866 & -0.5 & 0 & 12 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 5 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 11.098 \\ 13.562 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right]$$

即为用齐次坐标描述的点 $p$ 的位置。

至此，我们可得空间某点 $p$ 的直角坐标描述和齐次坐标描述分别为：

$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} wx \\ wy \\ wz \\ w \end{bmatrix}$$

式中， $w$ 为非零常数，是一坐标比例系数。

坐标原点的矢量，即零矢量表示为 $[0, 0, 0, 1]^T$ 。矢量 $[0, 0, 0, 1]^T$ 是没有定义的。具有形如 $[a, b, c, 0]^T$ 的矢量表示无限远矢量，用来表示方向，即用 $[1, 0, 0, 0]$ ， $[0, 1, 0, 0]$ ， $[0, 0, 1, 0]$ 分

别表示  $x$ ,  $y$  和  $z$  轴的方向。

我们规定两矢量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  的点积:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (2.17)$$

为一标量, 而两矢量的交积为另一个与此两相乘矢量所决定的平面垂直的矢量:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} \quad (2.18)$$

或者用下列行列式来表示:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (2.19)$$

### 2.3.2 平移齐次坐标变换

空间某点由矢量  $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$  描述。其中,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  为轴  $x, y, z$  上的单位矢量。此点可用平移齐次交换表示为:

$$\text{Trans}(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

其中, Trans 表示平移变换。

对已知矢量  $\mathbf{u} = [x, y, z, w]^T$  进行平移变换所得的矢量  $\mathbf{v}$  为:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + aw \\ y + bw \\ z + cw \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x/w + a \\ y/w + b \\ z/w + c \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

即可把此变换看作矢量  $(x/w)\mathbf{i} + (y/w)\mathbf{j} + (z/w)\mathbf{k}$  与矢量  $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$  之和。

用非零常数乘以变换矩阵的每个元素, 不改变该变换矩阵的特性。

**例 2.3** 作为例子, 让我们考虑矢量  $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  被矢量  $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$  平移变换得到的新的点矢量:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

如果用  $-5$  乘以此变换矩阵, 用  $2$  乘以被平移变换的矢量, 则得:

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & -5 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -5 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ 0 \\ -90 \\ -10 \end{bmatrix}$$

它与矢量  $[6, 0, 9, 1]^T$  相对应, 与乘以常数前的点矢量一样。

### 2.3.3 旋转齐次坐标变换

对应于轴  $x$ ,  $y$  或  $z$  作转角为  $\theta$  的旋转变换, 分别可得:

$$Rot(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$Rot(y, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$Rot(z, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

式中,  $Rot$  表示旋转变换。下面我们举例说明这种旋转变换。

**例 2.4** 已知点  $u = 7i + 3j + 2k$ , 对它进行绕轴  $z$  旋转  $90^\circ$  的变换后可得:

$$v = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

图 2-6a 表示旋转变换前后点矢量在坐标系中的位置。从图 2-6 可见, 点  $u$  绕  $z$  轴旋转  $90^\circ$  至点  $v$ 。如果点  $v$  绕  $y$  轴旋转  $90^\circ$ , 即得点  $w$ , 这一变换也可从图 2-6a 看出, 并可由式(2.23)求出:

$$w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

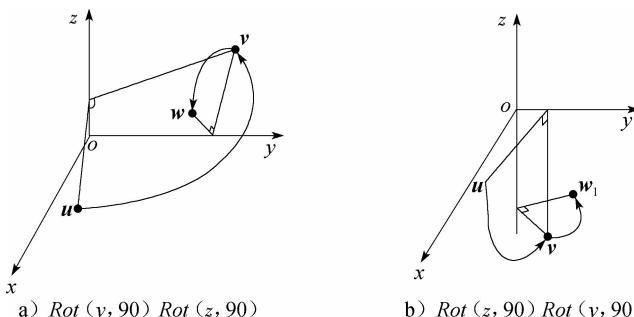


图 2-6 旋转次序对变换结果的影响

如果把上述两旋转变换  $v = Rot(z, 90^\circ)u$  与  $w = Rot(y, 90^\circ)v$  组合在一起, 那么可得下式:

$$w = Rot(y, 90^\circ)Rot(z, 90^\circ)u \quad (2.25)$$

因为

$$Rot(y, 90^\circ)Rot(z, 90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

所以可得：

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

所得结果与前一样。

如果改变旋转次序，首先使  $\mathbf{u}$  绕  $y$  轴旋转  $90^\circ$ ，那么就会使  $\mathbf{u}$  变换至与  $\mathbf{w}$  不同的位置  $\mathbf{w}_1$ ，见图 2-6b。从计算也可得出  $\mathbf{w}_1 \neq \mathbf{w}$  的结果。这个结果是必然的，因为矩阵的乘法不具有交换性质，即  $AB \neq BA$ 。变换矩阵的左乘和右乘的运动解释是不同的：变换顺序“从右向左”，指明运动是相对固定坐标系而言的；变换顺序“从左向右”，指明运动是相对运动坐标系而言的。

**例 2.5** 下面举例说明把旋转变换与平移变换结合起来的情况。如果在图 2-6a 旋转变换的基础上，再进行平移变换  $4i - 3j + 7k$ ，那么据式(2.20)和式(2.26)可求得：

$$\text{Trans}(4, -3, 7) \text{Rot}(y, 90) \text{Rot}(z, 90) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

于是有：

$$\mathbf{t} = \text{Trans}(4, -3, 7) \text{Rot}(y, 90) \text{Rot}(z, 90) \mathbf{u} = [6, 4, 10, 1]^T$$

这一变换结果如图 2-7 所示。

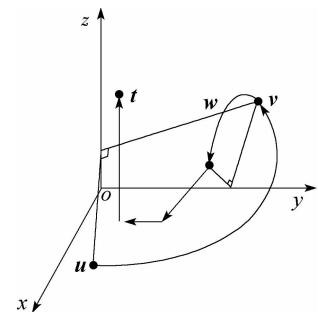


图 2-7 平移变换与旋转变换的组合

## 2.4 物体的变换及逆变换

### 2.4.1 物体位置描述

可以用描述空间一点的变换方法来描述物体在空间的位置和方向。例如，图 2-8a 所示物体可由固定该物体的坐标系内的六个点来表示。

如果首先让物体绕  $z$  轴旋转  $90^\circ$ ，接着绕  $y$  轴旋转  $90^\circ$ ，再沿  $x$  轴方向平移 4 个单位，那么，可用下式描述这一变换：

$$T = \text{Trans}(4, 0, 0) \text{Rot}(y, 90) \text{Rot}(z, 90) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这个变换矩阵表示对原参考坐标系重合的坐标系进行旋转和平移操作。

可对上述楔形物体的六个点变换如下：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

变换结果见图 2-8b。由此图可见，这个用数字描述的物体与描述其位置和方向的坐标系具有确定的关系。

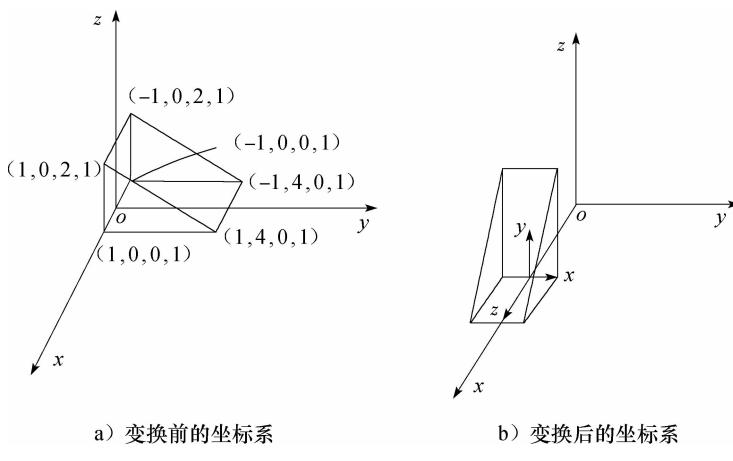


图 2-8 对楔形物体的变换

## 2.4.2 齐次变换的逆变换

给定坐标系  $\{A\}$ ,  $\{B\}$  和  $\{C\}$ , 若已知  $\{B\}$  相对  $\{A\}$  的描述为  ${}^A_B T$ ,  $\{C\}$  相对  $\{B\}$  的描述为  ${}^B_C T$ , 则:

$${}^B p = {}^C_B T {}^C p \quad (2.27)$$

$${}^A p = {}^A_B T {}^B p = {}^A_B T {}^B_C T {}^C p \quad (2.28)$$

定义复合变换:

$${}^A_C T = {}^A_B T {}^B_C T \quad (2.29)$$

表示  $\{C\}$  相对于  $\{A\}$  的描述。据式(2.6)可得:

$${}^A_C T = {}^A_B T {}^B_C T = \left[ \begin{array}{c|c} {}^A_B R & {}^A_B p_{Bo} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} {}^B_C R & {}^B_C p_{Co} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} {}^A_B R {}^B_C R & {}^A_B R {}^B_C p_{Co} + {}^A_B p_{Bo} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \quad (2.30)$$

从坐标系  $\{B\}$  相对坐标系  $\{A\}$  的描述  ${}^A_B T$ , 求得  $\{A\}$  相对于  $\{B\}$  的描述  ${}^B_A T$ , 是齐次变换求逆问题。一种求解方法是直接对  $4 \times 4$  的齐次变换矩阵  ${}^A_B T$  求逆; 另一种是利用齐次变换矩阵的特点, 简化矩阵求逆运算。下面首先讨论变换矩阵求逆方法。

对于给定的  ${}^A_B T$ , 求  ${}^B_A T$ , 等价于给定  ${}^A_B R$  和  ${}^A_B p_{Bo}$ , 计算  ${}^B_A R$  和  ${}^B_A p_{Ao}$ 。利用旋转矩阵的正交性, 可得:

$${}^B_A R = {}^A_B R^{-1} = {}^A_B R^T \quad (2.31)$$

再据式(2.13), 求原点  ${}^A p_{Bo}$  在坐标系  $\{B\}$  中的描述:

$${}^B({}^A p_{Bo}) = {}^B_A R {}^A p_{Bo} + {}^B_A p_{Ao} \quad (2.32)$$

${}^B({}^A p_{Bo})$  表示  $\{B\}$  的原点相对于  $\{B\}$  的描述, 为  $o$  矢量, 因而上式为 0, 可得:

$${}^B p_{Ao} = -{}^B_A R {}^A p_{Bo} = -{}^A_B R^T {}^A p_{Bo} \quad (2.33)$$

综上分析, 并据式(2.31)和式(2.33)经推算可得:

$${}^B_A T = \left[ \begin{array}{c|c} {}^A_B R^T & -{}^A_B R^T {}^A p_{Bo} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \quad (2.34)$$

式中,  ${}^B_A T = {}^A_B T^{-1}$ 。式(2.34)提供了一种求解齐次变换逆矩阵的简便方法。

下面讨论直接对  $4 \times 4$  齐次变换矩阵的求逆方法。

实际上，逆变换是由被变换了的坐标系变回为原坐标系的一种变换，也就是参考坐标系对于被变换了的坐标系的描述。图 2-8b 所示物体，其参考坐标系相对于被变换了的坐标系来说，坐标轴  $x$ ,  $y$  和  $z$  分别为  $[0, 0, 1, 0]^T$ ,  $[1, 0, 0, 0]^T$  和  $[0, 1, 0, 0]^T$ ，而其原点为  $[0, 0, -4, 1]^T$ 。于是，可得逆变换为：

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

用变换  $T$  乘此逆变换而得到单位变换，就能够证明此逆变换确是变换  $T$  的逆变换：

$$T^{-1}T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一般情况下，已知变换  $T$  的各元：

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

则其逆变换为：

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} \\ o_x & o_y & o_z & -\mathbf{p} \cdot \mathbf{o} \\ a_x & a_y & a_z & -\mathbf{p} \cdot \mathbf{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

式中， $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{o}$  和  $\mathbf{a}$  是四个列矢量，而“ $\cdot$ ”表示矢量的点乘。由式(2.36)右乘式(2.35)不难证明这一结果的正确性。

## 2.4.3 变换方程初步

必须建立机器人各连杆之间，机器人与周围环境之间的运动关系，用于描述机器人的操作。要规定各种坐标系来描述机器人与环境的相对位姿关系。在图 2-9a 中， $\{\mathbf{B}\}$  代表基坐标系， $\{\mathbf{T}\}$  是工具系， $\{\mathbf{S}\}$  是工作站系， $\{\mathbf{G}\}$  是目标系，它们之间的位姿关系可用相应的齐次变换来描述：

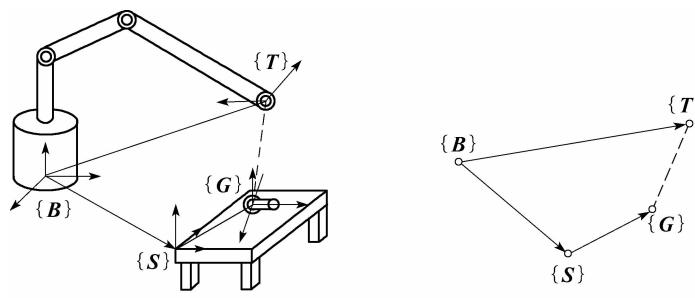


图 2-9 变换方程及其有向变换图

${}^B_s T$  表示工作站系  $\{S\}$  相对于基坐标系  $\{B\}$  的位姿;  ${}^s_c T$  表示目标系  $\{G\}$  相对于  $\{S\}$  的位姿;  ${}^B_T$  表示工具系  $\{T\}$  相对于基坐标系  $\{B\}$  的位姿。

对物体进行操作时, 工具系  $\{T\}$  相对目标系  $\{G\}$  的位姿  ${}^G_T$  直接影响操作效果。它是机器人控制和规划的目标, 它与其他变换之间的关系可用空间尺寸链(有向变换图)来表示, 如图 2-9b 所示。工具系  $\{T\}$  相对于基坐标系  $\{B\}$  的描述可用下列变换矩阵的乘积来表示:

$${}^B_T = {}^B_s T {}^s_c T {}^G_T \quad (2.37)$$

## 2.5 通用旋转变换

我们已经在前面研究了绕轴  $x$ ,  $y$  和  $z$  旋转的旋转变换矩阵。现在来研究最一般的情况, 即研究某个绕着从原点出发的任一矢量(轴) $f$  旋转  $\theta$  角时的旋转矩阵。

### 2.5.1 通用旋转变换公式

设想  $f$  为坐标系  $\{C\}$  的  $z$  轴上的单位矢量, 即:

$$C = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$f = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (2.39)$$

于是, 绕矢量  $f$  旋转等价于绕坐标系  $\{C\}$  的  $z$  轴旋转, 即有:

$$Rot(f, \theta) = Rot(c_z, \theta) \quad (2.40)$$

如果已知以参考坐标描述的坐标系  $\{T\}$ , 那么能够求得以坐标系  $\{C\}$  描述的另一坐标系  $\{S\}$ , 因为

$$T = CS \quad (2.41)$$

式中,  $S$  表示  $T$  相对于坐标系  $\{C\}$  的位置。对  $S$  求解得:

$$S = C^{-1}T \quad (2.42)$$

$T$  绕  $f$  旋转等价于  $S$  绕坐标系  $\{C\}$  的  $z$  轴旋转:

$$Rot(f, \theta)T = CRot(z, \theta)S$$

$$Rot(f, \theta)T = CRot(z, \theta)C^{-1}T$$

于是可得:

$$Rot(f, \theta) = CRot(z, \theta)C^{-1} \quad (2.43)$$

因为  $f$  为坐标系  $\{C\}$  的  $z$  轴, 所以对式(2.43)加以扩展可以发现  $Rot(z, \theta)C^{-1}$  仅仅是  $f$  的函数, 因为

$$\begin{aligned} CRot(z, \theta)C^{-1} &= \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & 0 \\ o_x & o_y & o_z & 0 \\ a_x & a_y & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x c\theta - o_x s\theta & n_y c\theta - a_x s\theta & n_z c\theta - o_z s\theta & 0 \\ n_x s\theta + o_x c\theta & n_y s\theta + a_x c\theta & n_z s\theta + o_z c\theta & 0 \\ a_x & a_y & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} n_x n_x c\theta - n_x o_x s\theta + n_x o_x c\theta + o_x n_x c\theta + a_x a_x & n_x n_y c\theta - n_x o_y s\theta + n_y o_x c\theta + o_y n_x c\theta + a_x a_y \\ n_y n_x c\theta - n_y o_x s\theta + n_x o_y s\theta + o_y n_x c\theta + a_y a_x & n_y n_y c\theta - n_y o_y s\theta + n_y o_y c\theta + o_y n_y c\theta + a_y a_y \\ n_z n_x c\theta - n_z o_x s\theta + n_x o_z s\theta + o_z n_x c\theta + a_z a_x & n_z n_y c\theta - n_z o_y s\theta + n_y o_z s\theta + o_y n_z c\theta + a_z a_y \\ 0 & 0 \\ n_x n_z c\theta - n_x o_z s\theta - n_z o_x s\theta + o_z n_x c\theta + a_x a_z & 0 \\ n_y n_z c\theta - n_y o_z s\theta + n_z o_y s\theta + o_z n_y c\theta + a_z a_z & 0 \\ n_z n_z c\theta - n_z o_z s\theta + n_z o_z s\theta + o_z n_z c\theta + a_z a_z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.44)
 \end{aligned}$$

根据正交矢量点积、矢量自乘、单位矢量和相似矩阵特征值等性质，并令  $z = a$ ,  $\text{vers}\theta = 1 - c\theta$ ,  $f = z$ , 对式(2.44)进行化简(请读者自行推算)可得：

$$\text{Rot}(f, \theta) = \begin{bmatrix} f_x f_x \text{vers}\theta + c\theta & f_y f_x \text{vers}\theta - f_z s\theta & f_z f_x \text{vers}\theta + f_y s\theta & 0 \\ f_x f_y \text{vers}\theta + f_z s\theta & f_y f_y \text{vers}\theta + c\theta & f_z f_y \text{vers}\theta - f_x s\theta & 0 \\ f_x f_z \text{vers}\theta + f_y s\theta & f_y f_z \text{vers}\theta + f_x s\theta & f_z f_z \text{vers}\theta + c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

这是一个重要的结果。

从上述通用旋转变换公式，能够求得各个基本旋转变换。例如，当  $f_x = 1$ ,  $f_y = 0$  和  $f_z = 0$  时， $\text{Rot}(f, \theta)$  即为  $\text{Rot}(x, \theta)$ 。若把这些数值代入式(2.45)，即可得：

$$\text{Rot}(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

与式(2.22)一致。

## 2.5.2 等效转角与转轴

给出任一旋转变换，能够由式(2.45)求得进行等效旋转  $\theta$  角的转轴。已知旋转变换：

$$R = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

令  $R = \text{Rot}(f, \theta)$ ，即：

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x f_x \text{vers}\theta + c\theta & f_y f_x \text{vers}\theta - f_z s\theta & f_z f_x \text{vers}\theta + f_y s\theta & 0 \\ f_x f_y \text{vers}\theta + f_z s\theta & f_y f_y \text{vers}\theta + c\theta & f_z f_y \text{vers}\theta - f_x s\theta & 0 \\ f_x f_z \text{vers}\theta - f_y s\theta & f_y f_z \text{vers}\theta + f_x s\theta & f_z f_z \text{vers}\theta + c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

把上式两边的对角线项分别相加，并化简得：

$$n_x + o_y + a_z = (f_x^2 + f_y^2 + f_z^2) \text{vers}\theta + 3c\theta = 1 + 2c\theta$$

以及

$$c\theta = \frac{1}{2}(n_x + o_y + a_z - 1) \quad (2.48)$$

把式(2.47)中的非对角线项成对相减可得：

$$\begin{aligned} o_z - a_x &= 2f_z s\theta \\ a_x - n_z &= 2f_z s\theta \\ n_y - o_x &= 2f_z s\theta \end{aligned} \quad (2.49)$$

对上式各行平方后相加得：

$$(o_z - a_y)^2 + (a_x - n_y)^2 + (n_y - o_x)^2 = 4s^2\theta$$

以及

$$s\theta = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(o_z - a_y)^2 + (a_x - n_z)^2 + (n_y - o_x)^2} \quad (2.50)$$

把旋转规定为绕矢量  $f$  的正向旋转，使得  $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ 。这时，式(2.50)中的符号取正号。于是，转角  $\theta$  被唯一地确定为：

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{(o_z - a_y)^2 + (a_x - n_z)^2 + (n_y - o_x)^2}}{n_x + o_y + a_z - 1} \quad (2.51)$$

而矢量  $f$  的各分量可由式(2.49)求得：

$$\begin{aligned} f_x &= (o_z - a_y)/2s\theta \\ f_y &= (a_x - n_z)/2s\theta \\ f_z &= (n_y - o_x)/2s\theta \end{aligned} \quad (2.52)$$

## 2.6 小结

本章介绍机器人的数学基础，包括空间任意点的位置和姿态的表示、坐标和齐次坐标变换、物体的变换与逆变换以及通用旋转变换等。

对于位置描述，需要建立一个坐标系，然后用某个  $3 \times 1$  位置矢量来确定该坐标空间内任一点的位置，并用一个  $3 \times 1$  列矢量表示，称为位置矢量。对于物体的方位，也用固接于该物体的坐标系来描述，并用一个  $3 \times 3$  矩阵表示。还给出了对应于轴  $x$ ,  $y$  或  $z$  作转角为  $\theta$  旋转的旋转变换矩阵。在采用位置矢量描述点的位置，用旋转矩阵描述物体方位的基础上，物体在空间的位姿就由位置矢量和旋转矩阵共同表示。

在讨论了平移和旋转坐标变换之后，进一步研究齐次坐标变换，包括平移齐次坐标变换和旋转齐次坐标变换。这些有关空间一点的变换方法，为空间物体的变换和逆变换建立了基础。为了描述机器人的操作，必须建立机器人各连杆间以及机器人与周围环境间的运动关系。为此，建立了机器人操作变换方程的初步概念，并给出了通用旋转变换的一般矩阵表达式以及等效转角与转轴矩阵表达式。

上述结论为研究机器人运动学、动力学、控制建模提供了数学工具。

## 习题

- 用一个描述旋转与/或平移的变换来左乘或者右乘一个表示坐标系的变换，所得到的结果是否相同？为什么？试举例作图说明。
- 矢量<sup>A</sup> $p$ 绕  $Z_A$  旋转  $\theta$  角，然后绕  $X_A$  轴旋转  $\phi$  角。试给出依次按上述次序完成旋转的旋转矩阵。
- 坐标系 $\{B\}$ 的位置变化如下：初始时，坐标系 $\{A\}$ 与 $\{B\}$ 重合，让坐标系 $\{B\}$ 绕  $Z_B$  轴旋转  $\theta$  角；然后再绕  $X_B$  轴旋转  $\phi$  角。给出把对矢量<sup>B</sup> $p$ 的描述变为对<sup>A</sup> $p$ 描述的旋转矩阵。

4. 当  $\theta = 30^\circ$ ,  $\phi = 45^\circ$  时, 求出题 2.2 和题 2.3 中的旋转矩阵。  
 5. 已知矢量  $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  和坐标系

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{u}$  为由  $F$  所描述的一点。

- (1) 确定表示同一点但由基坐标系描述的矢量  $\mathbf{u}$ 。  
 (2) 首先让  $F$  绕基坐标系的  $y$  轴旋转  $90^\circ$ , 然后沿基系  $x$  轴方向平移 20。求变换所得新坐标系  $F'$ 。  
 (3) 确定表示同一点但由坐标系  $F'$  所描述的矢量  $\mathbf{v}'$ 。  
 (4) 作图表示  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}'$ ,  $F$  和  $F'$  之间的关系。

6. 已知齐次变换矩阵

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

要求  $Rot(\mathbf{f}, \theta) = H$ , 确定  $\mathbf{f}$  和  $\theta$  值。

7. 叙述或编写一个求某个旋转矩阵的等效转角和转轴的算法, 要求此算法能够处理  $\theta = 0^\circ$  和  $\theta = 180^\circ$  两种特殊情况。  
 8. 定义

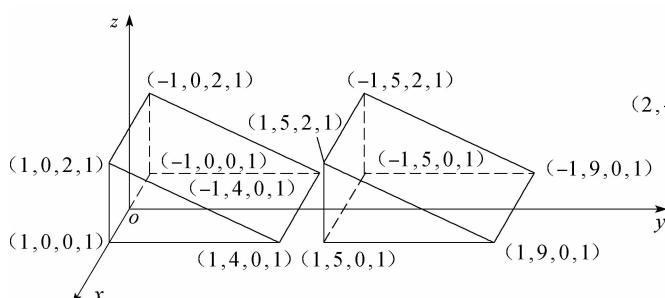
$$wedge_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

表示图 2-8 中楔形物体的方位。试计算下列楔形及其变换矩阵, 并画出每次变换后楔形在坐标系中的位置和方向:

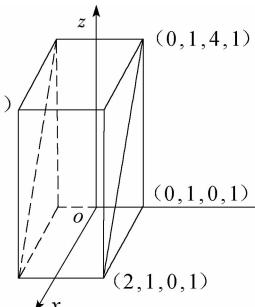
- (1)  $Wedge_1 = Rot(Base_x, -45^\circ) Wedge_0$   
 (2)  $Wedge_2 = Trans(Base_x, 5) Wedge_1$   
 (3)  $Wedge_3 = Trans(Base_z, -2) Wedge_2$   
 (4)  $Wedge_4 = Rot(Base_z, 30^\circ) Wedge_3$

求  $A_n$ 。

9. 图 2-10a 示出摆放在坐标系中的两个相同的楔形物体。要求把它们重新摆放在图 2-10b 所示位置。  
 (1) 用数字值给出两个描述重新摆置的变换序列, 每个变换表示沿某个轴平移或绕该轴旋转。在重置过程中, 必须避免两楔形物体的碰撞。  
 (2) 作图说明每个从右至左的变换序列。  
 (3) 作图说明每个从左至右的变换序列。



a) 初始位置



b) 重新摆放位置

图 2-10 两个楔形物体的重置

10.  $\{\mathbf{A}\}$  和  $\{\mathbf{B}\}$  两坐标系仅仅方向不同。坐标系  $\{\mathbf{B}\}$  是这样得到的：首先与坐标系  $\{\mathbf{A}\}$  重合，然后绕单位矢量  $\mathbf{f}$  旋转  $\theta$  弧度，即

$${}^A R_B = R_B({}^A \mathbf{f}, \theta)$$

求证： ${}^A R_B = e^{\theta \mathbf{f}}$ ，式中

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 & -f_z & f_y \\ f_z & 0 & -f_x \\ -f_y & f_x & 0 \end{bmatrix}$$

# 第3章 机器人运动学

一般工业机器人都是以关节坐标直接编程的。机器人的工作是由控制器指挥的，而关节在每个位置的参数是预先记录好的。当机器人执行工作任务时，控制器给出记录好的位置数据，使机器人按照预定的位置序列运动。

开发比较高级的机器人程序设计语言，要求具有按照笛卡儿坐标规定工作任务的能力。物体在工作空间内的位置以及机器人手臂的位置，都是以某个确定的坐标系来描述的；而工作任务则是以某个中间坐标系（如附于手臂端部的坐标系）来规定的。

由笛卡儿坐标系来描述工作任务时，必须把上述这些规定变换为一系列能够由手臂驱动的关节位置。确定手臂位置和姿态的各关节位置的解答，即运动方程的求解。

本章3.1节和3.2节将分别讨论机器人运动方程的表示与求解方法，3.3节举例介绍PUMA 560机器人的运动方程。

## 3.1 机器人运动方程的表示

可以把任何机器人的机械手看作是一系列由关节连接起来的连杆构成的。为机械手的每一连杆建立一个坐标系，并用齐次变换来描述这些坐标系间的相对位置和姿态。通常把描述一个连杆与下一个连杆间相对关系的齐次变换叫做 $A$ 矩阵。一个 $A$ 矩阵就是一个描述连杆坐标系间相对平移和旋转的齐次变换。如果 $A_1$ 表示第一个连杆对于基系的位置和姿态， $A_2$ 表示第二个连杆相对于第一个连杆的位置和姿态，那么第二个连杆在基系中的位置和姿态可由下列矩阵的乘积给出：

$$T_2 = A_1 A_2$$

同理，若 $A_3$ 表示第三个连杆相对于第二个连杆的位置和姿态，则有：

$$T_3 = A_1 A_2 A_3$$

在历史文献上，这些 $A$ 矩阵的乘积称为 $T$ 矩阵，其前置上标若为0，则可略去不写。于是，对于六连杆机械手，有下列 $T$ 矩阵：

$$T_6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \quad (3.1)$$

一个六连杆机械手可具有六个自由度，每个连杆含有一个自由度，并能在其运动范围内任意定位与定向。其中，三个自由度用于规定位置，而另外三个自由度用来规定姿态。 $T_6$ 表示机械手的位置和姿态。

### 3.1.1 运动姿态和方向角

#### 1. 机械手的运动方向

图3-1表示机器人的一个夹手。把所描述的坐标系的原点置于夹手指尖的中心，此原点由矢量 $p$ 表示。描述夹手方向的三个单位矢量的指向如下： $z$ 向矢量处于夹手进入物体的方向上，并称之为接近矢量 $a$ ； $y$ 向矢量的方向从一个指尖指向另一个指尖，处于规定夹手方向上，称为方

向矢量  $\mathbf{o}$ ；最后一个矢量叫做法线矢量  $\mathbf{n}$ ，它与矢量  $\mathbf{o}$  和  $\mathbf{a}$  一起构成一个右手矢量集合，并由矢量的交乘所规定： $\mathbf{n} = \mathbf{o} \times \mathbf{a}$ 。因此，变换  $T_6$  具有下列元素。

$$T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

六连杆机械手的  $T$  矩阵 ( $T_6$ ) 可由指定其 16 个元素的数值来决定。在这 16 个元素中，只有 12 个元素具有实际含义。底行由三个零和一个 1 组成。左列矢量  $\mathbf{n}$  是第二列矢量  $\mathbf{o}$  和第三列矢量  $\mathbf{a}$  的交乘。当对  $\mathbf{p}$  值不存在任何约束时，只要机械手能够到达期望位置，那么矢量  $\mathbf{o}$  和  $\mathbf{a}$  两者都是正交单位矢量，并且互相垂直，即有： $\mathbf{o} \cdot \mathbf{o} = 1$ ， $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1$ ， $\mathbf{o} \cdot \mathbf{a} = 0$ 。这些对矢量  $\mathbf{o}$  和  $\mathbf{a}$  的约束，使得对其分量的指定成为困难，除非是末端执行装置与坐标系处于平行这种简单情况。

也可以应用第 2 章讨论过的通用旋转矩阵，把机械手端部的方向规定为绕某轴  $f$  旋转  $\theta$  角，即  $\text{Rot}(f, \theta)$ 。遗憾的是，要达到某些期望方向，这一转轴没有明显的直观感觉。

## 2. 用旋转序列表示运动姿态

机械手的运动姿态往往由一个绕轴  $x$ 、 $y$  和  $z$  的旋转序列来规定。这种转角的序列，称为欧拉(Euler)角。欧拉角用一个绕  $z$  轴旋转  $\phi$  角，再绕新的  $y$  轴( $y'$ )旋转  $\theta$  角，最后绕新的  $z$  轴( $z''$ )旋转  $\psi$  角来描述任何可能的姿态，见图 3-2。

在任何旋转序列下，旋转次序是十分重要的。这一旋转序列可由基系中相反的旋转次序来解释：先绕  $z$  轴旋转  $\psi$  角，再绕  $y$  轴旋转  $\theta$  角，最后绕  $z$  轴旋转  $\phi$  角。

欧拉变换  $Euler(\phi, \theta, \psi)$  可由连乘三个旋转矩阵来求得，即：

$$Euler(\phi, \theta, \psi) = \text{Rot}(z, \phi) \text{Rot}(y, \theta) \text{Rot}(z, \psi)$$

$$\begin{aligned} Euler(\phi, \theta, \psi) &= \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\phi c\theta c\psi - s\phi s\psi & -c\phi c\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta & 0 \\ s\phi c\theta c\psi + c\phi s\psi & -s\phi c\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta & 0 \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3)$$

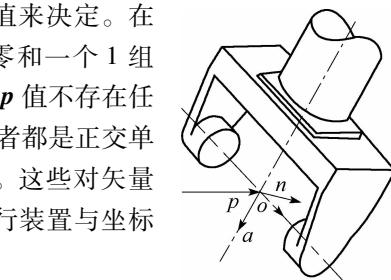


图 3-1 矢量  $n$ 、 $o$ 、 $a$  和  $p$

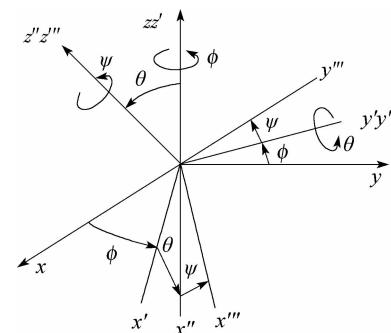


图 3-2 欧拉角的定义

## 3. 用横滚、俯仰和偏转角表示运动姿态

另一种常用的旋转集合是横滚(roll)、俯仰(pitch)和偏转(yaw)。

如果想象有只船沿着  $z$  轴方向航行，见图 3-3a，那么这时，横流对应于绕  $z$  轴旋转  $\phi$  角，俯仰对应于绕  $y$  轴旋转  $\theta$  角，而偏转则对应于绕  $x$  轴旋转  $\psi$  角。适用于机械手端部执行装置的这些旋转，示于图 3-3b。

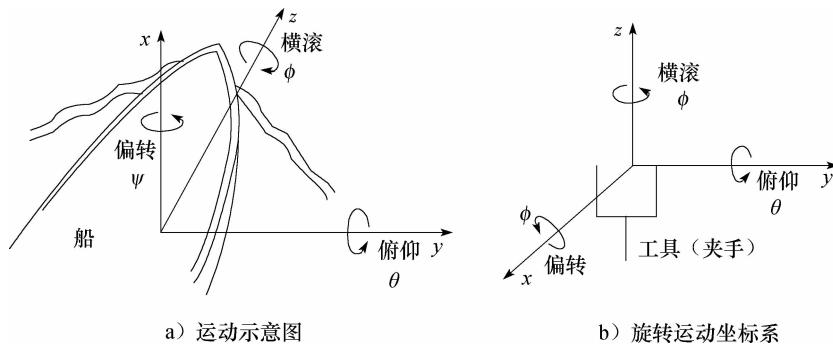


图 3-3 用横滚、俯仰和偏转表示机械手运动姿态

对于旋转次序，我们作如下规定：

$$RPY(\phi, \theta, \psi) = Rot(z, \phi) Rot(y, \theta) Rot(x, \psi) \quad (3.4)$$

式中， $RPY$  表示横滚、俯仰和偏转三旋转的组合变换。也就是说，先绕  $x$  轴旋转  $\psi$  角，再绕  $y$  轴旋转  $\theta$  角，最后绕  $z$  轴旋  $\phi$  角。此旋转变换计算如下：

$$\begin{aligned} RPY(\phi, \theta, \psi) &= \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\psi & -s\psi & 0 \\ 0 & s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\phi c\theta & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi & 0 \\ s\phi c\theta & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & 0 \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

### 3.1.2 运动位置和坐标

一旦机械手的运动姿态由某个姿态变换规定之后，它在基系中的位置就能够由左乘一个对应于矢量  $p$  的平移变换来确定：

$$T_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [\text{某姿态变换}] \quad (3.6)$$

这一平移变换可用不同的坐标来表示。

除了已经讨论过的笛卡儿坐标外，还可以用柱面坐标和球面坐标来表示这一平移，如图 3-4 所示。

#### 1. 用柱面坐标表示运动位置

首先用柱面坐标来表示机械手手臂的位置，即表示其平移变换。这对应于沿  $x$  轴平移  $r$ ，再绕  $z$  轴旋转  $\alpha$ ，最后沿  $z$  轴平移  $z$ ，如图 3-4a 所示。

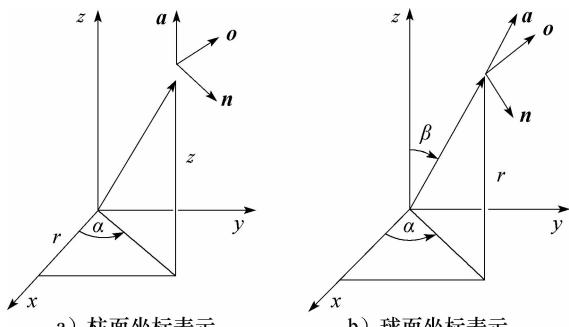


图 3-4 用柱面坐标和球面坐标表示位置

即有：

$$Cyl(z, \alpha, r) = Trans(0, 0, z) Rot(z, \alpha) Trans(r, 0, 0)$$

式中， $Cyl$  表示柱面坐标组合变换。计算上式并化简得：

$$\begin{aligned} Cyl(z, \alpha, r) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 & rc\alpha \\ s\alpha & c\alpha & 0 & rs\alpha \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

如果，用某个如式(3.6)所示的姿态变换右乘上述变换式，那么，手臂将相对于基系绕  $z$  轴旋转  $\alpha$  角。要是需要相对于不转动的基系来规定姿态，那么我们就应对式(3.7)绕  $z$  轴旋转一个  $-\alpha$  角，即有：

$$\begin{aligned} Cyl(z, \alpha, r) &= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 & rc\alpha \\ s\alpha & c\alpha & 0 & rs\alpha \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(-\alpha) & -s(-\alpha) & 0 & 0 \\ s(-\alpha) & c(-\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & rc\alpha \\ 0 & 1 & 0 & rs\alpha \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.8)$$

这就是用以解释柱面坐标  $Cyl(z, \alpha, r)$  的形式。

## 2. 用球面坐标表示运动位置

现在讨论用球面坐标表示手臂运动位置矢量的方法。这个方法对应于沿  $z$  轴平移  $r$ ，再绕  $y$  轴旋转  $\beta$  角，最后绕  $z$  轴旋转  $\alpha$  角，如图 3-4b 所示，即为：

$$Sph(\alpha, \beta, r) = Rot(z, \alpha) Rot(y, \beta) Trans(0, 0, r) \quad (3.9)$$

式中， $Sph$  表示球面坐标组合变换。对上式进行计算结果如下：

$$\begin{aligned} Sph(\alpha, \beta, r) &= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & -s\alpha & c\alpha s\beta & r c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta & c\alpha & s\alpha s\beta & r s\alpha s\beta \\ -s\beta & 0 & c\beta & r c\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

如果，不希望用相对于这个旋转坐标系来表示运动姿态，那么就必须用  $Rot(y, -\beta)$  和  $Rot(z, -\alpha)$  右乘式(3.10)，即：

$$Sph(\alpha, \beta, r) = Rot(z, \alpha) Rot(y, \beta) Trans(0, 0, r) Rot(y, -\beta) Rot(z, -\alpha)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r\cos\beta \\ 0 & 1 & 0 & r\sin\beta \\ 0 & 0 & 1 & r\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

这就是我们用于解释球面坐标的形式。

### 3.1.3 连杆变换矩阵及其乘积

曾把表示相邻两连杆相对空间关系的矩阵称为  $A$  矩阵，也叫做连杆变换矩阵，并把两个或两个以上  $A$  矩阵的乘积叫做  $T$  矩阵。例如， $A_3$  和  $A_4$  的乘积为  ${}^2T_4 = A_3A_4$ ，它表示出连杆 4 对连杆 2 的相对位置。同理， $T_6$ ，即  ${}^0T_6$ ，表示连杆 6 相对于基系的位置。 $T_6$  能够用不同形式的平移和旋转来确定。

#### 1. 广义连杆

相邻坐标系间及其相应连杆可以用齐次变换矩阵来表示。要求出操作手所需要的变换矩阵，每个连杆都要用广义连杆来描述。在求得相应的广义变换矩阵之后，可对其加以修正，以适合每个具体的连杆。

机器人机械手是由一系列连接在一起的连杆(杆件)构成的。需要用两个参数来描述一个连杆，即公共法线距离  $a_i$  和垂直于  $a_i$  所在平面内两轴的夹角  $\alpha_i$ ；需要另外两个参数来表示相邻两杆的关系，即两连杆的相对位置  $d_i$  和两连杆法线的夹角  $\theta_i$ ，如图 3-5 所示。

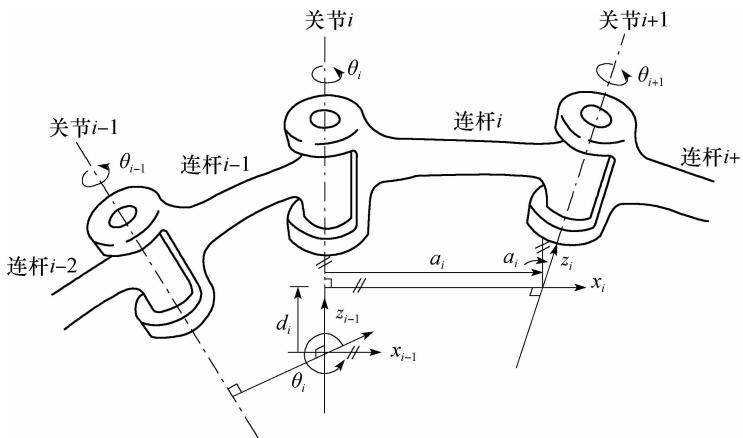


图 3-5 转动关节连杆四参数示意图

除第一个和最后一个连杆外，每个连杆两端的轴线各有一条法线，分别为前、后相邻连杆的公共法线。这两法线间的距离即为  $d_i$ 。我们称  $a_i$  为连杆长度， $\alpha_i$  为连杆扭角， $d_i$  为两连杆距离， $\theta_i$  为两连杆夹角。

机器人机械手上坐标系的配置取决于机械手连杆连接的类型。有两种连接——转动关节和棱柱联轴节。对于转动关节， $\theta_i$  为关节变量。连杆  $i$  的坐标系原点位于关节  $i$  和  $i+1$  的公共法线与关节  $i+1$  轴线的交点上。如果两相邻连杆的轴线相交于一点，那么原点就在这一交点上。如果两轴线互相平行，那么就选择原点使对下一连杆(其坐标原点已确定)的距离  $d_{i+1}$  为零。连杆  $i$  的  $z$  轴与关节  $i+1$  的轴线在一直线上，而  $x$  轴则在连杆  $i$  和  $i+1$  的公共法线上，其方向从  $i$  指向  $i+1$ ，见图 3-5。当两关节轴线相交时， $x$  轴的方向与两矢量的交积  $z_{i-1} \times z_i$  平行或反向平行， $x$

轴的方向总是沿着公共法线从转轴  $n$  指向  $i+1$ 。当两轴  $x_{i-1}$  和  $x_i$  平行且同向时，第  $i$  个转动关节的  $\theta_i$  为零。

现在来考虑棱柱联轴节(平动关节)的情况。图 3-6 示出其特征参数  $\theta$ ,  $d$  和  $\alpha$ 。这时，距离  $d_i$  为联轴节(关节)变量，而联轴节轴线的方向即为此联轴节移动的方向。该轴的方向是规定的，但不同于转动关节的情况；该轴的空间位置则是没有规定的。对于棱柱联轴节来说，其长度  $a_i$  没有意义，令其为零。联轴节的坐标系原点与下一个规定的连杆原点重合。棱柱式连杆的  $z$  轴在关节  $i+1$  的轴线上。 $x_i$  轴平行或反向平行于棱柱联轴节方向矢量与  $z_i$  矢量的交积。当  $d_i=0$  时，我们定义该联轴节的位置为零。

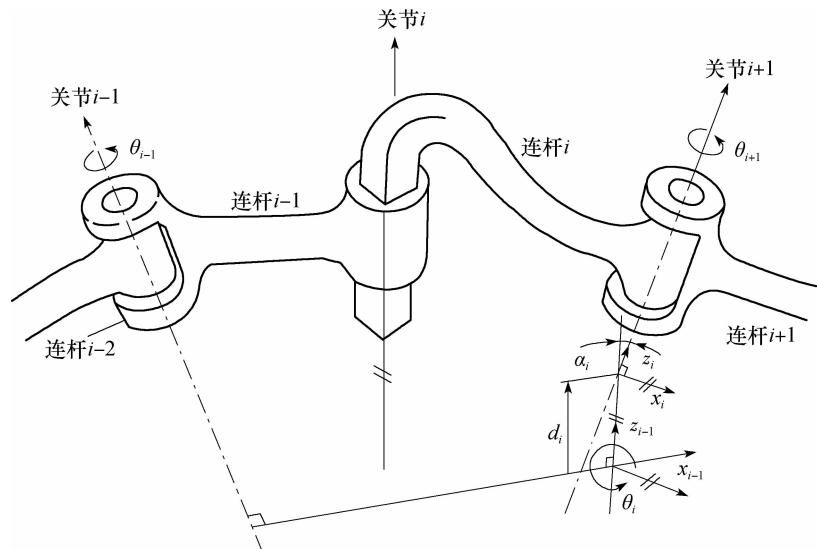


图 3-6 棱柱关节的连杆参数示意图

当机械手处于零位置时，能够规定转动关节的正旋转方向或棱柱联轴节的正位移方向，并确定  $z$  轴的正方向。底座连杆(连杆 0)的原点与连杆 1 的原点重合。如果需要规定一个不同的参考坐标系，那么该参考系与基系间的关系可以用一定的齐次变换来描述。在机械手的端部，最后的位移  $d_6$  或旋转角度  $\theta_6$  是相对于  $z_5$  而言的。选择连杆 6 的坐标系原点，使之与连杆 5 的坐标系原点重合。如果所用工具(或端部执行装置)的原点和轴线与连杆 6 的坐标系不一致，那么此工具与连杆 6 的相对关系可由一个确定的齐次变换来表示。

## 2. 广义变换矩阵

一旦对全部连杆规定坐标系之后，我们就能够按照下列顺序由两个旋转和两个平移来建立相邻两连杆  $i-1$  与  $i$  之间的相对关系，见图 3-5 与图 3-6 所示。

- (1) 绕  $z_{i-1}$  轴旋转  $\theta_i$  角，使  $x_{i-1}$  轴转到与  $x_i$  同一平面内。
- (2) 沿  $z_{i-1}$  轴平移一距离  $d_i$ ，把  $x_{i-1}$  移到与  $x_i$  同一直线上。
- (3) 沿  $i$  轴平移一距离  $a_{i-1}$ ，把连杆  $i-1$  的坐标系移到使其原点与连杆  $n$  的坐标系原点重合的地方。
- (4) 绕  $x_{i-1}$  轴旋转  $\alpha_{i-1}$  角，使  $z_{i-1}$  转到与  $z_i$  同一直线上。

这种关系可由表示连杆  $i$  对连杆  $i-1$  相对位置的四个齐次变换来描述，并叫做  $A_i$  矩阵。此关系式为：

$$A_i = \text{Rot}(z, \theta_i) \text{Trans}(0, 0, d_i) \text{Trans}(a_i, 0, 0) \text{Rot}(x, \alpha_i) \quad (3.12)$$

展开上式可得：

$$A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_{i-1} & s\theta_i s\alpha_{i-1} & a_{i-1} c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -c\theta_i s\alpha_{i-1} & a_{i-1} s\theta_i \\ 0 & s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

对于棱柱关节， $A$  矩阵为：

$$A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_{i-1} & s\theta_i s\alpha_{i-1} & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -c\theta_i s\alpha_{i-1} & 1 \\ 0 & s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

当机械手各连杆的坐标系被规定之后，就能够列出各连杆的常量参数。对于跟在旋转关节  $i$  后的连杆，这些参数为  $d_i$ ， $a_{i-1}$  和  $\alpha_{i-1}$ 。对于跟在棱柱联轴节  $i$  后的连杆来说，这些参数为  $\theta_i$  和  $\alpha_{i-1}$ 。然后， $\alpha$  角的正弦值和余弦值也可计算出来。这样， $A$  矩阵就成为关节变量  $\theta$  的函数(对于旋转关节)或变量  $d$  的函数(对于棱柱联轴节)。一旦求得这些数据之后，就能够确定六个  $A_i$  变换矩阵的值。

### 3. 用 $A$ 矩阵表示 $T$ 矩阵

机械手的末端装置即为连杆 6 的坐标系，它与连杆  $i-1$  坐标系的关系可由  ${}^{i-1}T_6$  表示为：

$${}^{i-1}T_6 = A_i A_{i+1} \cdots A_6 \quad (3.15)$$

可得连杆变换通式为

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & \alpha_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

而机械手端部对基座的关系  $T_6$  为：

$$T_6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$$

如果机械手与参考坐标系的相对关系是由变换  $Z$  来表示的，而且机械手与其端部工具的关系由变换  $E$  表示，那么此工具端部对参考坐标系的位置和方向可由变换  $X$  表示如下：

$$X = Z T_6 E$$

此操作手的有向变换图如图 3-7 所示。

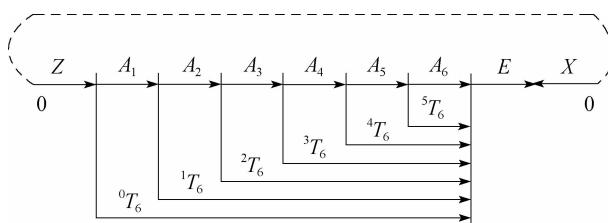


图 3-7 操作手变换图

从图 3-7 可求得：

$$T_6 = Z^{-1} X E^{-1} \quad (3.17)$$

### 3.2 机械手运动方程的求解

大多数机器人程序设计语言，是用某个笛卡儿坐标系来指定机械手末端位置的。这一指定可用于求解机械手最后一个连杆的姿态  $T_6$ 。不过，在机械手能够被驱动至这个姿态之前，必须知道与这个位置有关的所有关节的位置。

求解运动方程时，我们从  $T_6$  开始求解关节位置。使  $T_6$  的符号表达式的各元素等于  $T_6$  的一般形式，并据此确定  $\theta_1$ 。其他五个关节参数不可能从  $T_6$  求得，因为所求得的运动方程过于复杂而无法求解它们。我们可以由上节讨论的其他  $T$  矩阵来求解它们。一旦求得  $\theta_1$  之后，可由  $A_1^{-1}$  左乘  $T_6$  的一般形式，得：

$$A_1^{-1}T_6 = {}^1T_6 \quad (3.18)$$

式中，左边为  $\theta_1$  和  $T_6$  各元的函数。此式可用来求解其他各关节变量，如  $\theta_2$  等。

不断地用  $A$  的逆矩阵左乘式(3.17)，可得下列另四个矩阵方程式：

$$A_2^{-1}A_1^{-1}T_6 = {}^2T_6 \quad (3.19)$$

$$A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}T_6 = {}^3T_6 \quad (3.20)$$

$$A_4^{-1}A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}T_6 = {}^4T_6 \quad (3.21)$$

$$A_5^{-1}A_4^{-1}A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}T_6 = {}^5T_6 \quad (3.22)$$

上列各方程的左式为  $T_6$  和前  $(i-1)$  个关节变量的函数。可用这些方程来确定各关节的位置。

求解运动方程，即求得机械手各关节坐标，这对机械手的控制是至关重要的。根据  $T_6$  我们知道机器人的机械手要移动到什么地方，而且我们需要获得各关节的坐标值，以便进行这一移动。求解各关节的坐标，需要有直觉知识，这是将要遇到的一个最困难的问题。只已知机械手的姿态，没有一种算法能够求得解答。几何设置对于引导求解是必需的。

#### 3.2.1 欧拉变换解

##### 1. 基本隐式方程的解

首先令

$$Euler(\phi, \theta, \psi) = T \quad (3.23)$$

式中，

$$Euler(\phi, \theta, \psi) = Rot(z, \phi)Rot(y, \theta)Rot(z, \psi)$$

已知任一变换  $T$ ，要求得  $\phi$ 、 $\theta$  和  $\psi$ 。也就是说，如果已知  $T$  矩阵各元的数值，那么其所对应的  $\phi$ 、 $\theta$  和  $\psi$  值是什么？

由式(3.4)和式(3.23)，我们有下式

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\phi c\theta c\psi - s\phi s\psi & -c\phi c\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta & 0 \\ s\phi c\theta c\psi + s\phi s\psi & -s\phi c\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta & 0 \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

令矩阵方程两边各对应元素一一相等，可得 16 个方程式，其中有 12 个为隐式方程。我们将从这些隐式方程求得所需解答。在式(3.24) 中，只有 9 个隐式方程，因为其平移坐标也是明显解。这些隐式方程如下：

$$n_x = c\phi c\theta c\psi - s\phi s\psi \quad (3.25)$$

$$n_y = s\phi c\theta c\psi + c\phi s\psi \quad (3.26)$$

$$n_z = -s\theta c\psi \quad (3.27)$$

$$o_x = -c\phi c\theta s\psi - s\phi c\psi \quad (3.28)$$

$$o_y = -s\phi c\theta s\psi + c\phi c\psi \quad (3.29)$$

$$o_z = s\theta s\psi \quad (3.30)$$

$$a_x = c\phi s\theta \quad (3.31)$$

$$a_y = s\phi s\theta \quad (3.32)$$

$$a_z = c\theta \quad (3.33)$$

## 2. 用双变量反正切函数确定角度

可以试探地对  $\phi$ ,  $\theta$  和  $\psi$  进行如下求解。据式(3.33)得:

$$\theta = c^{-1}(a_z) \quad (3.34)$$

据式(3.31)和式(3.34)有:

$$\phi = c^{-1}(a_x/s\theta) \quad (3.35)$$

又据式(3.27)和式(3.34)有:

$$\psi = c^{-1}(-n_z/s\theta) \quad (3.36)$$

但是, 这些解答是无用的, 因为:

1) 当由余弦函数求角度时, 不仅此角度的符号是不确定的, 而且所求角度的准确程度又与该角度本身有关, 即  $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$  以及  $d\cos(\theta)/d\theta|_{0,180^\circ} = 0$ 。

2) 在求解  $\phi$  和  $\psi$  时, 见式(3.25)和式(3.26), 我们再次用到反余弦函数, 而且除式的分母为  $\sin\theta$ 。这样, 当  $\sin\theta$  接近于 0 时, 总会产生不准确。

3) 当  $\theta=0^\circ$  或  $\theta=\pm 180^\circ$  时, 式(3.35) 和式(3.36) 没有定义。

因此, 在求解时, 总是采用双变量反正切函数 atan2 来确定角度。atan2 提供 2 个自变量, 即纵坐标  $y$  和横坐标  $x$ , 见图 3-8。当  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ , 由 atan2 反求角度时, 同时检查  $y$  和  $x$  的符号来确定其所在象限。这一函数也能检验什么时候  $x$  或  $y$  为 0, 并反求出正确的角度。atan2 的精确程度对其整个定义域都是一样的。

## 3. 用显式方程求各角度

要求得方程式的解, 采用另一种通常能够导致显式解答的方法。

用未知逆变换依次左乘已知方程, 对于欧拉变换有:

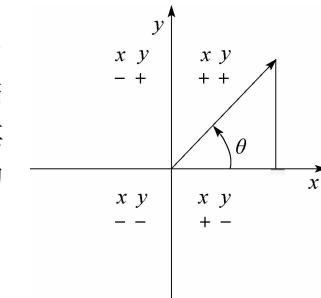


图 3-8 反正切函数 atan2

$$Rot(z, \phi)^{-1}T = Rot(y, \theta)Rot(z, \psi) \quad (3.37)$$

$$Rot(y, \theta)^{-1}Rot(z, \phi)^{-1}T = Rot(z, \psi) \quad (3.38)$$

式(3.37)的左式为已知变换  $T$  和  $\phi$  的函数, 而右式各元素或者为 0, 或者为常数。令方程式的两边对应元素相等, 对于式(3.37)即有:

$$\begin{bmatrix} c\phi & s\phi & 0 \\ -s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & -c\theta s\psi & s\theta & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 & 0 \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

在计算此方程左式之前, 我们用下列形式来表示乘积:

$$\begin{bmatrix} f_{11}(\mathbf{n}) & f_{11}(\mathbf{o}) & f_{11}(\mathbf{a}) & f_{11}(\mathbf{p}) \\ f_{12}(\mathbf{n}) & f_{12}(\mathbf{o}) & f_{12}(\mathbf{a}) & f_{12}(\mathbf{p}) \\ f_{13}(\mathbf{n}) & f_{13}(\mathbf{o}) & f_{13}(\mathbf{a}) & f_{13}(\mathbf{p}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中,  $f_{11} = c\phi x + s\phi y$ ,  $f_{12} = -s\phi x + c\phi y$ ,  $f_{13} = z$ , 而  $x$ ,  $y$  和  $z$  为  $f_{11}$ ,  $f_{12}$  和  $f_{13}$  的各相应分量, 例如:

$$\begin{aligned} f_{12}(\mathbf{a}) &= -s\phi a_x + c\phi a_y \\ f_{11}(\mathbf{p}) &= c\phi p_x + s\phi p_y \end{aligned}$$

于是, 我们可把式(3.39)重写为:

$$\begin{bmatrix} f_{11}(\mathbf{n}) & f_{11}(\mathbf{o}) & f_{11}(\mathbf{a}) & f_{11}(\mathbf{p}) \\ f_{12}(\mathbf{n}) & f_{12}(\mathbf{o}) & f_{12}(\mathbf{a}) & f_{12}(\mathbf{p}) \\ f_{13}(\mathbf{n}) & f_{13}(\mathbf{o}) & f_{13}(\mathbf{a}) & f_{13}(\mathbf{p}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & -c\theta s\psi & s\theta & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 & 0 \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

检查上式右式可见,  $p_x$ ,  $p_y$  和  $p_z$  均为 0。这是我们所期望的, 因为欧拉变换不产生任何平移。此外, 位于第二行第三列的元素也为 0。所以可得  $f_{12}(\mathbf{a}) = 0$ , 即

$$-s\phi a_x + c\phi a_y = 0 \quad (3.41)$$

上式两边分别加上  $s\phi a_x$ , 再除以  $c\phi a_x$  可得:

$$\tan\phi = \frac{s\phi}{c\phi} = \frac{a_y}{a_x}$$

这样, 即可以从反正切函数 atan2 得到:

$$\phi = \text{atan2}(a_y, a_x) \quad (3.42)$$

对式(3.41)两边分别加上  $-c\phi a_y$ , 然后除以  $-c\phi a_x$ , 可得:

$$\tan\phi = \frac{s\phi}{c\phi} = \frac{-a_y}{-a_x}$$

这时可得式(3.41)的另一个解:

$$\phi = \text{atan2}(-a_y, -a_x) \quad (3.43)$$

式(3.43)与式(3.42)两解相差  $180^\circ$ 。

除非出现  $a_y$  和  $a_x$  同时为 0 的情况, 我们总能得到式(3.41)的两个相差  $180^\circ$  的解。当  $a_y$  和  $a_x$  均为 0 时, 角度  $\phi$  没有定义。这种情况是在机械手臂垂直向上或向下, 且  $\phi$  和  $\psi$  两角又对应于同一旋转时出现的, 参阅图 3-4b。这种情况称为退化(degeneracy)。这时, 我们任取  $\phi=0$ 。

求得  $\phi$  值之后, 式(3.40)左式的所有元素也就随之确定。令左式元素与右边对应元素相等, 可得:  $s\theta = f_{11}(\mathbf{a})$ ,  $c\theta = f_{13}(\mathbf{a})$ , 或  $s\theta = c\phi a_x + s\phi a_y$ ,  $c\theta = a_z$ 。于是有:

$$\theta = \text{atan2}(c\phi a_x + s\phi a_y, a_z) \quad (3.44)$$

当正弦和余弦都确定时, 角度  $\theta$  总是唯一确定的, 而且不会出现前述角度  $\phi$  那种退化问题。

最后求解角度  $\psi$ 。由式(3.40)有:

$$s\psi = f_{12}(\mathbf{n}), c\psi = f_{12}(\mathbf{o}), \text{或 } s\psi = -s\phi n_x + c\phi n_y, c\psi = -s\phi o_x + c\phi o_y$$

从而得到:

$$\psi = \text{atan2}(-s\phi n_x + c\phi n_y, -s\phi o_x + c\phi o_y) \quad (3.45)$$

概括地说, 如果已知一个表示任意旋转的齐次变换, 那么就能够确定其等价欧拉角:

$$\begin{aligned}\phi &= \text{atan}2(a_y, a_x), \phi = \phi + 180^\circ \\ \theta &= \text{atan}2(c\phi a_x + s\phi a_y, a_z) \\ \psi &= \text{atan}2(-s\phi n_x + c\phi n_y, -s\phi o_x + c\phi o_y)\end{aligned}\quad (3.46)$$

### 3.2.2 滚、仰、偏变换解

在分析欧拉变换时，已经知道，只有用显式方程才能求得确定的解答。所以在这里直接从显式方程来求解用滚动、俯仰和偏转表示的变换方程。式(3.5)和式(3.6)给出了这些运动方程式。从式(3.5)得：

$$\begin{bmatrix} f_{11}(\mathbf{n}) & f_{11}(\mathbf{o}) & f_{11}(\mathbf{a}) & f_{11}(\mathbf{p}) \\ f_{12}(\mathbf{n}) & f_{12}(\mathbf{o}) & f_{12}(\mathbf{a}) & f_{12}(\mathbf{p}) \\ f_{13}(\mathbf{n}) & f_{13}(\mathbf{o}) & f_{13}(\mathbf{a}) & f_{13}(\mathbf{p}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta & s\theta s\psi & s\theta c\psi & 0 \\ 0 & c\psi & -s\psi & 0 \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

式中， $f_{11}$ ， $f_{12}$ 和 $f_{13}$ 的定义同前。令 $f_{12}(\mathbf{n})$ 与式(3.47)右式的对应元素相等，可得：

$$-s\phi n_x + c\phi n_y = 0$$

从而得：

$$\phi = \text{atan}2(n_y, n_x) \quad (3.48)$$

$$\phi = \phi + 180^\circ \quad (3.49)$$

又令式(3.46)中左右式中的(3,1)及(1,1)元素分别相等，有： $-s\theta = n_z$ ， $c\theta = c\phi n_x + s\phi n_y$ ，于是得：

$$\theta = \text{atan}2(-n_z, c\phi n_x + s\phi n_y) \quad (3.50)$$

最后令第(2,3)和(2,2)对应元素分别相等，有 $-s\psi = -s\phi a_x + c\phi a_y$ ， $c\psi = -s\phi o_x + c\phi o_y$ ，据此可得：

$$\psi = \text{atan}2(s\phi a_x - c\phi a_y, -s\phi o_x + c\phi o_y) \quad (3.51)$$

综上分析可得 RPY 变换各角如下：

$$\begin{aligned}\phi &= \text{atan}2(n_y, n_x) \\ \phi &= \phi + 180^\circ \\ \theta &= \text{atan}2(-n_z, c\phi n_x + s\phi n_y) \\ \psi &= \text{atan}2(s\phi a_x - c\phi a_y, -s\phi o_x + c\phi o_y)\end{aligned}\quad (3.52)$$

### 3.2.3 球面变换解

也可以把上述求解技术用于球面坐标表示的运动方程，这些方程如式(3.10)和式(3.12)所示。由式(3.10)可得：

$$Rot(z, \alpha)^{-1}T = Rot(y, \beta)Trans(0, 0, r) \quad (3.53)$$

$$\begin{bmatrix} c\alpha & s\alpha & 0 & 0 \\ -s\alpha & c\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta & rs\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta & rc\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{11}(\mathbf{n}) & f_{11}(\mathbf{o}) & f_{11}(\mathbf{a}) & f_{11}(\mathbf{p}) \\ f_{12}(\mathbf{n}) & f_{12}(\mathbf{o}) & f_{12}(\mathbf{a}) & f_{12}(\mathbf{p}) \\ f_{13}(\mathbf{n}) & f_{13}(\mathbf{o}) & f_{13}(\mathbf{a}) & f_{13}(\mathbf{p}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta & rs\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta & rc\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

令上式两边的右列相等，即有：

$$\begin{bmatrix} c\alpha p_x + s\alpha p_y \\ -s\alpha p_x + c\alpha p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rs\beta \\ 0 \\ rc\beta \\ 1 \end{bmatrix}$$

由此可得： $-s\alpha p_x + c\alpha p_y$ ，即：

$$\alpha = \text{atan2}(p_y, p_x) \quad (3.54)$$

$$\alpha = \alpha + 180^\circ \quad (3.55)$$

以及  $c\alpha p_x + s\alpha p_y = rs\beta$ ,  $p_z = rc\beta$ 。当  $r > 0$  时

$$\beta = \text{atan2}(c\alpha p_x + s\alpha p_y, p_z) \quad (3.56)$$

要求得  $z$ ，必须用  $\text{Rot}(y, \beta)^{-1}$  左乘式(3.53)的两边，

$$\text{Rot}(y, \beta)^{-1} \text{Rot}(z, \alpha)^{-1} T = \text{Trans}(0, 0, r)$$

计算上式(请读者自己推算)后，让其右列相等：

$$\begin{bmatrix} c\beta(c\alpha p_x + s\alpha p_y) - s\beta p_z \\ -s\alpha p_x + c\alpha p_y \\ s\beta(c\alpha p_x + s\alpha p_y) + c\beta p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \\ 1 \end{bmatrix}$$

从而可得：

$$r = s\beta(c\alpha p_x + s\alpha p_y) + c\beta p_z \quad (3.57)$$

综上讨论可得球面变换的解为：

$$\alpha = \text{atan2}(p_y, p_x), \alpha = \alpha + 180^\circ$$

$$\beta = \text{atan2}(c\alpha p_x + s\alpha p_y, p_z)$$

$$r = s\beta(c\alpha p_x + s\alpha p_y) + c\beta p_z \quad (3.58)$$

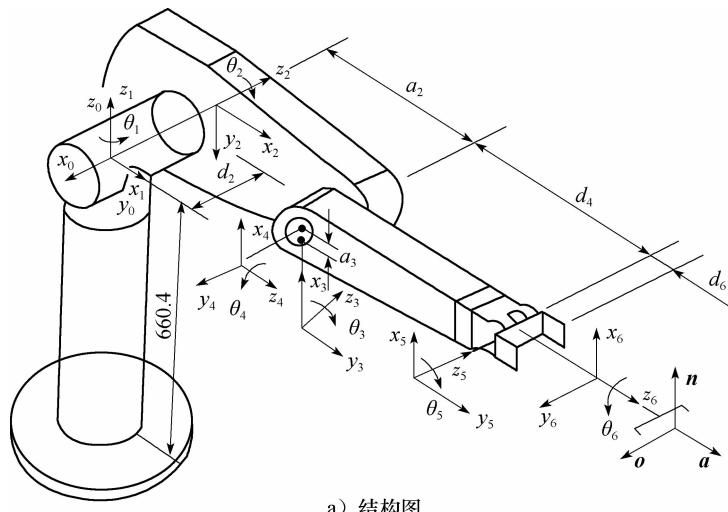
### 3.3 PUMA 560 机器人运动方程

我们能够由式(3.16)，式(3.17)和式(3.21)来求解用笛卡儿坐标表示的运动方程。这些矩阵右式的元素，或者为零，或者为常数，或者为第  $n$  至第 6 个关节变量的函数。矩阵相等表明其对应元素分别相等，并可从每一矩阵方程得到 12 个方程式，每个方程式对应于四个矢量  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{o}$ ,  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{p}$  的每一分量。下面我们将以 PUMA 560 机器人为例来阐述这些方程的求解。

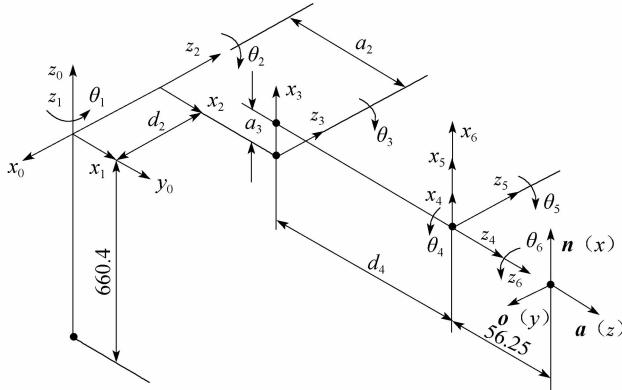
#### 3.3.1 PUMA 560 运动分析

PUMA 560 是属于关节式机器人，6 个关节都是转动关节，如图 3-9 所示。前 3 个关节确定手腕参考点的位置，后 3 个关节确定手腕的方位。和大多数工业机器人一样，后 3 个关节轴线交于一点。该点选作为手腕的参考点，也选作为连杆坐标系 {4}, {5} 和 {6} 的原点。关节 1 的轴

线为垂直方向，关节 2 和关节 3 的轴线为水平，且平行，距离为  $a_2$ 。关节 1 和关节 2 的轴线垂直相交，关节 3 和关节 4 的轴线垂直交错，距离为  $a_3$ 。各连杆坐标系如图 3-9 所示，相应的连杆参数列于表 3-1。其中， $a_2 = 431.8\text{mm}$ ,  $a_3 = 20.32\text{mm}$ ,  $d_2 = 149.09\text{mm}$ ,  $d_4 = 433.07\text{mm}$ 。



a) 结构图



b) 坐标图

图 3-9 PUMA 560 机器人的连杆坐标系

表 3-1 PUMA 560 机器人的连杆参数

连杆 $i$	变量 $\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	变量范围
1	$\theta_1(90^\circ)$	$0^\circ$	0	0	$-160^\circ \sim 160^\circ$
2	$\theta_2(0^\circ)$	$-90^\circ$	0	$d_2$	$-225^\circ \sim 45^\circ$
3	$\theta_3(-90^\circ)$	$0^\circ$	$a_2$	0	$-45^\circ \sim 225^\circ$
4	$\theta_4(0^\circ)$	$-90^\circ$	$a_3$	$d_4$	$-110^\circ \sim 170^\circ$
5	$\theta_5(0^\circ)$	$90^\circ$	0	0	$-100^\circ \sim 100^\circ$
6	$\theta_6(0^\circ)$	$-90^\circ$	0	0	$-266^\circ \sim 266^\circ$

据式(3.16)和表 3-1 所示连杆参数，可求得各连杆变换矩阵如下：

$$\begin{aligned}
 {}^0T_1 &= \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1T_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^2T_3 &= \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3T_4 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^4T_5 &= \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5T_6 = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

各连杆变换矩阵相乘，得 PUMA 560 的机械手变换矩阵：

$${}^0T_6 = {}^0T_1(\theta_1){}^1T_2(\theta_2){}^2T_3(\theta_3){}^3T_4(\theta_4){}^4T_5(\theta_5){}^5T_6(\theta_6) \quad (3.59)$$

即为关节变量  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6$  的函数。要求解此运动方程，需先计算某些中间结果：

$${}^4T_6 = {}^4T_5 {}^5T_6 = \begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & -s_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ s_5s_6 & -s_5c_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$${}^3T_6 = {}^3T_4 {}^4T_6 = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5c_6 - s_4c_6 & -c_4s_5 & a_3 \\ s_5s_6 & -s_5s_6 & c_5 & d_4 \\ -s_4s_5s_6 - c_4s_6 & s_4c_5s_6 - c_4c_6 & s_4s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

其中， $s_4, s_5, s_6, c_4, c_5, c_6$  分别表示  $\sin \theta_4, \sin \theta_5, \sin \theta_6, \cos \theta_4, \cos \theta_5, \cos \theta_6$ 。由于 PUMA 560 的关节 2 和关节 3 相互平行，把  ${}^1T_2(\theta_2)$  和  ${}^2T_3(\theta_3)$  相乘：

$${}^1T_3 = {}^1T_2 {}^2T_3 = \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & a_2c_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -a_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

其中， $c_{23} = \cos(\theta_2 + \theta_3) = c_2c_3 - s_2s_3$ ； $s_{23} = \sin(\theta_2 + \theta_3) = c_2s_3 + s_2c_3$ 。可见，两旋转关节平行时，利用角度之和的公式，可以得到比较简单的表达式。

再将式(3.60)与式(3.59)相乘，可得：

$${}^1T_6 = {}^1T_3 {}^3T_6 = \begin{bmatrix} {}^1n_x & {}^1o_x & {}^1a_x & {}^1p_x \\ {}^1n_y & {}^1o_y & {}^1a_y & {}^1p_y \\ {}^1n_z & {}^1o_z & {}^1a_z & {}^1p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} {}^1n_x = c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6 \\ {}^1n_y = -s_4c_5c_6 - c_4s_6 \\ {}^1n_z = -s_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_{23}s_5c_6 \\ {}^1o_x = -c_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_{23}s_5s_6 \\ {}^1o_y = s_4c_5s_6 - c_4c_6 \\ {}^1o_z = s_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_{23}s_5s_6 \\ {}^1a_x = -c_{23}c_4s_5 - s_{23}c_5 \\ {}^1a_y = s_4s_5 \\ {}^1a_z = s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 \\ {}^1p_x = a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23} \\ {}^1p_y = d_2 \\ {}^1p_z = -a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23} \end{array} \right\} \quad (3.63)$$

其中,  $c_2$  表示  $\cos \theta_2$ , 其余类推。于是, 可求得机械手的  $T$  变换矩阵:

$$\left. \begin{array}{l} {}^0T_6 = {}^0T_1 {}^1T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ n_x = c_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] + s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\ n_y = s_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] - c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\ n_z = -s_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_{23}s_5c_6 \\ o_x = c_1[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] + s_1(c_4c_6 - s_4c_5s_6) \\ o_y = s_1[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] - c_1(c_4c_6 - s_4c_5s_6) \\ o_z = -s_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + c_{23}s_5s_6 \\ a_x = -c_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) - s_1s_4s_5 \\ a_y = -s_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) + c_1s_4s_5 \\ a_z = s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 \\ p_x = c_1[a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}] - d_2s_1 \\ p_y = s_1[a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}] + d_2c_1 \\ p_z = -a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23} \end{array} \right\} \quad (3.64)$$

式(3.62)表示的 PUMA 560 手臂变换矩阵 ${}^0T_6$ , 描述了末端连杆坐标系{6}相对基坐标系{0}的位姿, 是机械手运动分析和综合的基础。

为校核所得 ${}^0T_6$ 的正确性, 计算  $\theta_1 = 90^\circ$ ,  $\theta_2 = 0^\circ$ ,  $\theta_3 = -90^\circ$ ,  $\theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0^\circ$ 时手臂变换矩阵 ${}^0T_6$ 的值。计算结果为:

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -d_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 + d_4 \\ 1 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

与图 3-9 所示的情况完全一致。

### 3.3.2 PUMA 560 运动综合

机器人运动方程的求解或综合方法很多，上一节已介绍了几种。我们能够由式(3.17)及式(3.18)至式(3.22)来求解用笛卡儿坐标表示的运动方程。这些矩阵右式的元素，或者为零，或者为常数，或者为第  $i$  至第 6 个关节变量的函数。矩阵相等表明其对应元素分别相等，并可从每一矩阵方程得到 12 个方程式，每个方程式对应于四个矢量  $n$ ,  $o$ ,  $a$  和  $p$  的每一分量。我们先以 PUMA 560 机器人为例来阐述这些方程的求解。

将 PUMA 560 的运动方程(3.64)写为：

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0T_1(\theta_1)^1T_2(\theta_2)^2T_3(\theta_3)^3T_4(\theta_4)^4T_5(\theta_5)^5T_6(\theta_6) \quad (3.65)$$

若末端连杆的位姿已经给定，即  $n$ ,  $o$ ,  $a$  和  $p$  为已知，则求关节变量  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , ...,  $\theta_6$  的值称为运动反解。用未知的连杆逆变换左乘式(3.65)两边，把关节变量分离出来，从而求解。具体步骤如下：

#### 1. 求 $\theta_1$

可用逆变换  ${}^0T_1^{-1}(\theta_1)$  左乘式(3.65)两边：

$${}^0T_1^{-1}(\theta_1){}^0T_6 = {}^1T_2(\theta_2)^2T_3(\theta_3)^3T_4(\theta_4)^4T_5(\theta_5)^5T_6(\theta_6) \quad (3.66)$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^1T_6 \quad (3.67)$$

令矩阵方程(3.67)两端的元素(2, 4)对应相等，可得：

$$-s_1p_x + c_1p_y = d_2 \quad (3.68)$$

利用三角代换：

$$p_x = \rho \cos \phi; \quad p_y = \rho \sin \phi \quad (3.69)$$

式中， $\rho = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ ;  $\phi = \text{atan2}(p_y, p_x)$ 。把代换式(3.69)代入式(3.68)，得到  $\theta_1$  的解：

$$\left. \begin{aligned} \sin(\phi - \theta_1) &= d_2/\rho; \quad \cos(\phi - \theta_1) = \pm \sqrt{1 - (d_2/\rho)^2} \\ \phi - \theta_1 &= \text{atan2}\left[\frac{d_2}{\rho}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{d_2}{\rho}\right)^2}\right] \\ \theta_1 &= \text{atan2}(p_y, p_x) - \text{atan2}(d_2, \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}) \end{aligned} \right\} \quad (3.70)$$

式中，正、负号对应于  $\theta_1$  的两个可能解。

#### 2. 求 $\theta_3$

在选定  $\theta_1$  的一个解之后，再令矩阵方程(3.67)两端的元素(1, 4)和(3, 4)分别对应相等，即得两方程：

$$\left. \begin{array}{l} c_1 p_x + s_1 p_y = a_3 c_{23} - d_4 s_{23} + a_2 c_2 \\ - p_x = a_3 s_{23} + d_4 c_{23} + a_2 s_2 \end{array} \right\} \quad (3.71)$$

式(3.68)与式(3.71)的平方和为:

$$a_3 c_3 - d_4 s_3 = k \quad (3.72)$$

$$\text{式中, } k = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_2^2 - a_3^2 - d_2^2 - d_4^2}{2a_2}$$

方程(3.72)中已经消去  $\theta_2$ , 且方程(3.72)与方程(3.68)具有相同形式, 因而可由三角代换求解  $\theta_3$ :

$$\theta_3 = \text{atan}2(a_3, d_4) - \text{atan}2(k, \pm \sqrt{a_3^2 + d_4^2 - k^2}) \quad (3.73)$$

式中, 正、负号对应  $\theta_3$  的两种可能解。

### 3. 求 $\theta_2$

为求解  $\theta_2$ , 在矩阵方程 (3.65) 两边左乘逆变换  ${}^0T_3^{-1}$ :

$${}^0T_3^{-1}(\theta_1, \theta_2, \theta_3){}^0T_6 = {}^3T_4(\theta_4){}^4T_5(\theta_5){}^5T_6(\theta_6) \quad (3.74)$$

$$\left[ \begin{array}{cccc} c_1 c_{23} & s_1 c_{23} & -s_{23} & -a_2 c_3 \\ -c_1 s_{23} & -s_1 s_{23} & -c_{23} & a_2 s_3 \\ -s_1 & c_1 & 0 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = {}^3T_6 \quad (3.75)$$

式中, 变换  ${}^3T_6$  由公式(3.61)给出。令矩阵方程(3.75)两边的元素(1, 4)和(2, 4)分别对应相等可得:

$$\left. \begin{array}{l} c_1 c_{23} p_x + s_1 c_{23} p_y - s_{23} p_z - a_2 c_3 = a_3 \\ -c_1 s_{23} p_x - s_1 s_{23} p_y - c_{23} p_z + a_2 s_3 = d_4 \end{array} \right\} \quad (3.76)$$

联立求解得  $s_{23}$  和  $c_{23}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{23} = \frac{(-a_3 - a_2 c_3)p_z + (c_1 p_x + s_1 p_y)(a_2 s_3 - d_4)}{p_z^2 + (c_1 p_x + s_1 p_y)^2} \\ c_{23} = \frac{(-d_4 + a_2 s_3)p_z - (c_1 p_x + s_1 p_y)(-a_2 c_3 - a_3)}{p_z^2 + (c_1 p_x + s_1 p_y)^2} \end{array} \right.$$

$s_{23}$  和  $c_{23}$  表达式的分母相等, 且为正, 于是:

$$\begin{aligned} \theta_{23} &= \theta_2 + \theta_3 = \text{atan}2[-(a_3 + a_2 c_3)p_z + (c_1 p_x + s_1 p_y)(a_2 s_3 - d_4), \\ &\quad (-d_4 + a_2 s_3)p_z + (c_1 p_x + s_1 p_y)(a_2 c_3 + a_3)] \end{aligned} \quad (3.77)$$

根据  $\theta_1$  和  $\theta_3$  解的四种可能组合, 由式(3.77)可以得到相应的四种可能值  $\theta_{23}$ , 于是可得到  $\theta_2$  的四种可能解:

$$\theta_2 = \theta_{23} - \theta_3 \quad (3.78)$$

式中,  $\theta_2$  取与  $\theta_3$  相对应的值。

### 4. 求 $\theta_4$

因为式(3.75)的左边均为已知, 令两边元素(1, 3)和(3, 3)分别对应相等, 则可得:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_x c_1 c_{23} + a_y s_1 c_{23} - a_z s_{23} = -c_4 s_5 \\ -a_x s_1 + a_y c_1 = s_4 s_5 \end{array} \right.$$

只要  $s_5 \neq 0$ , 便可求出  $\theta_4$ :

$$\theta_4 = \text{atan} 2(-a_x s_1 + a_y c_1, -a_x c_1 c_{23} - a_y s_1 c_{23} + a_z s_{23}) \quad (3.79)$$

当  $s_5 = 0$  时, 机械手处于奇异形位。此时, 关节轴 4 和 6 重合, 只能解出  $\theta_4$  与  $\theta_6$  的和或差。奇异形位可以由式(3.79)中 atan 2 的两个变量是否都接近零来判别。若都接近零, 则为奇异形位, 否则, 不是奇异形位。在奇异形位时, 可任意选取  $\theta_4$  的值, 再计算相应的  $\theta_6$  值。

### 5. 求 $\theta_5$

据求出的  $\theta_4$ , 可进一步解出  $\theta_5$ , 将式(3.65)两端左乘逆变换  ${}^0T_4^{-1}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ :

$${}^0T_4^{-1}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) {}^0T_6 = {}^4T_5(\theta_5) {}^5T_6(\theta_6) \quad (3.80)$$

因式(3.80)的左边  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  和  $\theta_4$  均已解出, 逆变换  ${}^0T_4^{-1}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$  为:

$$\begin{bmatrix} c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4 & s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4 & -s_{23} c_4 & -a_2 c_3 c_4 + d_2 s_4 - a_3 c_4 \\ -c_1 c_{23} s_4 + s_1 c_4 & -s_1 c_{23} s_4 - c_1 c_4 & s_{23} s_4 & a_2 c_3 s_4 + d_2 c_4 + a_3 s_4 \\ -c_1 s_{23} & -s_1 s_{23} & -c_{23} & a_2 s_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

方程式(3.80)的右边  ${}^4T_6(\theta_5, \theta_6) = {}^4T_5(\theta_5) {}^5T_6(\theta_6)$ , 由式(3.60)给出。据矩阵两边元素(1, 3)和(3, 3)分别对应相等, 可得:

$$\left. \begin{aligned} a_x(c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4) + a_y(s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4) - a_z(s_{23} c_4) &= -s_5 \\ a_x(-c_1 s_{23}) + a_y(-s_1 s_{23}) + a_z(-c_{23}) &= c_5 \end{aligned} \right\} \quad (3.81)$$

由此得到  $\theta_5$  的封闭解:

$$\theta_5 = \text{atan} 2(s_5, c_5) \quad (3.82)$$

### 6. 求 $\theta_6$

将(3.65)改写为:

$${}^0T_5^{-1}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5) {}^0T_6 = {}^5T_6(\theta_6) \quad (3.83)$$

让矩阵方程(3.83)两边元素(3, 1)和(1, 1)分别对应相等可得:

$$-n_x(c_1 c_{23} s_4 - s_1 c_4) - n_y(s_1 c_{23} s_4 + c_1 c_4) + n_z(s_{23} s_4) = s_6$$

$$n_x[(c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4)c_5 - c_1 s_{23}s_5] + n_y[(s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4)c_5 - s_1 s_{23}s_5] - n_z(s_{23} c_4 c_5 + c_{23}s_5) = c_6$$

从而可求出  $\theta_6$  的封闭解:

$$\theta_6 = \text{atan} 2(s_6, c_6) \quad (3.84)$$

PUMA 560 的运动反解可能存在 8 种解。但是, 由于结构的限制, 例如各关节变量不能在全部  $360^\circ$  范围内运动, 有些解不能实现。在机器人存在多种解的情况下, 应选取其中最满意的一组解, 以满足机器人的工作要求。

## 3.4 小结

本章讨论机器人的运动学问题, 包括机器人运动方程的表示、求解与实例等。这些内容是研究机器人动力学和控制的重要基础。

对于机器人运动方程的表示, 首先用变换矩阵表示机械手的运动方向, 用转角(欧拉角)变换序列表示运动姿态, 或用横滚、俯仰和偏转角表示运动姿态。一旦机械手的运动姿态由某个姿态变换矩阵确定之后, 它在基系中的位置就能够由左乘一个对应于矢量  $p$  的平移变换来确定。这一平移变换, 可由笛卡儿坐标、柱面坐标或球面坐标来表示。为了进一步讨论机器人运动方程, 还给出并分析了广义连杆(包括转动关节连杆和棱柱关节连杆)的变换矩阵, 得到通用连杆变换

矩阵及机械手的有向变换图。

对于机器人运动方程的求解，分别讨论了欧拉变换解。滚-仰-偏变换解和球面变换解，得出各关节位置的求解公式。

本章 3.3 节举例介绍了 PUMA 560 机器人运动方程的表示(分析)和求解(综合)。根据 3.1 节和 3.2 节得到的方程式，结合 PUMA 560 机器人的实际连杆参数，可求得各连杆的变换矩阵和机械手的变换矩阵。然后，根据矢量  $n$ ,  $o$ ,  $a$  和  $p$  的位姿和机械手连杆参数，就可逐一求得关节变量  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , ...,  $\theta_6$ ，即求得 PUMA 560 机器人运动方程的解。

## 习 题

1. 图 3-10 和表 3-2 表示 PUMA 560 的某些机构参数和指定坐标轴。今另有一台工业机器人，除关节 3 为棱柱型关节外，其他关节情况同 PUMA 560。设关节 3 沿着  $x_1$  的方向滑动，其位移为  $d_3$ 。可提出任何必要的附加假设。试求其运动方程式。

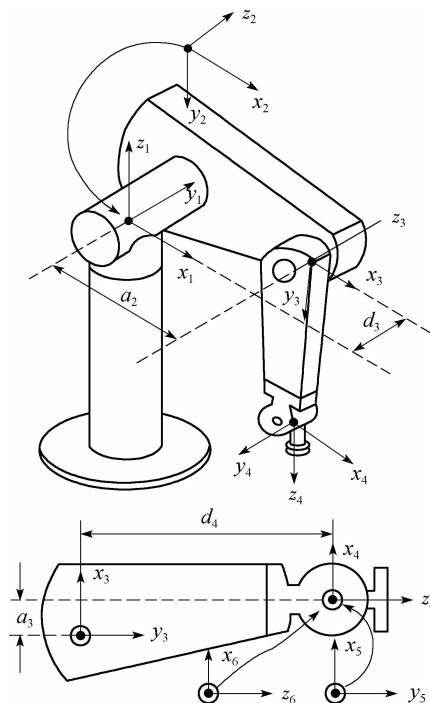


图 3-10 PUMA 560 的结构参数与坐标系配置

表 3-2 PUMA 560 的连杆参数

连杆	$\alpha$	$a$	$d$	$\theta$
1	$0^\circ$	0	0	$\theta_1$
2	$-90^\circ$	0	0	$\theta_2$
3	$0^\circ$	$a_2$	$d_3$	$\theta_3$
4	$-90^\circ$	$a_3$	$d_4$	$\theta_4$
5	$90^\circ$	0	0	$\theta_5$
6	$-90^\circ$	0	0	$\theta_6$

2. 图 3-11 给出一个 3 自由度机械手的机构。轴 1 与轴 2 垂直。试求其运动方程式。

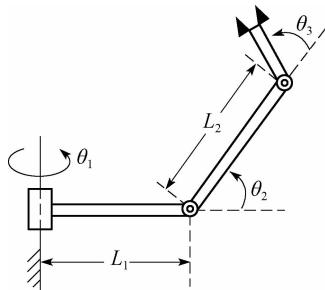


图 3-11 三连杆非平面机械手

3. 图 3-12 所示三自由度机械手，其关节 1 与关节 2 相交，而关节 2 与关节 3 平行。图中所有关节均处于零位。各关节转角的正向均由箭头示出。指定本机械手各连杆的坐标系，然后求各变换矩阵 ${}^0T_1$ ,  ${}^1T_2$  和  ${}^2T_3$ 。

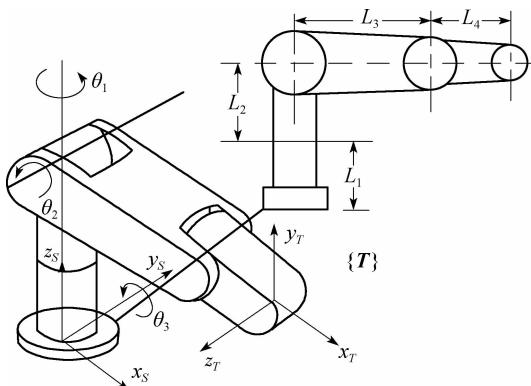


图 3-12 三连杆机械手的两个视图

4. 图 3-13 和表 3-3 表示 PUMA 250 机器人的几何结构和连杆参数。

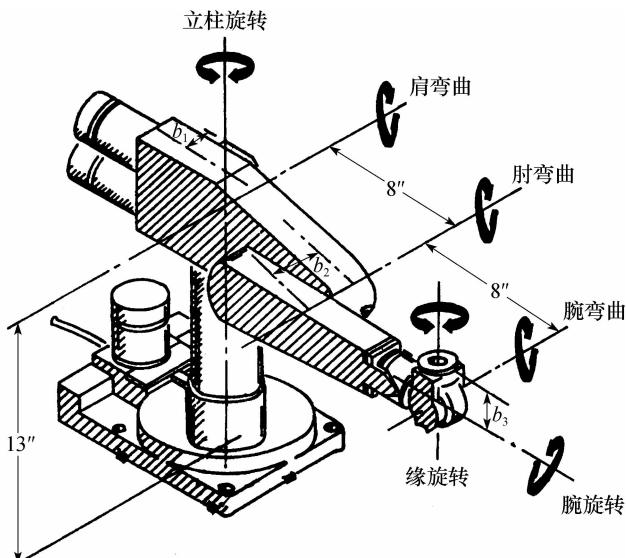


图 3-13 PUMA 250 工业机器人结构

表 3-3 PUMA 250 连杆参数

连杆	关节变量	$\theta$ 变化范围	$\alpha$	$a$	$d$
1	$\theta_1$	315°	9°	0	0
2	$\theta_2$	320°	0°	8	$b_1 + b_2$
3	$\theta_3$	285°	90°	0	0
4	$\theta_4$	240°	-90°	0	8
5	$\theta_5$	535°	-90°	0	0
6	$\theta_6$	575°	0°	0	$b_3$

5. 图 3-14 示出机器人视觉系统的坐标配置。令  $\{BASE\}$  表示机器人机座坐标系,  $\{BOX\}$  表示被移动箱子的坐标系,  $\{TABLE\}$  表示工作台的坐标系,  $\{GRIP\}$  表示夹手的坐标系,  $\{CAM\}$  表示摄像机的坐标系。

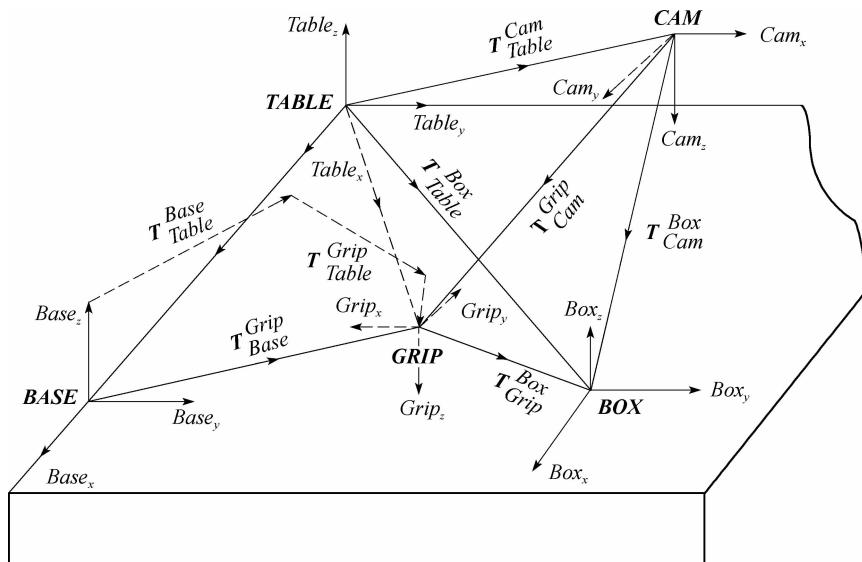


图 3-14 机器人视觉系统坐标系配置

已知下列变换:

$${}^cT_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^{b2}T_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^cT_c = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^{b1}T_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 画出有向变换图。

(2) 求变换矩阵  ${}^cT_{b2}$ , 并说明其各列的含义。

(3) 求矩阵  ${}^cT_{b1}$ 。

- (4) 求矩阵 ${}^B T_r$ 。
- (5) 求矩阵 ${}^G T_r$ 。

(6) 如果让摄像机绕 $z_c$  轴旋转 $90^\circ$ ，求 ${}^C T_r$ ,  ${}^C T_{B2}$  和 ${}^G T_c$  各矩阵。

6. 试求 PUMA 250 各关节变量的解 $\theta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ 。

7. 已知  $T = Trans(5, 10, 0) Rot(x, -90^\circ) Rot(z, -90^\circ)$

$$\Delta = Trans(0, 1, 0) Rot(r, 0.1, rad) - I$$

式中  $r = [1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1]^T$

(1) 用 $4 \times 4$  矩阵表示 $T$  和 $\Delta$ 。

(2) 据下式确定 ${}^T \Delta$ 。

$${}^T \Delta = T^{-1} \Delta T$$

式中,  $T^{-1}$  可由式(2.35)和式(2.36)计算。