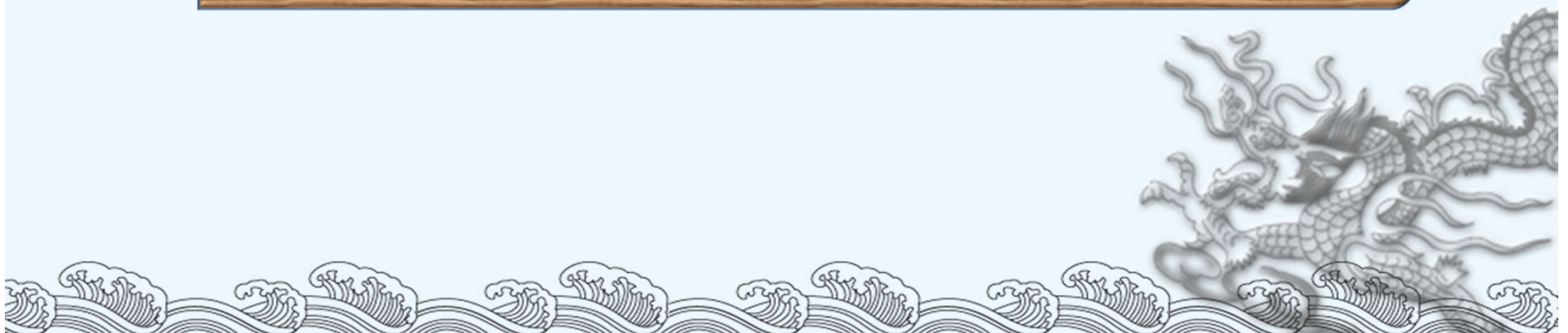


项目4 静力学及动力学分析

任务一：工业机器人速度雅可比与速度分析

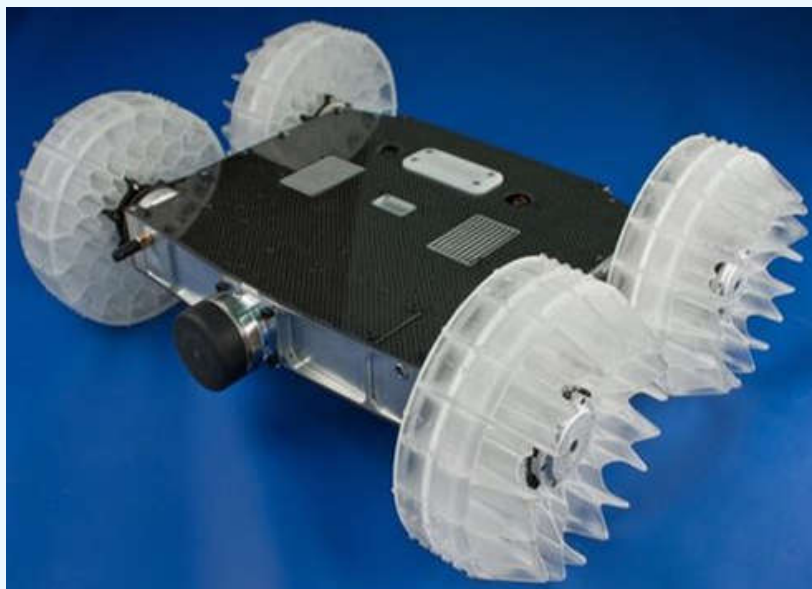
任务二：机器人静力学分析计算

任务三：机器人动力学分析

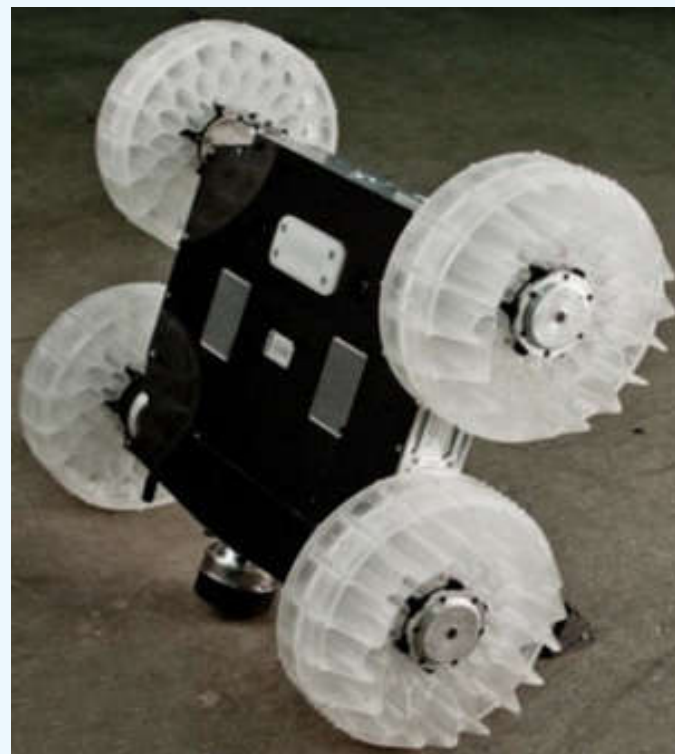


【案例导入】

沙蚤机器人 (SandFlea) 是一种跳跃式机器人, 由美国国防高级研究计划局 (DARPA) 联合波士顿动力公司共同研制, 其结构如图4.1所示, 图4.1 (a) 为“沙蚤”机器人行驶状态, 图4.1 (b) 为“沙蚤”机器人起跳的状态。战场上的地形往往复杂多变, 面对许多山坡或障碍物, 实在不值得美国大兵们赌上命去翻越。在这个时候选择机器人勘察就是一个非常好的办法。沙蚤机器人作为一款遥控侦察机器人就是为此而存在, 该机器人呈鞋盒状, 重约4.5kg, 通常采用4轮行驶, 但也能垂直跳跃, 跳跃高度达10m, 能独立越过壕沟和障碍。该车装备了操作控制系统和1部摄像机, 能够通过掌上电脑或笔记本电脑进行控制。



(a) 行驶状态



(b) 起跳状态

图4.1



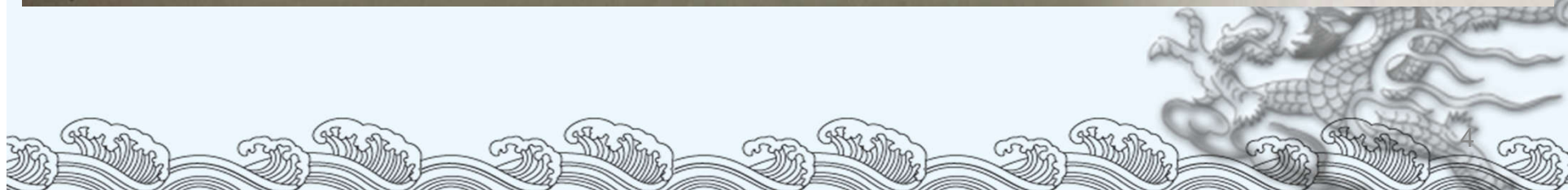
在跳跃过程的同时，可以从空中拍摄和发送回视频。伴随着这只机器人跳高世界冠军的，必然是铺天盖地而且精准无比的炮火。

沙蚤机器人设计的主要特点有以下三方面。

1) 行进功能。弹跳机器人一般只进行直线或转弯动作，所以采用传统的前轮驱动，为减轻车重，采用单电机和电磁离合器配合控制。

2) 弹跳能力。这款机器人的跳跃一共有停止、瞄准发射、滞空和降落4部分，跳跃动力的汽缸是由二氧化碳（固体状态是干冰）驱动的，每次加满二氧化碳，可以跳跃25次左右。跳跃至空中时，它能依靠陀螺仪保持平衡。气动弹跳原理如图4.2所示， T_0 为蓄能器内的温度， P_0 为蓄能器内的压强， T_1 为作动缸的温度， T 为作动缸内靠近活塞位置的温度， P 为作动缸内靠近活塞位置的压强。

3) 减震效果。由于会从高处跌落，该机器人对减震性能提出了严格的要求。应对方法如下：①该车车轮采用蜂窝式无气轮胎，其结构类似于某些军用吉普的车轮，如图4.3所示。这种车轮结构重量轻、耐磨性好、具有一定的吸能减震作用且使用寿命长。②当机器人跳跃到空中时，通过车轮迅速旋转，进行飞行操控，使该机器人保持车身水平，尽量四轮着地，从而缓冲着陆时机器人与地面的碰撞强度。



【教学目标】

- ◆了解雅可比矩阵的物理意义，学会计算机器人的速度雅可比矩阵和力雅可比矩阵
- ◆能够借助雅可比矩阵进行机器人的速度和静力学分析
- ◆学会运用拉格朗日方程和牛顿-欧拉法对机器人进行动力学分析



任务一 工业机器人速度雅可比 与速度分析

- 速度雅可比矩阵
- 工业机器人速度分析

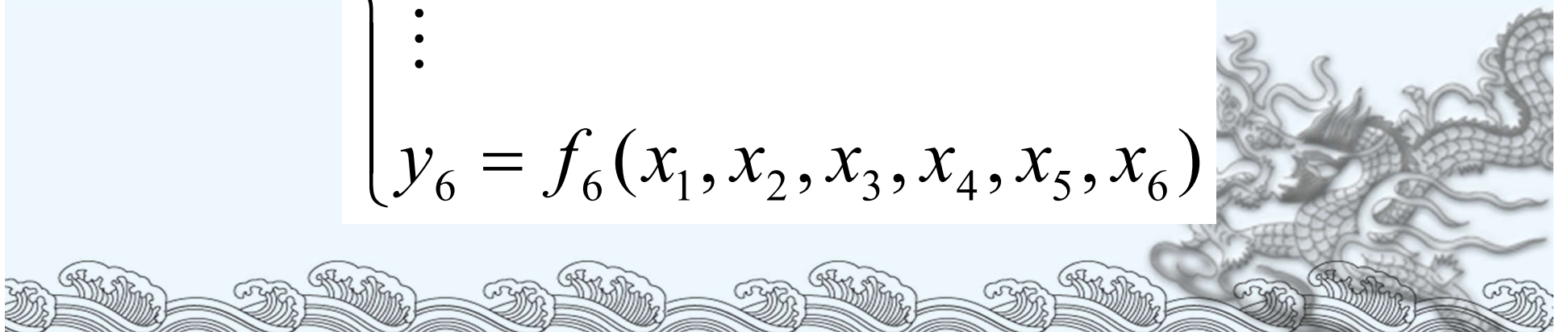


1、速度雅可比矩阵

数学上雅可比矩阵(Jacobian matrix)是一个多元函数的偏导矩阵。

假设有六个函数，每个函数有六个变量，即：

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \\ \vdots \\ y_6 = f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \end{cases}$$

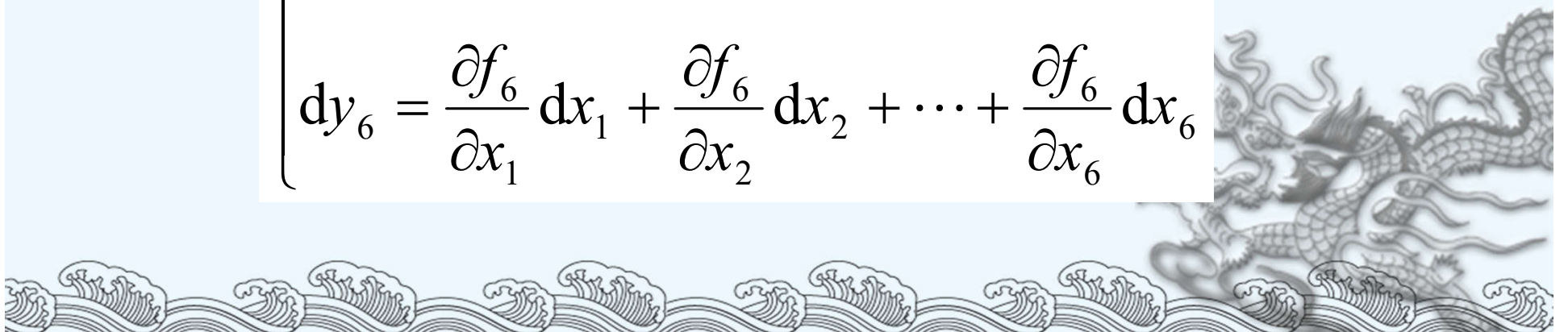


可写成:

$$Y = F(X)$$

将其微分, 得:

$$\begin{cases} dy_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_6} dx_6 \\ dy_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial x_6} dx_6 \\ \vdots \\ dy_6 = \frac{\partial f_6}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_6}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f_6}{\partial x_6} dx_6 \end{cases}$$



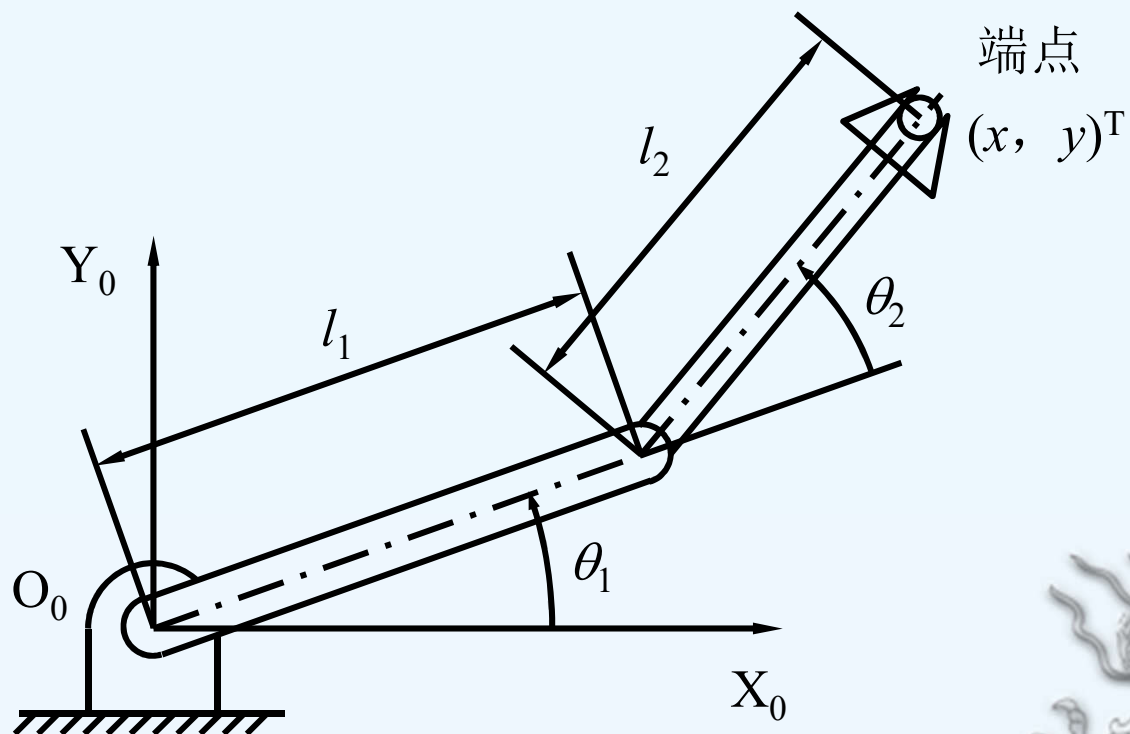
也可简写成： $dY = \frac{\partial F}{\partial X} dX$

其中： $\frac{\partial F}{\partial X}$ 叫做雅可比矩阵。

- 在工业机器人速度分析和以后的静力学分析中都将遇到类似的矩阵，我们称之为工业机器人雅可比矩阵，或简称雅可比。一般用符号J表示。



例：图为二自由度平面关节型工业机器人（2R工业机器人），其端点位置 x, y 与关节变量 θ_1 、 θ_2 的关系为：



二自由度平面关节工业机器人

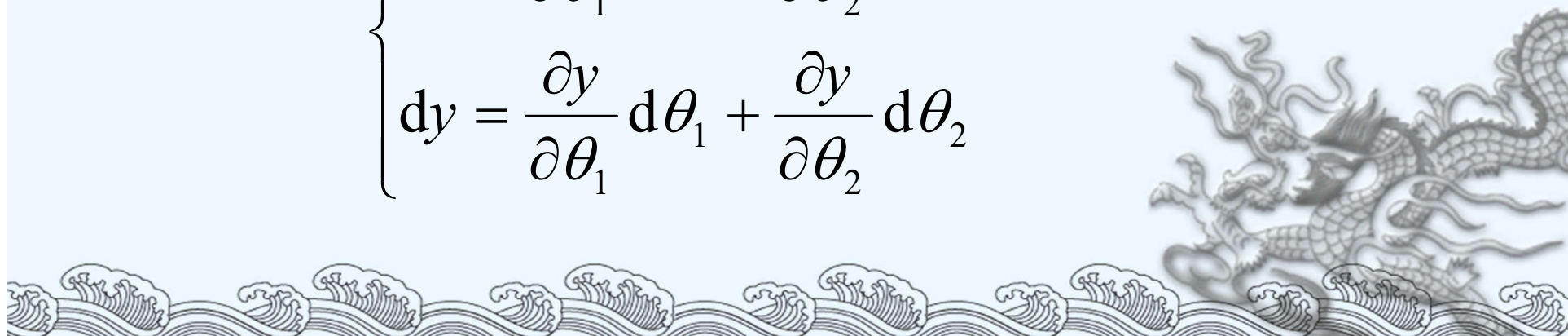
$$\begin{cases} x = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} x = x(\theta_1, \theta_2) \\ y = y(\theta_1, \theta_2) \end{cases}$$

将其微分，得：

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial x}{\partial \theta_2} d\theta_2 \\ dy = \frac{\partial y}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial y}{\partial \theta_2} d\theta_2 \end{cases}$$

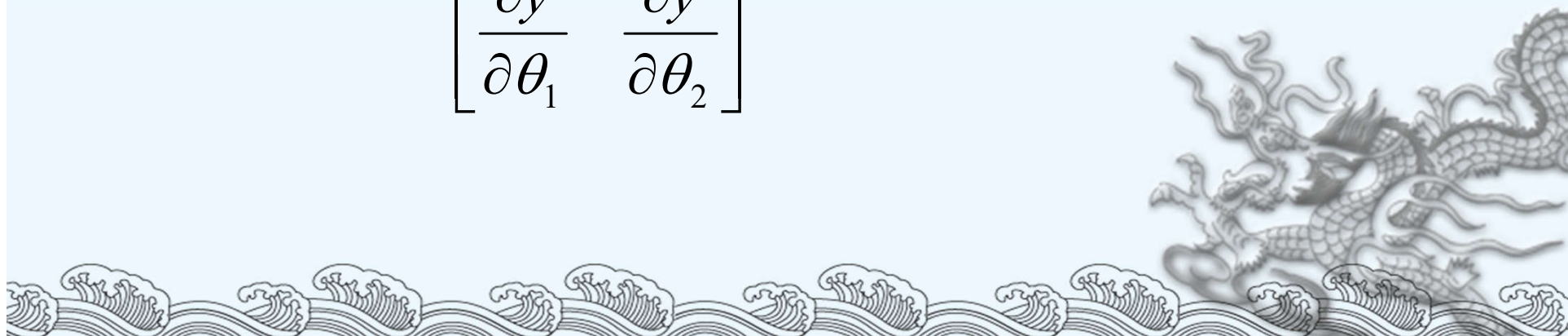


将其写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix}$$

令：

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} \end{bmatrix}$$



上式可简写为：

$$dX = Jd\theta$$

式中： $dX = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}; \quad d\theta = \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix}$

- 我们将J称为二自由度平面关节型工业机器人的速度雅可比，它反映了关节空间微小运动 $d\theta$ 与手部作业空间微小位移 dX 之间的关系。
- 注意： dX 此时表示微小线位移。



若对雅可比矩阵进行运算，则2R工业机器人的雅可比写为：

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

- 从J中元素的组成可见，J阵的值是 θ_1 及 θ_2 的函数。**



对于n自由度机器人的情况，关节变量可用广义关节变量

$$\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$$

转动关节： $q_i = \theta_i$ ，移动关节： $q_i = d_i$

$d\mathbf{q} = [dq_1 \ dq_2 \ \dots \ dq_n]^T$ 反映了关节空间的微小运动。

手部在操作空间的运动参数用 \mathbf{X} 表示，它是关节变量的函数，即 $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{q})$ ，并且是一个6维列矢量。

$$d\mathbf{X} = [dx \ dy \ dz \ \delta\phi_x \ \delta\phi_y \ \delta\phi_z]^T$$

$d\mathbf{X}$ 反映了操作空间的微小运动，它由工业机器人手部微小线位移和微小角位移(微小转动)组成。



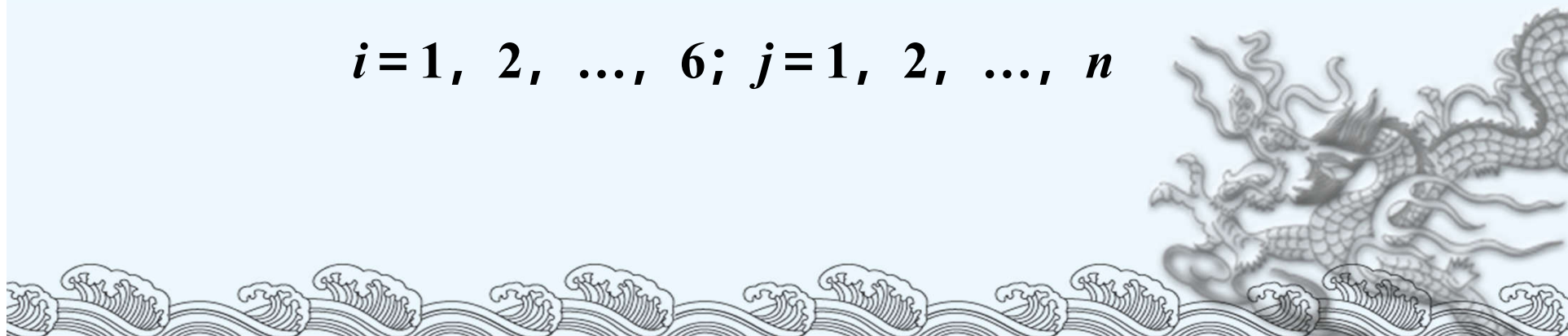
因此，参照前面的式子可写出类似的方程式，即：

$$dX = J(q)dq$$

式中 $J(q)$ 是 $6 \times n$ 的偏导数矩阵，称为 n 自由度工业机器人速度雅可比矩阵。它反映了关节空间微小运动 dq 与手部作业空间微小运动 dX 之间的关系。它的第 i 行第 j 列元素为：

$$J_{ij}(q) = \frac{\partial x_i(q)}{\partial q_j}$$

$$i = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, \dots, n$$



2、工业机器人速度分析

◆ 对式 $dX = J(q)dq$ 左、右边各除以 dt ，得：

$$\frac{dX}{dt} = J(q) \frac{dq}{dt}$$

即：

$$V = J(q)\dot{q}$$

式 $V = J(q)\dot{q}$ 中：

V ——工业机器人手部在操作空间中的广义速度， $V = \dot{X}$ ；

\dot{q} ——工业机器人关节在关节空间中的关节速度；

$J(q)$ ——确定关节空间速度 \dot{q} 与操作空间速度 V 之间关系的雅可比矩阵。

若令 J_1 、 J_2 分别为雅可比的第一列矢量和第二列矢量，则有：

$$V = J_1 \dot{\theta}_1 + J_2 \dot{\theta}_2$$

式中右边第一项表示仅由第一个关节运动引起的端点速度；右边第二项表示仅由第二个关节运动引起的端点速度；总的端点速度为这两个速度矢量的合成。

工业机器人速度雅可比的每一列表示其它关节不动而某一关节运动产生的端点速度。



算例所示二自由度平面关节型工业机器人手部的速度为：

$$\begin{aligned}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -[l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)]\dot{\theta}_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)\dot{\theta}_2 \\ [l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)]\dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)\dot{\theta}_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

•假如 θ_1 及 θ_2 是时间的函数， $\theta_1=f_1(t)$ ， $\theta_2=f_2(t)$ ，则可由此式求出手部的瞬时速度 $\mathbf{V} = \mathbf{f}(t)$ 。



反之，假如给定工业机器人手部速度，可由式

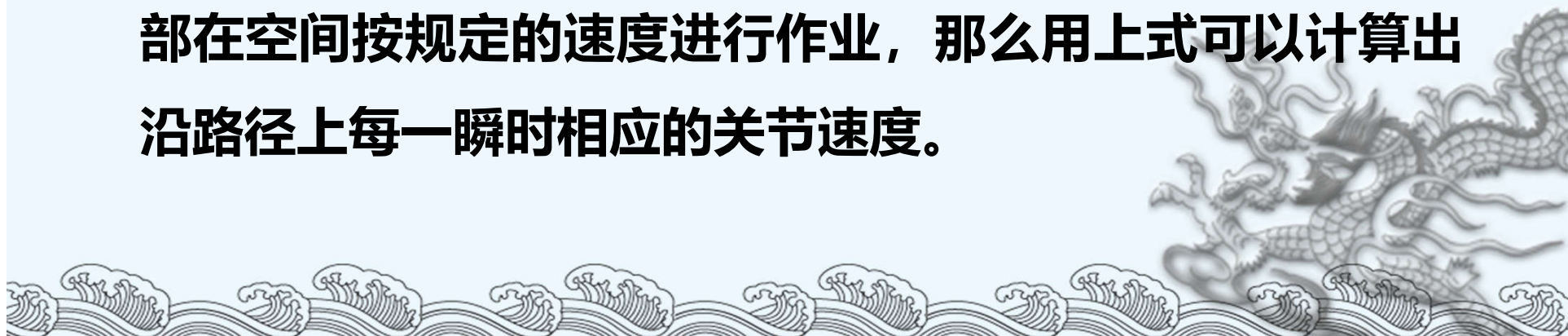
$$V = J(q)\dot{q}$$

解出相应的关节速度，即：

$$\dot{q} = J^{-1}V$$

式中： J^{-1} 称为工业机器人逆速度雅可比。

上式是一个很重要的关系式。例如，当希望工业机器人手部在空间按规定的速度进行作业，那么用上式可以计算出沿路径上每一瞬时相应的关节速度。



- 一般来说，求 J^{-1} 是比较困难的，有时还会出现奇异解，就无法解算关节速度。

- 通常 J^{-1} 出现奇异解的情况有下面两种：

- 1) **工作域边界上奇异**。当臂全部伸展开或全部折回而使手部处于工作域的边界上或边界附近时，出现 J^{-1} 奇异，这时工业机器人相应的形位叫做奇异形位。

- 2) **工作域内部奇异**。奇异也可以是由两个或更多个关节轴线重合所引起的。

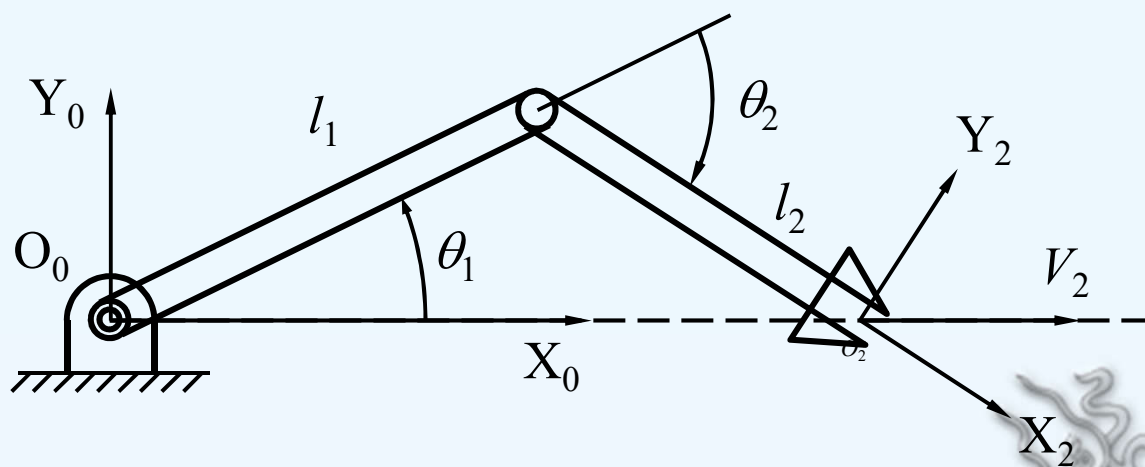


当工业机器人处在奇异形位时，就会产生退化现象，丧失一个或更多自由度。这意味着在空间某个方向(或子域)上，不管工业机器人关节速度怎样选择，手部也不可能实现移动。



[例]

如图所示二自由度平面关节型机械手。手部某瞬时沿固定坐标系 X_0 轴正向以 1.0m/s 速度移动，杆长为 $l_1 = l_2 = 0.5\text{m}$ 。假设该瞬时 $\theta_1 = 30^\circ$ ， $\theta_2 = -60^\circ$ 。求相应瞬时的关节速度。



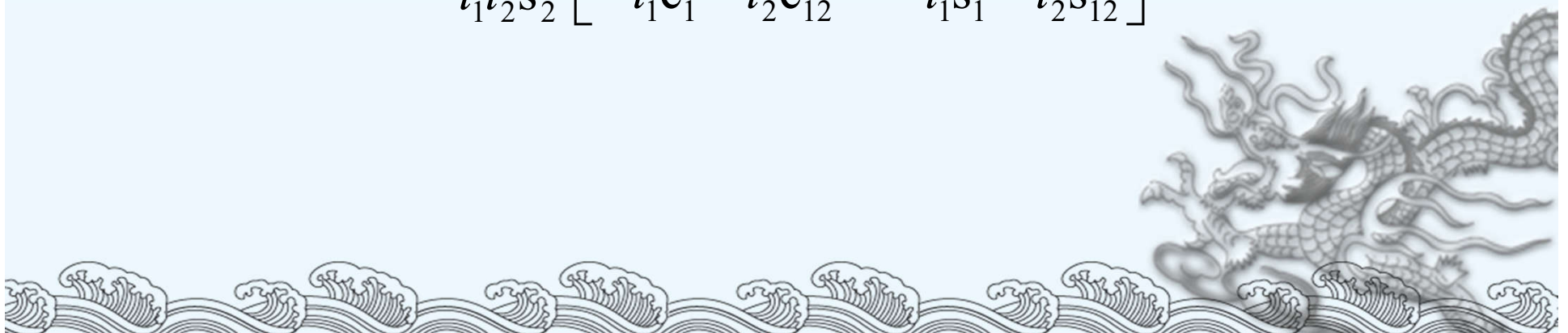
二自由度机械手手爪沿 X_0 方向运动

- ◆ 由前面推导知，二自由度机械手的速度雅可比为：

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

因此，逆速度雅可比为：

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{l_1 l_2 s_2} \begin{bmatrix} l_2 c_{12} & l_2 s_{12} \\ -l_1 c_1 - l_2 c_{12} & -l_1 s_1 - l_2 s_{12} \end{bmatrix}$$



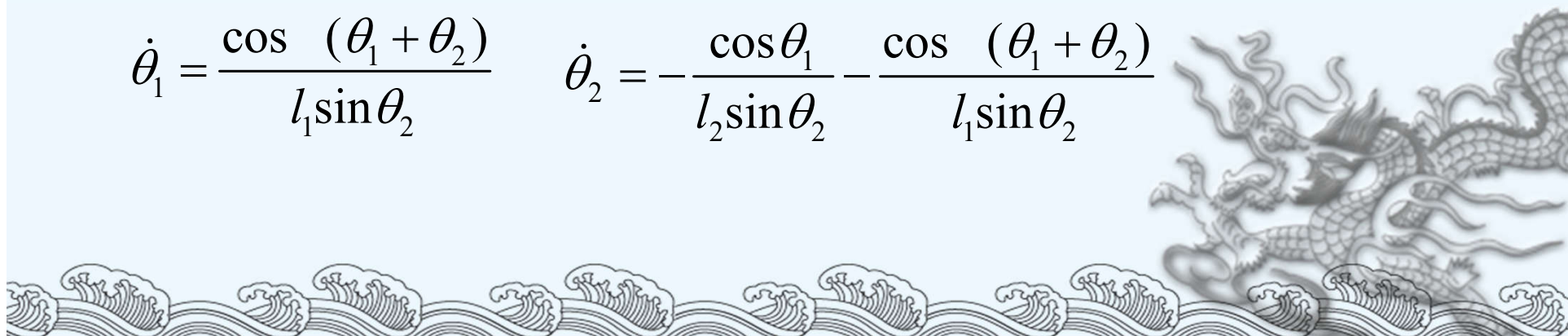
由式 $\dot{q} = J^{-1}V$ 且 $v_x=1\text{m/s}$, $v_y=0$, 得:

◆ 已知端点速度为: $V = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

因此, 由上式可得:

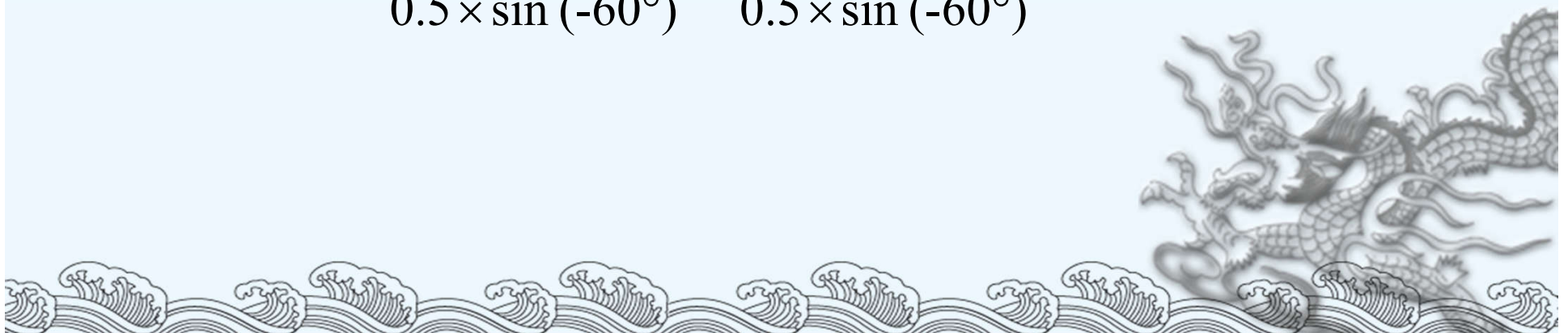
$$\dot{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = J^{-1}V = \frac{1}{l_1 l_2 s_2} \begin{bmatrix} l_2 c_{12} & l_2 s_{12} \\ -l_1 c_1 - l_2 c_{12} & -l_1 s_1 - l_2 s_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2)}{l_1 \sin \theta_2} \quad \dot{\theta}_2 = -\frac{\cos \theta_1}{l_2 \sin \theta_2} - \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2)}{l_1 \sin \theta_2}$$



$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \frac{\cos (\theta_1 + \theta_2)}{l_1 \sin \theta_2} = \frac{\cos (30^\circ - 60^\circ)}{0.5 \times \sin (-60^\circ)} \\ &= -\frac{\sqrt{3}/2}{0.5 \times \sqrt{3}/2} = -2 \text{ (rad/s)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_2 &= -\frac{\cos \theta_1}{l_2 \sin \theta_2} - \frac{\cos (\theta_1 + \theta_2)}{l_1 \sin \theta_2} \\ &= -\frac{\cos 30^\circ}{0.5 \times \sin (-60^\circ)} - \frac{\cos (30^\circ - 60^\circ)}{0.5 \times \sin (-60^\circ)} = 4 \text{ rad/s}\end{aligned}$$



奇异讨论

- 从雅可比的逆矩阵知，当 $l_1 l_2 s_2 = 0$ 时无解。因为 $l_1 \neq 0$ ， $l_2 \neq 0$ ，所以，在 $\theta_2 = 0$ 或 $\theta_2 = 180^\circ$ 时，二自由度工业机器人逆速度雅可比 J^1 奇异。这时，该工业机器人二臂完全伸直，或完全折回，即两杆重合，工业机器人处于奇异形位。在这种奇异形位下，手部正好处在工作域的边界上，该瞬时手部只能沿着一个方向(即与臂垂直的方向)运动，不能沿其它方向运动，退化了一个自由度。



六自由度机器人速度雅可比J

- 在三维空间中作业的六自由度工业机器人，其速度雅可比 J 是一个 6×6 矩阵，和 V 分别是 6×1 列阵，即：

$$V_{(6 \times 1)} = J(q)_{(6 \times 6)} \dot{q}_{(6 \times 1)}$$

- 手部速度矢量 V 是由 3×1 线速度矢量和 3×1 角速度矢量组合而成的6维列矢量。
- 关节速度矢量是由6个关节速度组合而成的6维列矢量。
- 雅可比矩阵 J 的前三行代表手部线速度与关节速度的传递比；后三行代表手部角速度与关节速度的传递比。而雅可比矩阵 J 的第 i 列则代表第 i 个关节速度对手部线速度和角速度的传递比。

任务二 机器人静力学分析

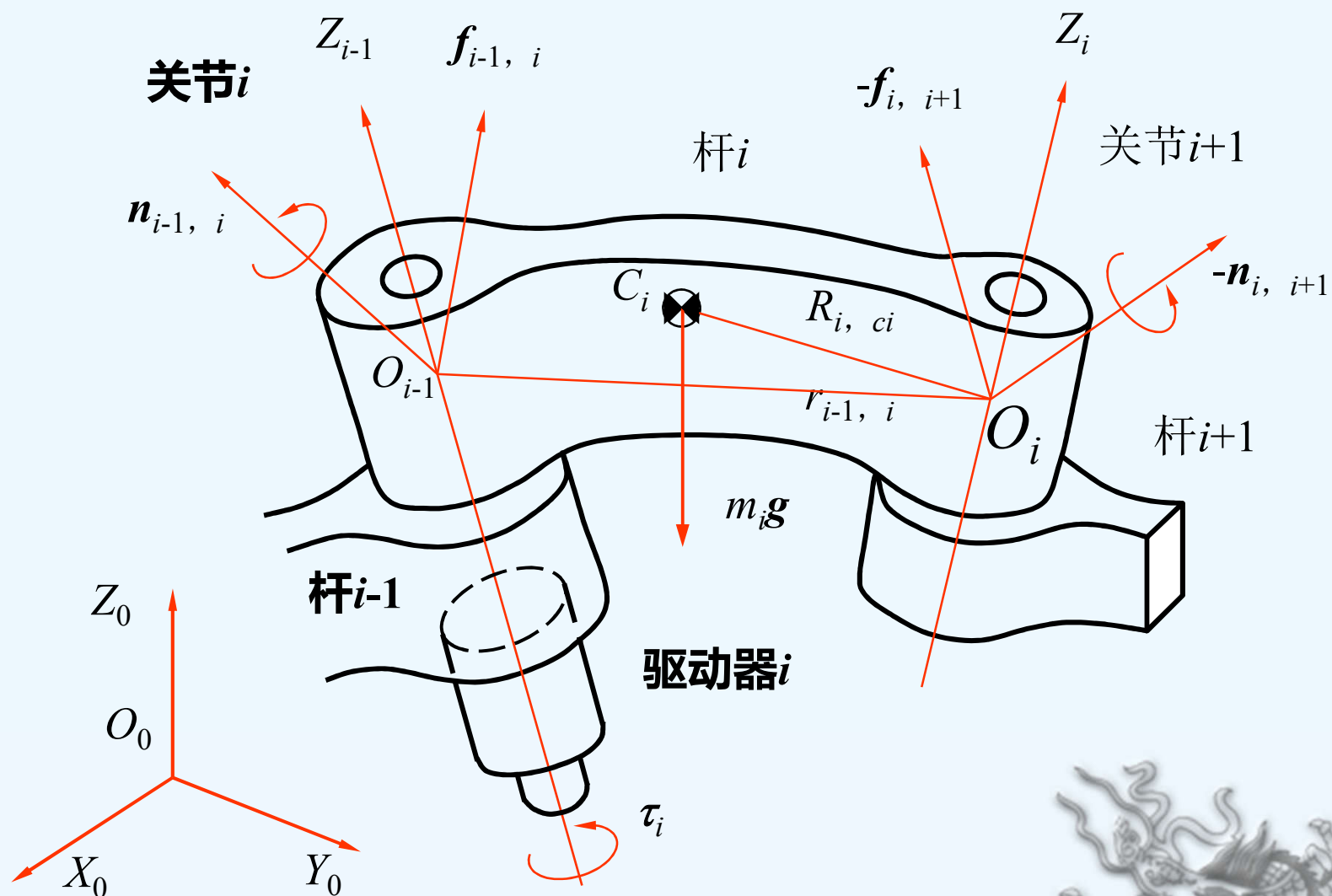
- 力和力矩分析
- 工业机器人力的雅克比矩阵
- 机器人静力计算的两类问题



1、力和力矩分析

- ◆ 这里以操作臂中单个杆件为例分析受力情况。
- ◆ 如图所示，杆件 i 通过关节 i 和 $i+1$ 分别与杆件 $i-1$ 和杆件 $i+1$ 相连接，两个坐标系 $\{i-1\}$ 和 $\{i\}$ 分别如图所示。

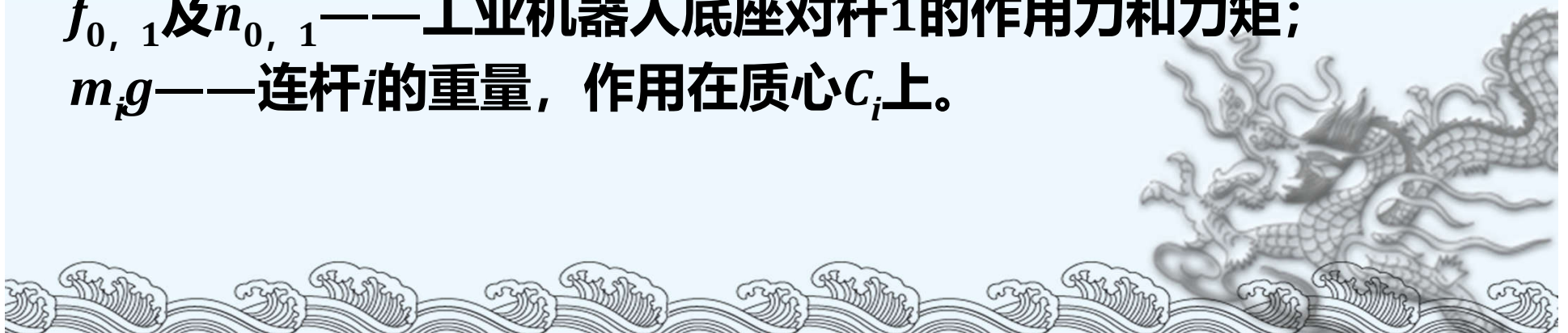




杆 i 上的力和力矩

图中力和力矩

- $f_{i-1, i}$ 及 $n_{i-1, i}$ —— $i-1$ 杆通过关节 i 作用在 i 杆上的力和力矩;
- $f_{i, i+1}$ 及 $n_{i, i+1}$ —— i 杆通过关节 $i+1$ 作用在 $i+1$ 杆上的力和力矩;
- $-f_{i, i+1}$ 及 $-n_{i, i+1}$ —— $i+1$ 杆通过关节 $i+1$ 作用在 i 杆上的反作用力和反作用力矩;
- $f_{n, n+1}$ 及 $n_{n, n+1}$ —— 工业机器人最末杆对外界环境的作用力和力矩;
- $-f_{n, n+1}$ 及 $-n_{n, n+1}$ —— 外界环境对工业机器人最末杆的作用力和力矩;
- $f_{0, 1}$ 及 $n_{0, 1}$ —— 工业机器人底座对杆1的作用力和力矩;
- $m_i g$ —— 连杆 i 的重量, 作用在质心 C_i 上。



连杆*i*的静力学平衡条件

◆ 连杆*i*的力和力矩平衡方程式为：

$$f_{i-1, i} + (-f_{i, i+1}) + m_i g = 0$$

$$n_{i-1, i} + (-n_{i, i+1}) + (r_{i-1, i} + r_{i, ci}) \times f_{i-1, i} + (r_{i, ci}) \times (-f_{i, i+1}) = 0$$

式中： $r_{i-1, i}$ ——坐标系{*i*}的原点相对于坐标系{*i-1*}的位置矢量；

$r_{i, ci}$ ——质心相对于坐标系{*i*}的位置矢量。



- ◆假如已知外界环境对工业机器人最末杆的作用力和力矩，那么可以由最后一个连杆向第零号连杆(机座)依次递推，从而计算出每个连杆上的受力情况。
- ◆为了便于表示工业机器人手部端点的力和力矩(简称为端点力 F)，可将 $f_{n, n+1}$ 和 $n_{n, n+1}$ 合并写成一个6维矢量：

$$F = \begin{bmatrix} f_{n, n+1} \\ n_{n, n+1} \end{bmatrix}$$



- ◆ 各关节驱动器的驱动力或力矩可写成一个 n 维矢量的形式，即：

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix}$$

式中： n ——关节的个数；

τ ——关节力矩(或关节力)矢量，简称广义关节力矩。



2、工业机器人力的雅可比矩阵

假定关节无摩擦，并忽略各杆件的重力，则广义关节力矩 τ 与工业机器人手部端点力 F 的关系可用下式描述：

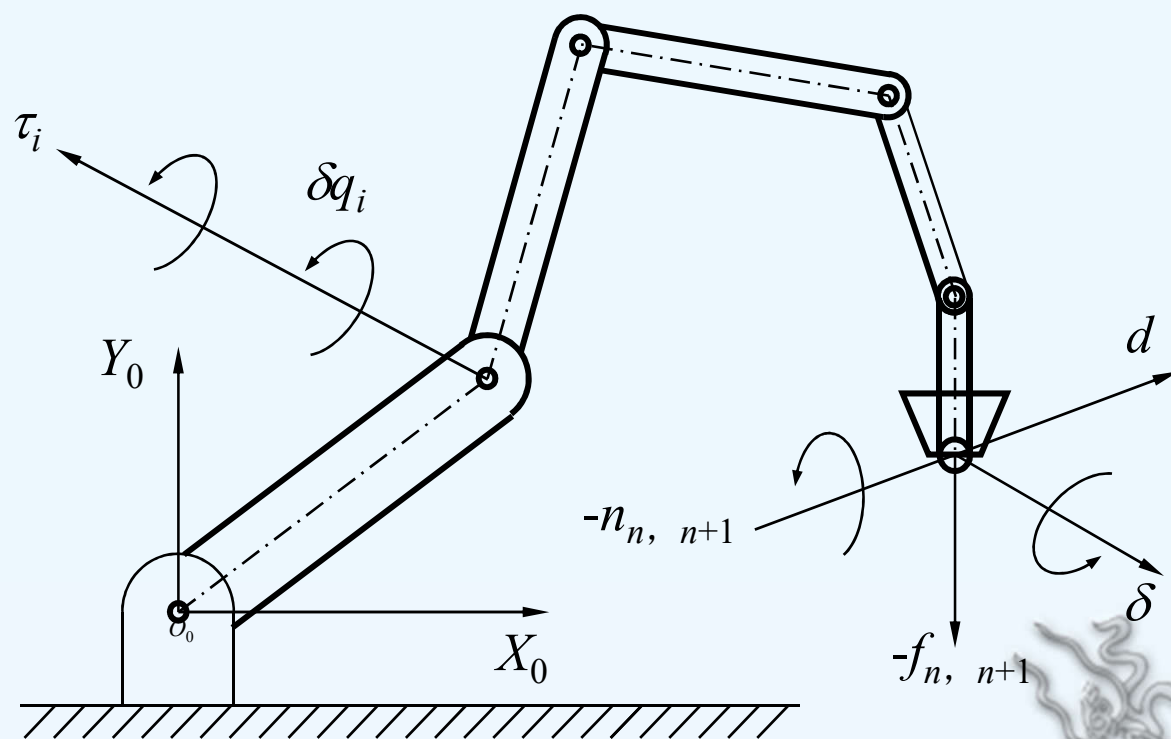
$$\tau = J^T F$$

式中： J^T 为 $n \times 6$ 阶工业机器人力雅可比矩阵或力雅可比。

上式可用下述虚功原理证明如下：



◆考虑各个关节的虚位移为 δq_i ，手部的虚位移为 δX ，如图所示。



手部及各关节的虚位移

$$\delta X = \begin{bmatrix} d \\ \delta \end{bmatrix}$$

$$\delta \mathbf{q} = [\delta q_1, \delta q_2 \dots \delta q_n]^T \quad (3-21)$$

式中, $d = [d_x \ d_y \ d_z]^T$ 和 $\delta = [\delta\phi_x \ \delta\phi_y \ \delta\phi_z]^T$ 分别对应于手部的线虚位移和角虚位移 (作业空间) ;

δq 为由各关节虚位移 δq_i 组成的工业机器人关节虚位移矢量 (关节空间) 。



假设发生上述虚位移时，各关节力矩为 $\tau_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ，作用在工业机器人手部端点上的力和力矩分别为 $-f_{n, n+1}$ 和 $-n_{n, n+1}$ 。由上述力和力矩所做的虚功可以由下式求出：

$$\delta W = \tau_1 \delta q_1 + \tau_2 \delta q_2 + \dots + \tau_n \delta q_n - f_{n, n+1} d - n_{n, n+1} \delta$$

或写成：

$$\delta W = \tau^T \delta q - F^T \delta X$$



•根据虚位移原理，工业机器人处于平衡状态的充分必要条件是对任意符合几何约束的虚位移，有：

$$\delta W = 0$$

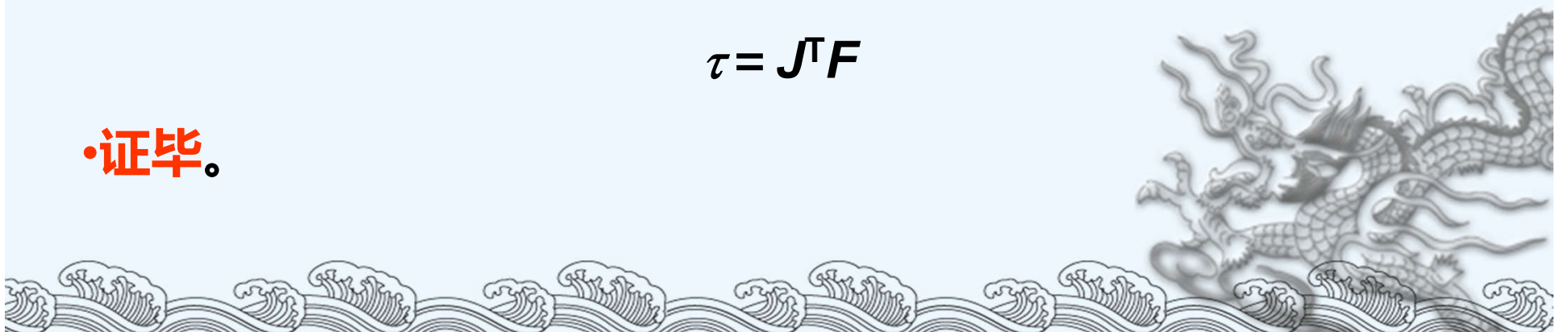
•注意到虚位移 δq 和 δX 并不是独立的，是符合杆件的几何约束条件的。利用式， $dX = Jdq$ ， $\delta W = \tau^T \delta q - F^T \delta X$ 可写成：

$$\delta W = \tau^T \delta q - F^T J \delta q = (\tau - J^T F)^T \delta q$$

•式中的 δq 表示几何上允许位移的关节独立变量，对于任意的 δq ，欲使 $\delta W = 0$ ，必有：

$$\tau = J^T F$$

•证毕。



• 式(3-23)表示在静力平衡状态下，手部端点力 F 向广义关节力矩 τ 映射的线性关系。式中 J^T 与手部端点力 F 和广义关节力矩 τ 之间的力传递有关，故叫作工业机器人力雅可比。很明显，力雅可比 J^T 正好是工业机器人速度雅可比 J 的转置。



3、机器人静力计算的两类问题

- ◆ 从操作臂手部端点力 F 与广义关节力矩 τ 之间的关系式 $\tau = J^T F$ 可知，操作臂静力学可分为两类问题：
 - ◆ (1) 已知外界环境对工业机器人手部作用力 F' (即手部端点力 $F = -F'$)，求相应的满足静力学平衡条件的关节驱动力矩 τ 。
 - ◆ (2) 已知关节驱动力矩 τ ，确定工业机器人手部对外界环境的作用力 F 或负荷的质量。



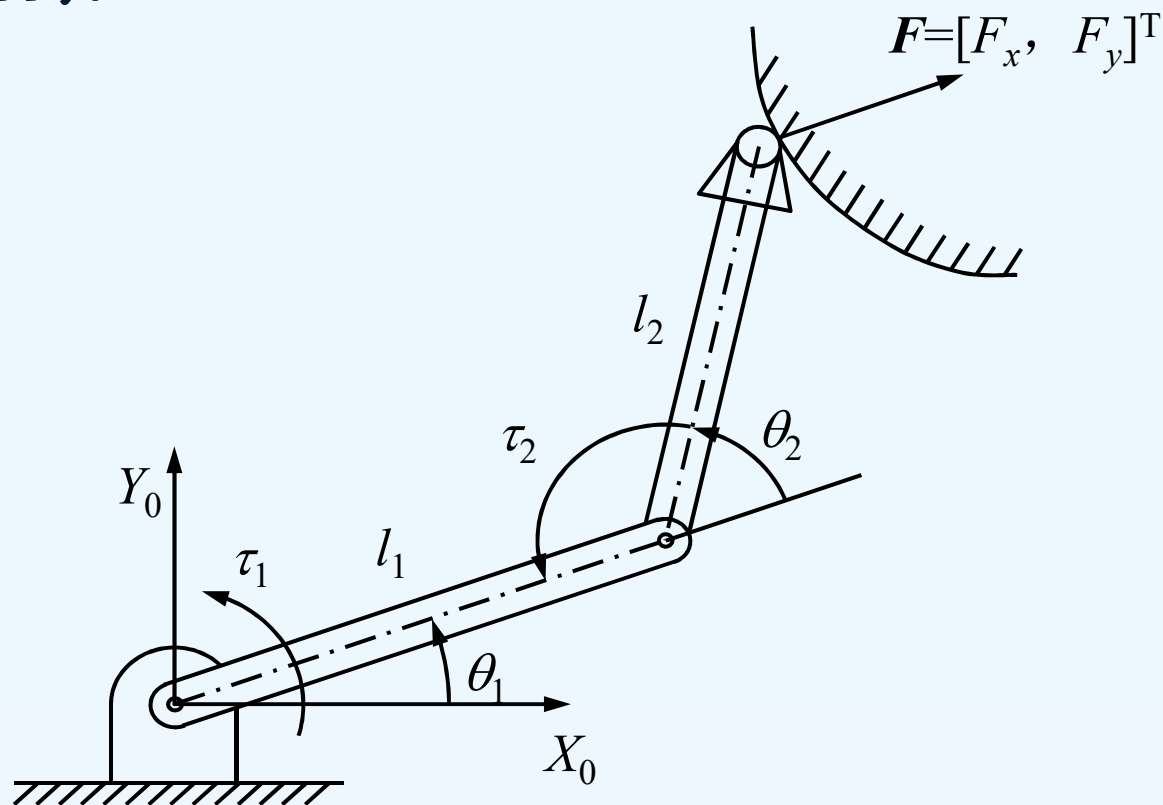
◆ 第二类问题是第一类问题的逆解。这时

$$F = (J^T)^{-1} \tau$$

◆ 但是，由于工业机器人的自由度可能不是6，比如 $n > 6$ ，力雅可比矩阵就有可能不是一个方阵，则 J^T 就没有逆解。所以，对这类问题的求解就困难得多，在一般情况下不一定能得到唯一的解。如果 F 的维数比 τ 的维数低，且 J 是满秩的话，则可利用最小二乘法求得 F 的估值。



[例] 如图所示的一个二自由度平面关节型机械手，已知手部端点力 $F = [F_x, F_y]^T$ ，求对应于端点力 F 的关节力矩(不考虑摩擦)。



手部端点力 F 与等效关节力矩 τ

【解】

- ◆ 已知该机械手的速度雅可比矩阵为：

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 s\theta_1 - l_2 s(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 s(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 c\theta_1 + l_2 c(\theta_1 + \theta_2) & l_2 c(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

- 则该机械手的力雅可比为：

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} -l_1 s\theta_1 - l_2 s(\theta_1 + \theta_2) & l_1 c\theta_1 + l_2 c(\theta_1 + \theta_2) \\ -l_2 s(\theta_1 + \theta_2) & l_2 c(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$



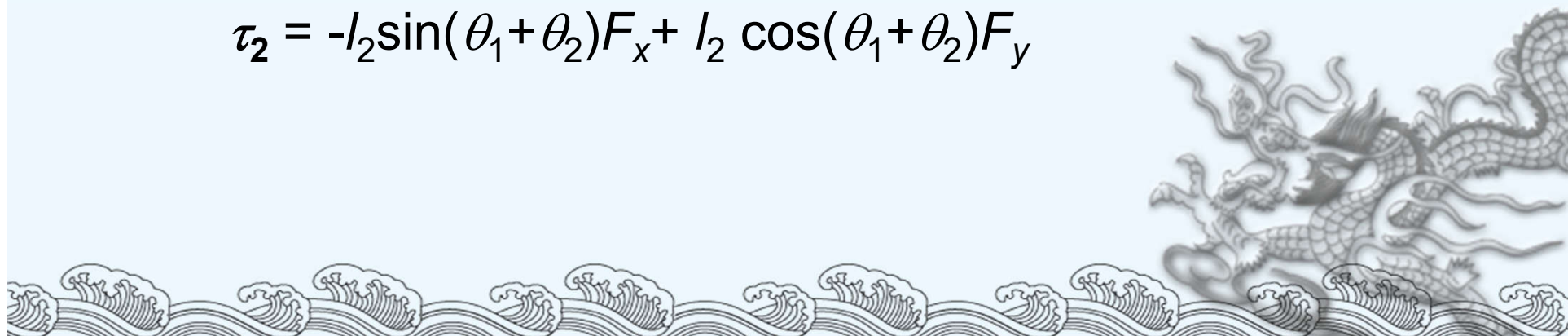
◆ 根据 $\tau = J^T F$, 可得出等效关节力矩为:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s\theta_1 - l_2 s(\theta_1 + \theta_2) & l_1 c\theta_1 + l_2 c(\theta_1 + \theta_2) \\ -l_2 s(\theta_1 + \theta_2) & l_2 c(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$$

所以:

$$\begin{aligned} \tau_1 = & -[l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)]F_x \\ & + [l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)]F_y \end{aligned}$$

$$\tau_2 = -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)F_x + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)F_y$$



任务三 机器人动力学分析

- 牛顿—欧拉方程
- 拉格朗日运动方程



工业机器人

重载、高速、高精度、智能化

对工业机器人设计和控制都提出了新的要求

在控制方面，机器人的**动态实时控制**是机器人发展的必然要求。需要对机器人的动力学进行分析。机器人是一个**非线性**的复杂的动力学系统。动力学问题的求解比较困难，而且需要较长的运算时间。因此，简化解的过程，最大限度地减少工业机器人动力学在线计算的时间，已是一个受到关注的研究课题。

动力学研究物体的运动和作用力之间的关系。机器人动力学方程是机器人机械系统的运动方程，表示机器人各关节的位置、速度、加速度与各关节执行器驱动力矩之间的关系。机器人动力学问题有下述两类相反的问题。

(1) 给出已知的轨迹点上的 $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ ，即机器人关节位置、速度和加速度，求相应的关节力矩向量 T 。这对实现机器人**动态控制**是相当有用的。这是动力学**逆**问题。

(2) 已知关节驱动力矩，求机器人系统相应的各瞬时的运动。也就是说，给出关节力矩向量 τ ，求机器人所产生的运动 $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ 。这对**模拟机器人的运动**是非常有用的。这是动力学**正**问题。

机器人的动力学**正问题**主要用于机器人的运动仿真。

【例】在机器人设计中，需要根据连杆质量、运动学和动力学参数、传动机构特征及负载大小进行**动态仿真**，从而决定机器人的结构参数和传动方案，验算设计方案的合理性和可行性，以及结构优化的程度；在机器人离线编程中，为了顾及机器人高速运动引起的动载荷和路径偏差，要进行路径控制仿真和动态模型仿真。



研究机器人动力学逆问题目的：

- 为了对机器人的运动进行有效的实时控制，以实现预期的轨迹运动，并达到良好的动态性能指标。
- 由于机器人是个复杂的动力学系统，有多个连杆和关节组成，具有多个输入和多个输出，存在着错综复杂的关系和严重的非线性，所以动力学的实时计算很复杂，在实际控制时需要做一些简化假设。



分析研究机器人动力学特性的方法很多，有拉格朗日 (Lagrange) 方法，牛顿—欧拉 (Newton—Euler) 方法，高斯 (Gauss) 方法，凯恩 (Kane) 方法等。

1、牛顿—欧拉方程

牛顿—欧拉方法直接利用牛顿力学的刚体动力学知识，导出机器人逆动力学的递推公式，即已知机器人各连杆的速度、角速度及转动惯量，就可以利用牛顿—欧拉刚体动力学公式导出机器人各关节执行器的驱动力及驱动力矩的递推公式。然后再由它归纳出机器人动力学的数学模型—机器人机械系统的矩阵形式的运动方程。



(1) 连杆的速度与加速度分析

机器人一般由多个连杆通过转动或移动关节连接而成，为了用牛顿—欧拉法建立机器人的动力学方程，需要讨论机器人的瞬时运动状态，分析组成机器人的各连杆的速度和加速度及其运动的传递。

设连杆上的任一点 P 在连杆坐标系 $\{B\}$ 内的位置矢量为 B_P ，连杆坐标系 $\{B\}$ 相对于参考系 $\{A\}$ 的位置矢量为 ${}^A_{P_{B0}}$ ，旋转矩阵为 ${}^A_B R$ ，则点 P 在两坐标系中的位置矢量 A_P 和 B_P 之间的关系满足公式

$${}^A_P = {}^A_{P_{B0}} + {}^A_B R {}^B_P$$



将上式两边求导，得点 P 相对于 $\{A\}$ 和 $\{B\}$ 的运动速 ${}^A\dot{P}$, ${}^B\dot{P}$ 之间的关系式

$${}^A\dot{P} = {}^A\dot{P}_{BO} + {}^A\dot{R} {}^B P + {}^A R {}^B\dot{P}$$

式中： ${}^A\dot{P}_{BO}$ 为 $\{B\}$ 的原点相对于 $\{A\}$ 的运动速度；
 ${}^A\dot{R}$ 为旋转矩阵的导数。

下面首先讨论 \dot{R} 与角速度矢量 ω 之间的关系。

根据导数和微分的定义，正交矩阵的导数为

$$\dot{R}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t+\Delta t) - R(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta R(t)}{\Delta t}$$

$R(t + \Delta t)$ 可以看成 $R(t)$ 在时间间隔 Δt 内绕 K 轴转动微分角度 $\delta\theta$ 而得到, 可表示为

$$R(t + \Delta t) = R(K, \delta\theta)R(t).$$

所以

$$\Delta R(t) = R(t + \Delta t) - R(t) = [R(K, \delta\theta) - I]R(t) = \Lambda(K, \delta\theta)R(t)$$

式中: I — 3×3 阶单位矩阵;

$\Lambda(K, \delta\theta)$ 为微分旋转算子, 其表达式为

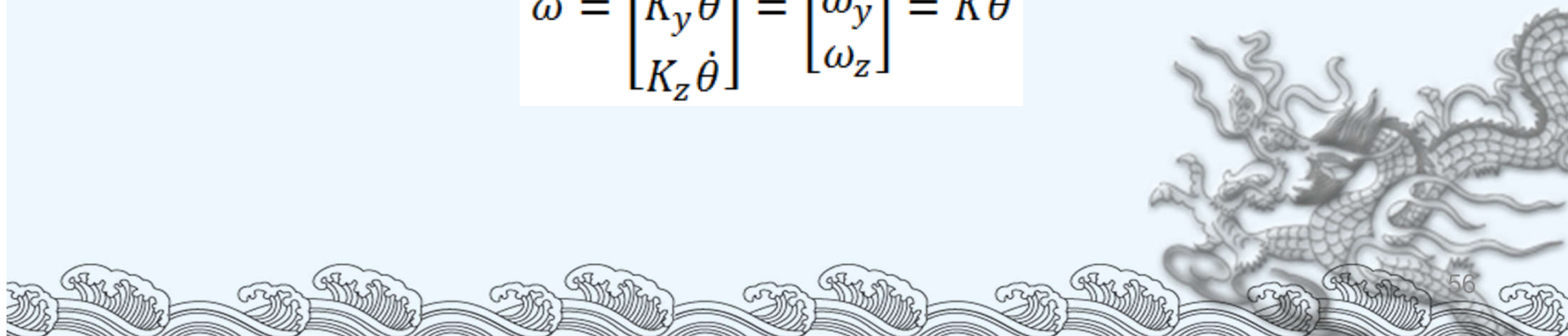
$$\Lambda(K, \delta\theta) = \begin{bmatrix} 0 & -K_z \delta\theta & K_y \delta\theta \\ K_z \delta\theta & 0 & -K_x \delta\theta \\ -K_y \delta\theta & K_x \delta\theta & 0 \end{bmatrix}$$

对上式两端除以 Δt ，并取极限，定义为角速度算子矩阵 $S(\omega)$ ，即

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -K_z \delta \dot{\theta} & K_y \delta \dot{\theta} \\ K_z \delta \dot{\theta} & 0 & -K_x \delta \dot{\theta} \\ -K_y \delta \dot{\theta} & K_x \delta \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

相应的角速度矢量为

$$\omega = \begin{bmatrix} K_x \dot{\theta} \\ K_y \dot{\theta} \\ K_z \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = K \dot{\theta}$$



角速度算子矩阵 $S(\omega)$ 和角速度矢量 ω 是角速度的两种描述, 在任意矢径 P 处引起的线速度 v_P 可表示为

$$v_P = S(\omega)P = \omega \times P$$

可得旋转矩阵的导数为

$$\dot{R}(t) = S(\omega)R = \omega \times R$$

将 ${}^A\dot{P}$, ${}^B\dot{P}$ 和 ${}^A\dot{P}_{B0}$ 分别用 ${}^A v_P$, ${}^B v_P$ 和 ${}^A v_{B0}$ 代替, ${}^A\dot{R}$ 用上式表示, 则可表示为

$${}^A v_P = {}^A v_{B0} + {}^A R {}^B v_P + {}^A \omega \times {}^A R {}^B P$$

式中: ${}^A \omega$ 为坐标系 $\{B\}$ 相对于 $\{A\}$ 的角速度矢量。

由于点 P 是连杆上的固定点, 即 ${}^B P$ 为常数, 所以 ${}^B v_P = 0$, 此时上式可表示为

$${}^A v_P = {}^A v_{B0} + {}^A \omega \times {}^A R {}^B P$$

对上式两端求导, 得线加速度 ${}^A \dot{v}_P$ 和 ${}^B \dot{v}_P$ 之间的关系

$${}^A \dot{v}_P = {}^A \dot{v}_{B0} + {}^A \dot{\omega} \times {}^A R {}^B P + {}^A \omega \times ({}^A \omega \times {}^A R {}^B P)$$

上式表示了连杆上任一点 P 在连杆坐标系 $\{B\}$ 和参考坐标系 $\{A\}$ 的线加速度的转换公式, 可以用此公式来计算机器人连杆上某确定点的线加速度。

若已知 $\{C\}$ 相对 $\{B\}$ 的转动角速度为 ${}^B_C\omega$ ，因为角速度矢量是自由矢量，所以 $\{C\}$ 相对于 $\{A\}$ 的转动角速度和角加速度矢量为

$$\begin{aligned} {}^A_C\omega &= {}^A_B\omega + {}^A_BR_C\omega \\ {}^A_C\dot{\omega} &= {}^A_B\dot{\omega} + {}^A_BR_C\dot{\omega} + {}^A_B\omega \times {}^A_BR_C\omega \end{aligned}$$

可以用上面两公式来导出机器人角速度和角加速度的递推计算公式。



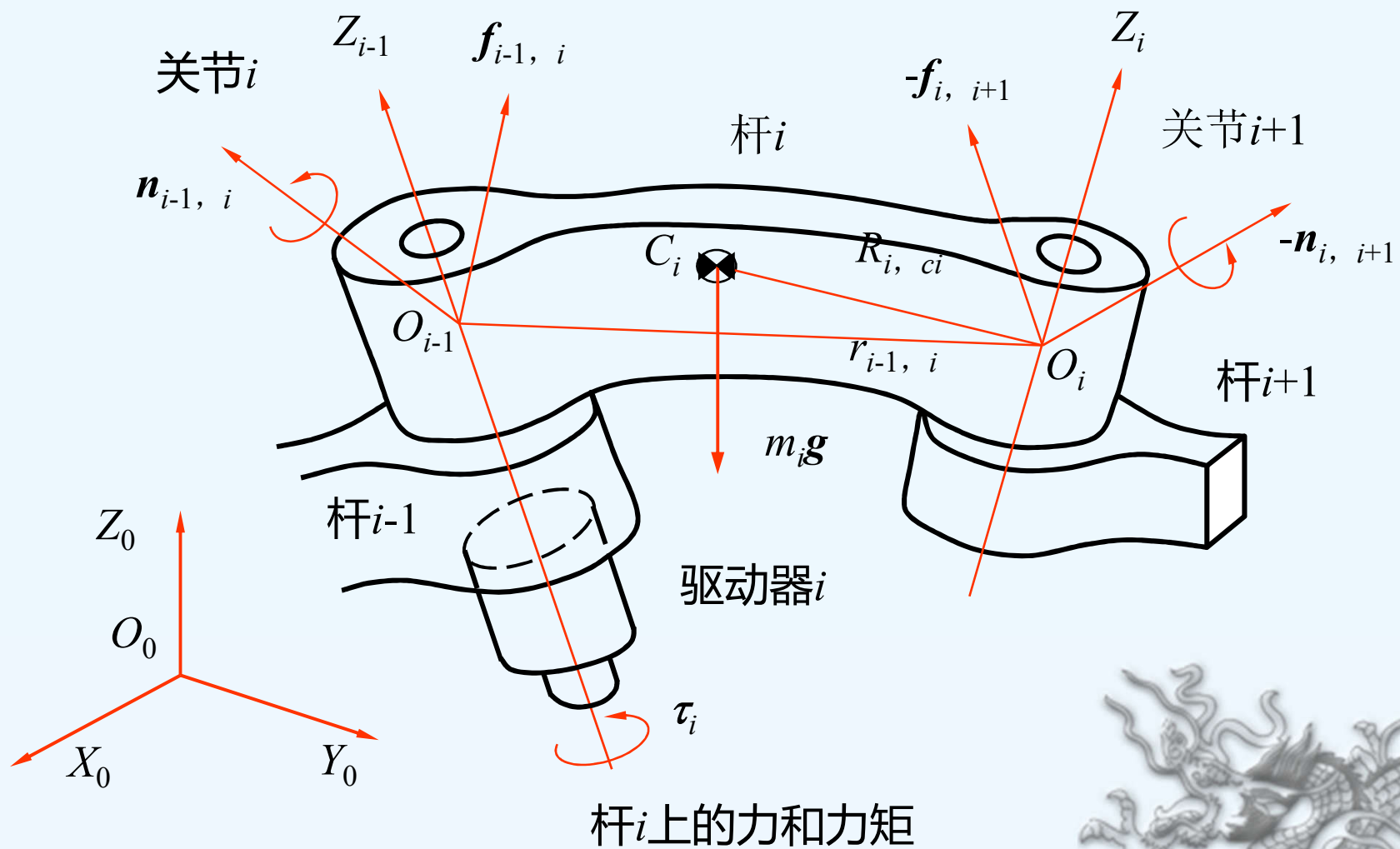
(2) 动力学基本方程

一个刚体的运动可分解为**固定在刚体上的任意一点的移动**以及**该刚体绕这一定点的转动**两部分。刚体动力学方程也可以用两个方程表达：

一个用以描述质心的移动，另一个描述质心的转动，前者称为质点运动方程，后者称为欧拉运动方程。



假设机器人手臂的单个杆件为自由体，所受的力和力矩如下图所示。



令 V_{Ci} 为杆 i 相对于固定系的质心速度，因固定系是惯性参考系，故惯性力为 $-m_i \dot{v}_{Ci}$ ，这里 m_i 为杆的质量，把惯性力加入到静力学平衡方程中，于是有

$$f_{i-1,i} + (-f_{i,i+1}) + m_i g = 0$$

$$f_{i-1,i} - f_{i,i+1} + m_i g - m_i \dot{v}_{Ci} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

式中 $f_{i-1,i}$ ， $-f_{i,i+1}$ ，分别为杆 $i-1$ ，杆 $i+1$ 对杆 i 的作用力。

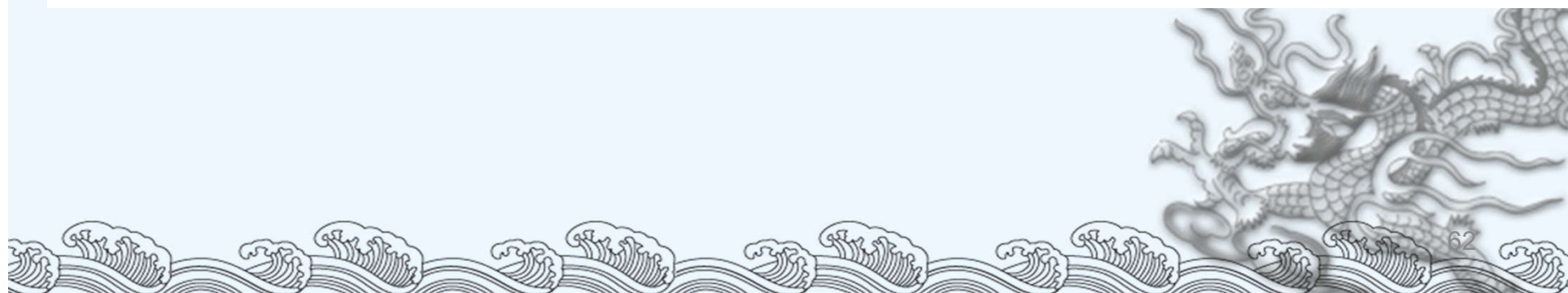
旋转运动用 Euler 方程描述，与上述推导式的方法相同，将惯性矩待入到力矩平衡方程中即可导出动力学力矩方程。



为了求出惯性矩，先看单个刚体的转动惯量或惯性积。假定一刚体绕通过其质心的任意方向的轴线旋转，则在固定坐标系内刚体的转动惯量可用一个 3×3 的对称阵表示，称为惯性矩阵：

$$I_i = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \int [(y - y_c)^2 + (z - z_c)^2] \rho dV & - \int (x - x_c)(y - y_c) \rho dV & - \int (z - z_c)(x - x_c) \rho dV \\ - \int (x - x_c)(y - y_c) \rho dV & \int [(z - z_c)^2 + (x - x_c)^2] \rho dV & - \int (y - y_c)(z - z_c) \rho dV \\ - \int (z - z_c)(x - x_c) \rho dV & - \int (y - y_c)(z - z_c) \rho dV & \int [(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2] \rho dV \end{bmatrix}$$

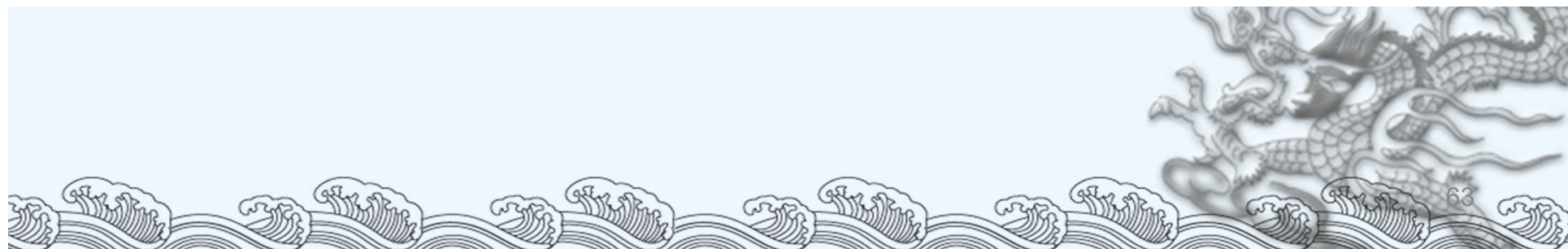


式中， ρ 为密度， x_c, y_c, z_c 为刚体质心坐标，每个积分都是对刚体的全容积 V 求积，从表达式可看出惯量是随刚体位姿变化的。

作用在杆 i 上的惯性矩是在这一瞬间该杆件的角动量对时间的变化率。令 ω_i 为角速度向量， I_i 为杆 i 质心处的惯量，于是角动量可用 $I_i \omega_i$ 表示。因为惯量随杆件方位的变化而变化，所以角动量对时间的导数不仅包含 $I_i \omega_i$ ，还要包括因 I_i 的变化而引起的变化，后一项即是陀螺力矩，用 $\omega_i \times (I_i \omega_i)$ 表示，将这两项加到静力学的力矩平衡式中，得

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{i-1,i} - \mathbf{n}_{i,i+1} + (\mathbf{r}_{i-1,i} + \mathbf{r}_{i,Ci}) \times \mathbf{f}_{i-1,i} + \mathbf{r}_{i,Ci} \times (-\mathbf{f}_{i,i+1}) - I_i \dot{\omega}_i - \omega_i \times (I_i \omega_i) = 0 \\ i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

即是单个杆件的动力学特性关系式，若将机器人的 n 个杆件均列出相应的上述两个方程，即得到机器人完整的动力学方程组的基本形式。



例 4-3 平面二自由度机器人如图 4.11 所示，试建立该机器人手臂的两个杆件的牛顿-欧拉方程，并推导出用关节位移 θ_1 ， θ_2 及关节力矩 τ_1 ， τ_2 表示的紧凑形式的动力学方程。

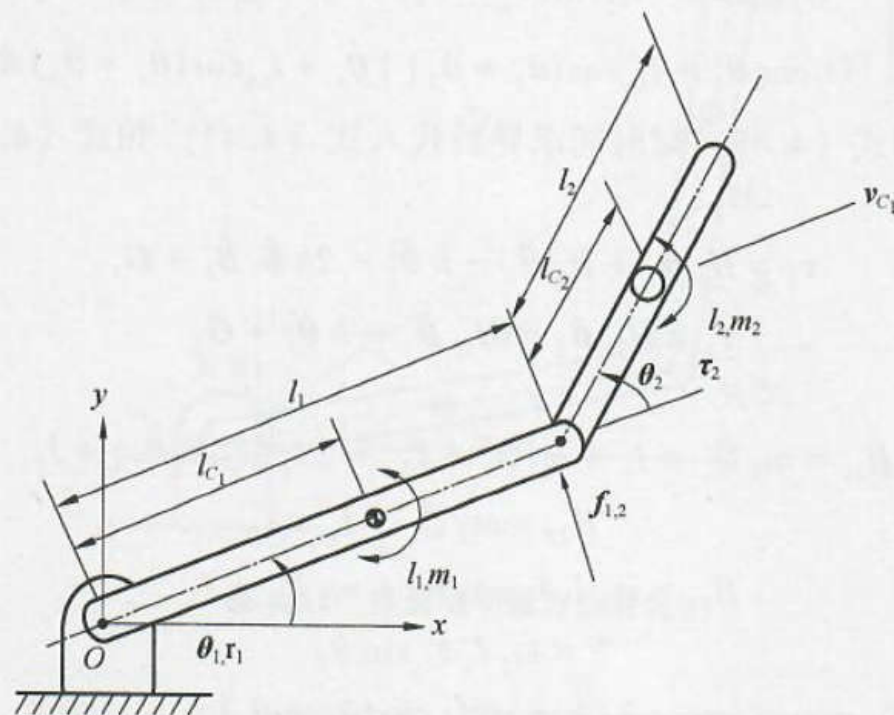


图 4.11 平面二自由度机器人

解 设 2 维向量 \mathbf{v}_{c_i} 表示每一杆件的质心速度, 用 2 维向量 $\boldsymbol{\omega}_i$ 表示杆件的角速度, 并设杆 i 的质心通过相邻两个关节的中心, 且与关节 i 相距 l_{c_i} , 因平面机构转轴的方向不变, 故惯量可看成是常量, 记为 I_i , 由式 (4.35) 和式 (4.37), 杆 1 的牛顿-欧拉方程为

$$\mathbf{f}_{0,1} - \mathbf{f}_{1,2} + m_1 \mathbf{g} - m_1 \dot{\mathbf{v}}_{c_1} = \mathbf{0} \quad (4.38)$$

$$\mathbf{n}_{0,1} - \mathbf{n}_{1,2} + (\mathbf{r}_{0,1} + \mathbf{r}_{1,c_1}) \times \mathbf{f}_{0,1} + \mathbf{r}_{1,c_1} \times (-\mathbf{f}_{1,2}) - I_1 \boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{0} \quad (4.39)$$

同理, 杆 2 的牛顿-欧拉方程为

$$\mathbf{f}_{1,2} + m_2 \mathbf{g} - m_2 \dot{\mathbf{v}}_{c_2} = \mathbf{0} \quad (4.40)$$

$$\mathbf{n}_{1,2} + (\mathbf{r}_{1,2} + \mathbf{r}_{2,c_2}) \times \mathbf{f}_{1,2} - I_2 \boldsymbol{\omega}_2 = \mathbf{0} \quad (4.41)$$

为了得到紧凑形式的动力学方程, 首先消除约束力。在此例中 τ_1, τ_2 与反力矩在不计摩擦时应相等, 即

$$\mathbf{n}_{i-1,i} = \boldsymbol{\tau}_i \quad (4.42)$$

将式 (4.42) 代入式 (4.41) 中, 得

$$\boldsymbol{\tau}_2 + (\mathbf{r}_{1,2} + \mathbf{r}_{2,c_2}) \times (-m_2 \mathbf{g} + m_2 \dot{\mathbf{v}}_{c_2}) - I_2 \boldsymbol{\omega}_2 = \mathbf{0} \quad (4.43)$$

同样办法消去 $\mathbf{f}_{0,1}$, 得

$$\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2 - \mathbf{r}_{0,1} \times (m_2 \mathbf{g} - m_2 \dot{\mathbf{v}}_{c_2} + m_1 \mathbf{g} - m_1 \dot{\mathbf{v}}_{c_1}) + \mathbf{r}_{1,c_1} \times (m_2 \mathbf{g} - m_2 \dot{\mathbf{v}}_{c_2}) - I_1 \boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{0} \quad (4.44)$$

因 ω_2 是相对固定系的, 而 θ_2 是相对杆 1 的, 因此有

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1 \quad (4.45)$$

$$\omega_2 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \quad (4.46)$$

线速度 v_{C_i} 可表示为

$$v_{C_1} = \begin{bmatrix} -l_{C_1} \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ l_{C_1} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$v_{C_2} = \begin{bmatrix} -(l_1 \sin \theta_1 + l_{C_2} \sin(\theta_1 + \theta_2)) \dot{\theta}_1 - l_{C_2} \sin(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ (l_1 \cos \theta_1 + l_{C_2} \cos(\theta_1 + \theta_2)) \dot{\theta}_1 + l_{C_2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

将式 (4.47) 和式 (4.48) 对时间求导后代入式 (4.43) 和式 (4.44) 中, 即得紧凑形式的动力学方程为

$$\tau_1 = H_{11} \ddot{\theta}_1 + H_{12} \ddot{\theta}_2 - h \dot{\theta}_2^2 - 2h \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + G_1 \quad (4.49)$$

$$\tau_2 = H_{22} \ddot{\theta}_2 + H_{12} \ddot{\theta}_1 - h \dot{\theta}_1^2 + G_2 \quad (4.50)$$

式中

$$H_{11} = m_1 l_{C_1}^2 + I_1 + m_2 (l_1^2 + l_{C_2}^2 + 2 l_1 l_{C_2} \cos \theta_2) + I_2 \quad (4.51)$$

$$H_{22} = m_2 l_{C_2}^2 + I_2 \quad (4.52)$$

$$H_{12} = m_2 l_1 l_{C_2} \cos \theta_2 + m_2 l_{C_2}^2 + I_2 \quad (4.53)$$

$$h = m_2 l_1 l_{C_2} \sin \theta_2 \quad (4.54)$$

$$G_1 = m_1 l_{C_1} g \cos \theta_2 + m_2 g (l_{C_2} \cos(\theta_1 + \theta_2) - l_1 \cos \theta_2) \quad (4.55)$$

$$G_2 = m_2 l_{C_2} g \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (4.56)$$

一般来说, n 个自由度机器人的紧凑形式的动力学方程可以写成

$$\tau_i = \sum_{j=1}^n H_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n H_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + G_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.57)$$

其中的系数 H_{ij} , H_{ijk} 和 G_i 均为关节位移 q_1, q_2, \dots, q_n 的函数, 若有外力加在手臂上, 则上式左边应相应改变。

(3) 动力学方程的物理含义

现在对动力学方程各项的物理意义作一解释。式 (4.49) 和式 (4.50) 中的 G_i 代表重力的影响, 由 (4.55) 和式 (4.56) 给出的 G_1, G_2 两项表示重力 $m_1 g, m_2 g$ 对关节 1 和关节 2 所取之矩, 这个矩与手臂的方位有关, 当手臂沿 x 轴方向全部伸开时, 重力矩达到最大。

H_{11} 代表杆 1 和杆 2 对关节 1 的总惯性矩, 杆 1 对其质心 C_1 的惯性矩为 I_1 , 使用平行移轴定理移到关节 1, 则为 $m_1 l_{C_1}^2 + I_1$, 杆件 2 对于质心 C_2 的惯性矩 I_2 , 移到关节 1 则有 $m_2 L^2 + I_2$, 如图 4.12 所示。由余弦定理可知

$$L^2 = l_1^2 + l_{C_2}^2 + 2 l_1 l_{C_2} \cos \theta_2 \quad (4.58)$$

当手臂全部伸开时, $\theta_2 = 0$, 惯性矩最大, 当手臂全部收缩时, $\theta_2 = \pi$, 惯性矩最小。



再看式 (4-49) 和式 (4-50) 的第二项, 对式 (4-49), 若在 $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$, $\theta_1 = 0$ 的瞬间, 不计重力, 则有 $\tau_1 = H_{12} \ddot{\theta}_2$, 这表示杆 2 相对于杆 1 加速时, 杆 2 作用在杆 1 上的力矩, 从方程式 (4.38) 和式 (4.39) 可看出杆 2 的力 $-f_{1,2}$ 和力矩 $-n_{1,2}$ 对杆 1 的影响, 记为 τ_{int} , 则有

$$\tau_{int} = -n_{1,2} - r_{0,1} \times f_{1,2} = -I_2 \omega_2 - r_{1,c_2} \times m_2 v_{c_2} = -[I_2 + m_2(l_{c_2}^2 + l_1 l_{c_2} \cos \theta_2)] \ddot{\theta}_2 \quad (4.59)$$

注意 τ_{int} 是对关节 1 取矩, 并利用 $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$, $\theta_1 = 0$, 式 (4.59) 与式 (4.49) 的第二项相同, 表示两相邻杆的相互作用。

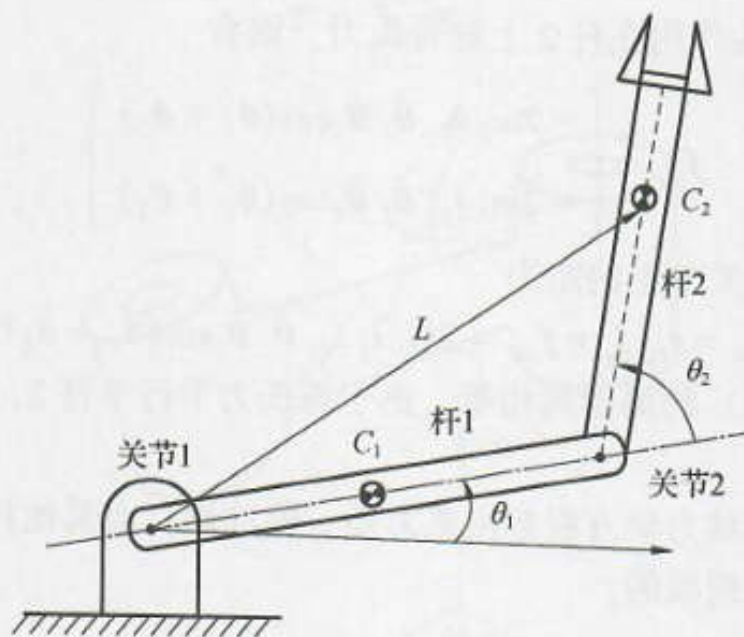


图 4.12 惯量随手臂方位变化

研究式 (4.49) 和式 (4.50) 的第三项, 第三项与关节速度的二次方成正比, 考虑到 $\dot{\theta}_2 = 0$, $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$ 的情况, 如图 4.13 所示, 这时有一个离心力作用在杆 2 上, 令 f_{cent} 为这

个离心力, 其值为

$$|f_{\text{cent}}| = m_2 L \dot{\theta}_1^2 \quad (4.60)$$

式中: L 是重心 C_2 与第一个关节 O_0 的距离, 离心力的方向平行于矢量 $\overrightarrow{O_0 C_2}$, 这个离心力引起绕第二个关节的力矩为 τ_{cent} , 利用式 (4.60) 可求出 τ_{cent} 为

$$\tau_{\text{cent}} = r_{O_0, C_2} \times f_{\text{cent}} = -m_2 l_1 l_{C_2} \dot{\theta}_1^2 \sin \theta^2 \quad (4.61)$$

这与方程式 (4.50) 的第三项一致, 故第三项是由于关节 1 的运动引起的关节 2 上的离心力矩。同理, 当关节 2 以速度 $\dot{\theta}_2$ 旋转时, 有离心力矩作用在关节 1 上。

最后看式 (4.49) 的第四项 $2h \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$, 它与关节速度的乘积成正比。在两个关节同时以 $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ 转动的瞬间, 设杆 1 末端有坐标系 $O_b X_b Y_b$, 如图 4.14 所示。



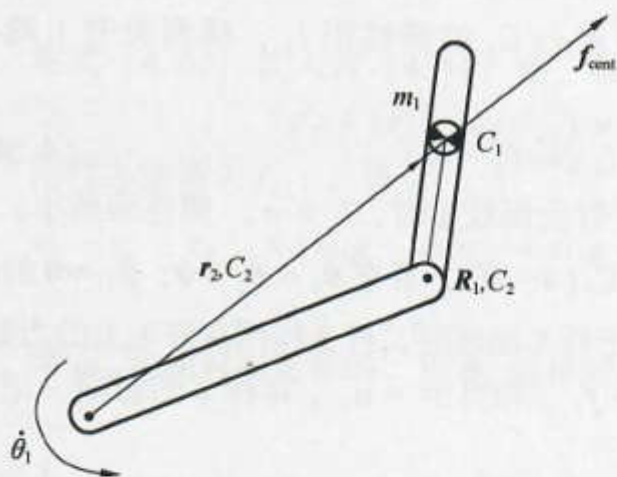


图 4.13 由关节 1 的转动引起的离心力

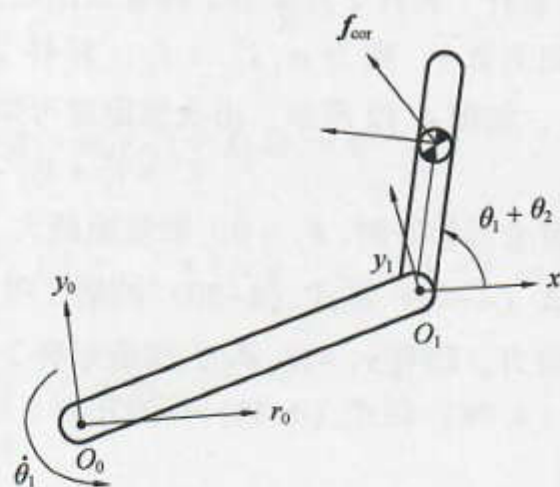


图 4.14 哥氏力的影响

在该瞬间 $O_b X_b Y_b$ 与固定系平行, $O_b X_b Y_b$ 以角速度 $\dot{\theta}_1$ 随杆 1 转动, 杆 2 相对于 $O_b X_b Y_b$ 系以 $\dot{\theta}_2$ 转动, 当质点 m 相对于以角速度 ω 转动的动坐标系以速度 v_b 运动时, 质点具有哥氏力 $2m(\omega \times v_b)$, 令 f_{cor} 为作用在杆 2 上的哥氏力, 则有

$$f_{cor} = \begin{bmatrix} -2m_2 l_{C_2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -2m_2 l_{C_2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

这个哥氏力在第一个关节上的矩为

$$\tau_{cor} = r_{0, C_2} \times f_{cor} = 2m_2 l_1 l_{C_2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (4.63)$$

此式右边与式 (4.49) 的第四项相等, 由于哥氏力平行于杆 2, 所以此力在第二个关节上不产生矩。

因此, 机器人手臂的动力学方程是由重力矩, 惯性矩, 由其他杆件加速度引起的作用力矩、离心力矩和哥氏力矩组成的。

2、拉格朗日运动方程

拉格朗日方法不仅能以最简单的形式求得非常复杂的系统动力学方程，而且具有显式结构，**物理意义比较明确**，对理解机器人**动力学**比较方便。

(1) 拉格朗日函数

拉格朗日函数L的定义是一个机械系统的动能 E_k 和势能 E_p 之差，即

$$L = E_k(q_i, \dot{q}_i) - E_p(q_i, \dot{q}_i)$$

令 $q_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是使系统具有完全确定位置的广义关节变量， \dot{q}_i 是相应的广义关节速度。

(2) 拉格朗日方程

系统的拉格朗日方程为

$$F_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

式中： F_i 称为关节广义驱动力。如果是移动关节，则 F_i 为驱动力；如果是转动关节，则 F_i 为驱动力矩。



(3) 用拉格朗日法建立机器人动力学方程的步骤

1) 选取坐标系，选定完全而且独立的广义关节变量 q_i ， $i=1, 2, \dots, n$ 。

2) 选定相应的关节上的广义力 F_i ，当 q_i 是位移变量时，则 F_i 为力；当 q_i 是角度变量时，则 F_i 为力矩。

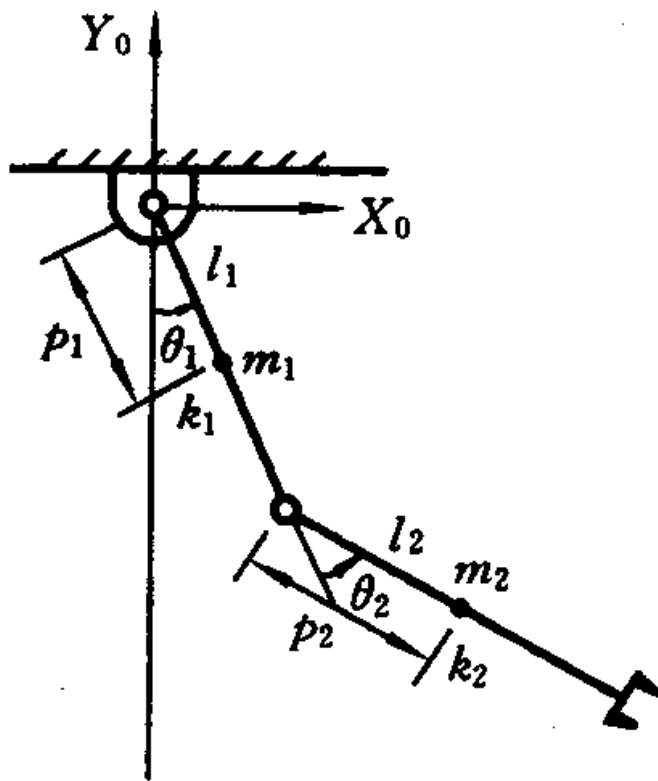
3) 求出机器人各构件的动能和势能，构造拉格朗日函数。

4) 代入拉格朗日方程求得机器人系统的动力学方程。



综合实例：用拉格朗日法建立二自由度平面关节 机器人动力学方程

(1) 广义关节变量及广义力的选定



杆1质心 k_1 的位置坐标为：

$$x_1 = p_1 s_1$$

$$y_1 = -p_1 c_1$$

杆1质心k1的速度平方为：

$$\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = (p_1 \dot{\theta}_1)^2$$

杆2质心k2的位置坐标为：

$$x_2 = l_1 s_1 + p_2 s_{12}$$

$$y_2 = -l_1 c_1 - p_2 c_{12}$$

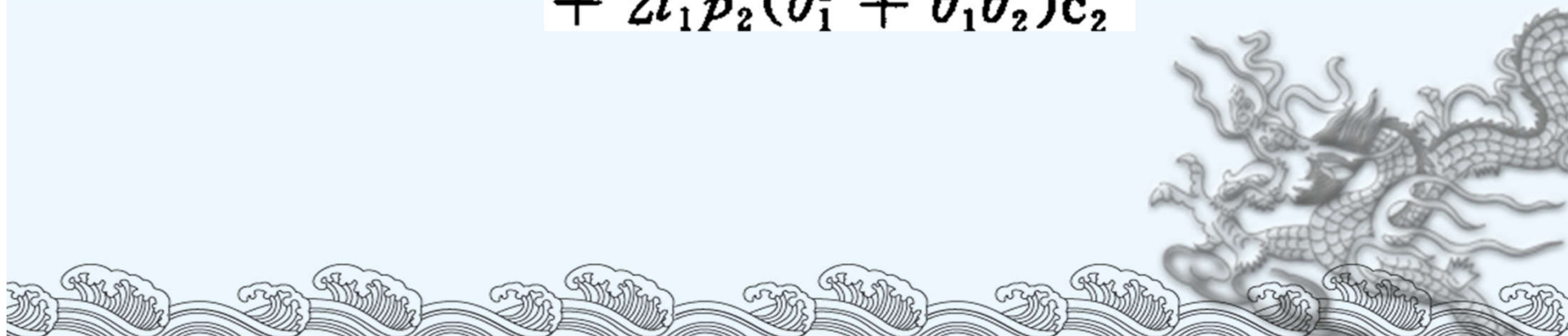


杆2质心k2的速度平方为：

$$\dot{x}_2 = l_1 c_1 \dot{\theta}_1 + p_2 c_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

$$\dot{y}_2 = l_1 s_1 \dot{\theta}_1 + p_2 s_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = & l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + p_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ & + 2l_1 p_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) c_2 \end{aligned}$$



(2) 系统动能

$$E_k = \sum E_{ki}, \quad i = 1, 2$$

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m_1 p_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 p_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ + m_2 l_1 p_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) c_2$$



(3) 系统势能

$$E_p = \sum E_{pi}, \quad i = 1, 2$$

$$E_{p1} = m_1 g p_1 (1 - c_1)$$

$$E_{p2} = m_2 g l_1 (1 - c_1) + m_2 g p_2 (1 - c_{12})$$



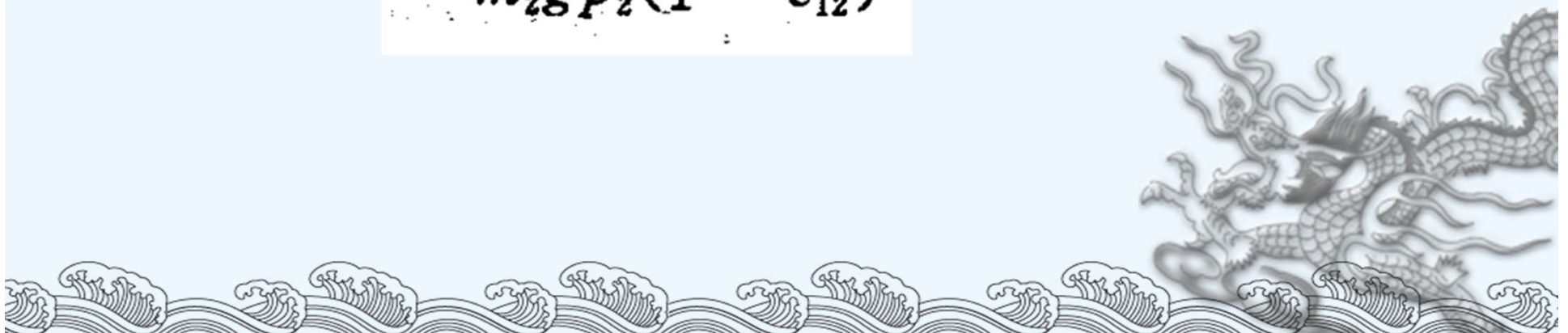
(4) 拉格朗日函数

$$L = E_k - E_p$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 p_1^2 + m_2 l_1^2) \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_1 p_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) c_2$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 p_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 - (m_1 p_1 + m_2 l_1) g (1 - c_1)$$

$$- m_2 g p_2 (1 - c_{12})$$



(5) 系统动力学方程

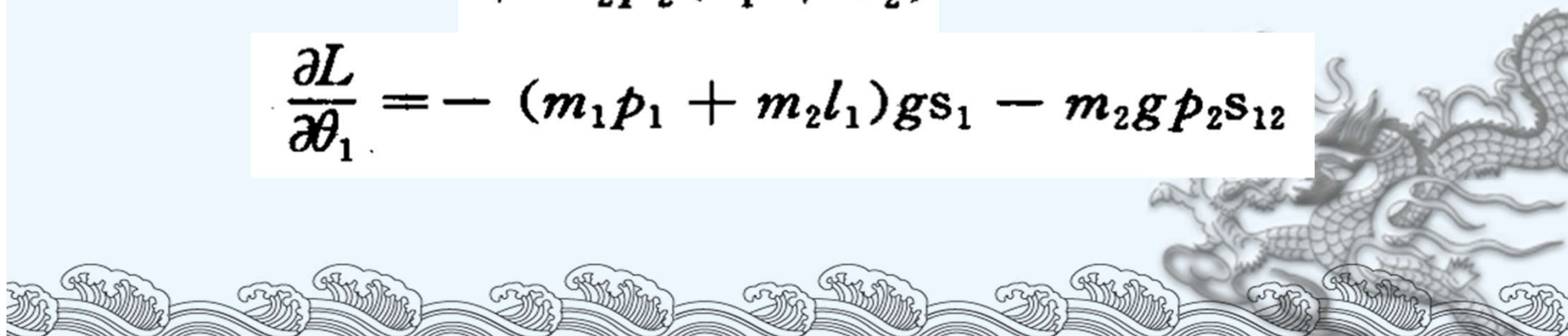
根据拉格朗日方程：

$$F_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

关节1上的力矩 τ_1 计算：

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = & (m_1 p_1^2 + m_2 l_1^2) \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 p_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) c_2 \\ & + m_2 p_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = - (m_1 p_1 + m_2 l_1) g s_1 - m_2 g p_2 s_{12}$$



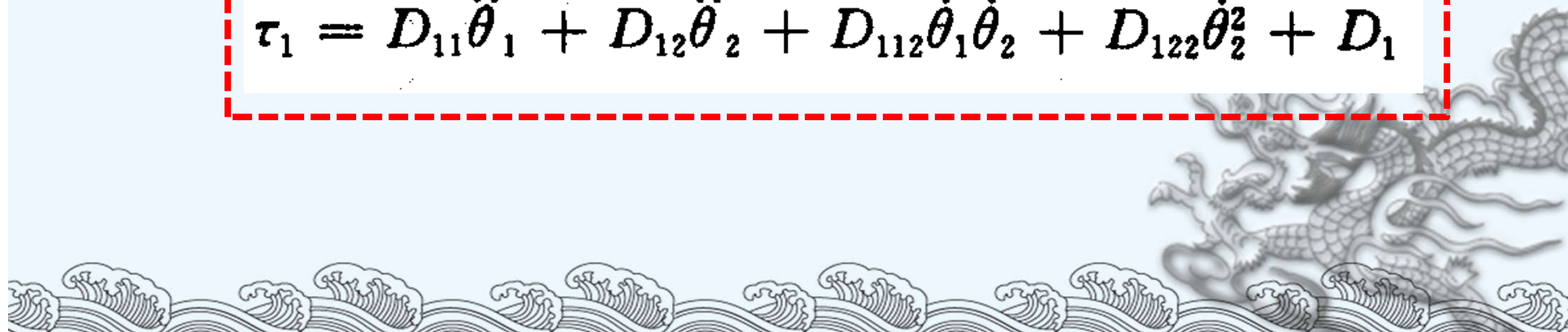
$$\tau_1 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1}$$

$$= (m_1 p_1^2 + m_2 p_2^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 p_2 c_2) \ddot{\theta}_1$$

$$+ (m_2 p_2^2 + m_2 l_1 p_2 c_2) \ddot{\theta}_2 + (-2m_2 l_1 p_2 s_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

$$+ (-m_2 l_1 p_2 s_2) \dot{\theta}_2^2 + (m_1 p_1 + m_2 l_1) g s_1 + m_2 p_2 g s_{12}$$

$$\tau_1 = D_{11} \ddot{\theta}_1 + D_{12} \ddot{\theta}_2 + D_{112} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + D_{122} \dot{\theta}_2^2 + D_1$$



$$\left\{ \begin{array}{l} D_{11} = m_1 \dot{p}_1^2 + m_2 \dot{p}_2^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 \dot{p}_2 c_2 \\ D_{12} = m_2 \dot{p}_2^2 + m_2 l_1 \dot{p}_2 c_2 \\ D_{112} = -2m_2 l_1 \dot{p}_2 s_2 \\ D_{122} = -m_2 l_1 \dot{p}_2 s_2 \\ D_1 = (m_1 \dot{p}_1 + m_2 l_1) g s_1 + m_2 \dot{p}_2 g s_{12} \end{array} \right.$$



关节2上的力矩 τ_2 计算:

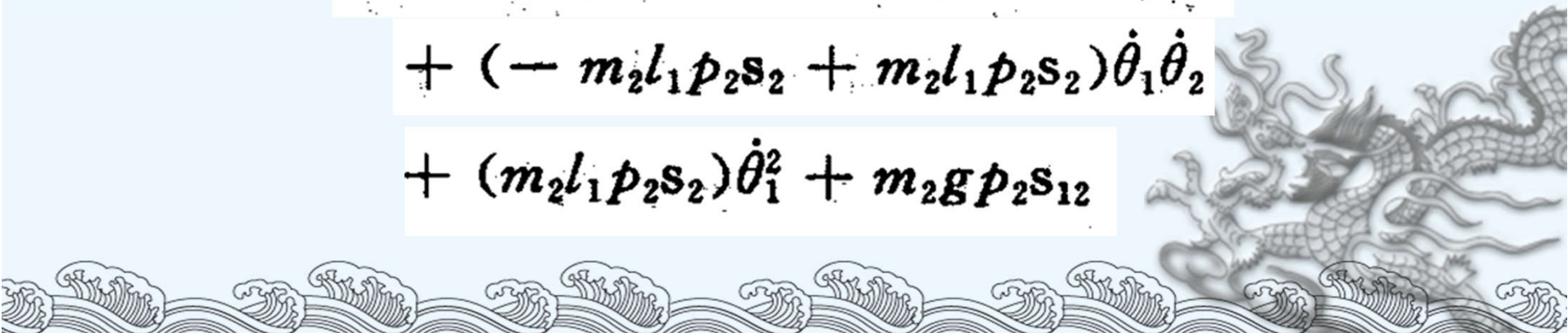
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 p_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_2 l_1 p_2 \dot{\theta}_1 c_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 l_1 p_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) s_2 - m_2 g p_2 s_{12}$$

$$\tau_2 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2}$$

$$= (m_2 p_2^2 + m_2 l_1 p_2 c_2) \ddot{\theta}_1 + m_2 p_2^2 \ddot{\theta}_2$$

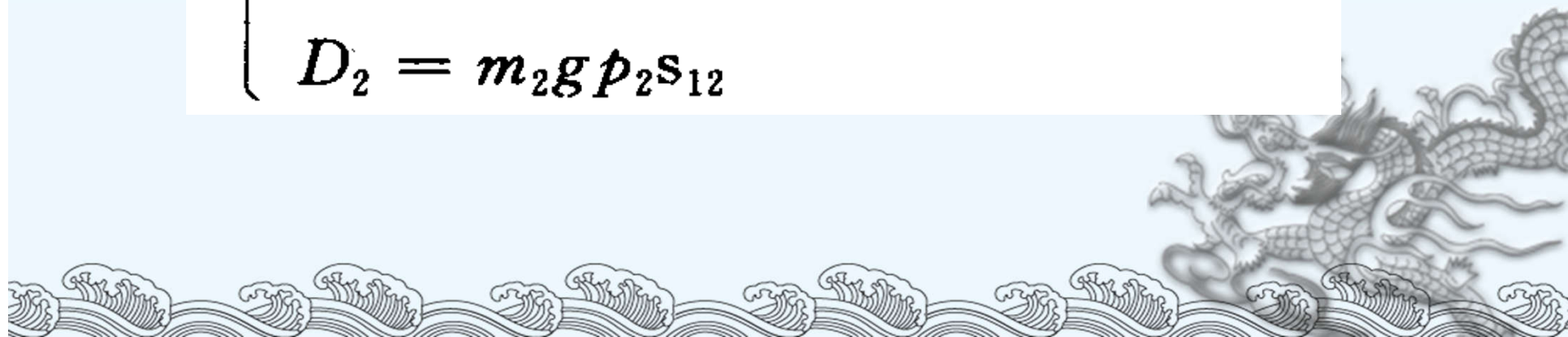
$$+ (-m_2 l_1 p_2 s_2 + m_2 l_1 p_2 s_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

$$+ (m_2 l_1 p_2 s_2) \dot{\theta}_1^2 + m_2 g p_2 s_{12}$$


$$\tau_2 = D_{21}\ddot{\theta}_1 + D_{22}\ddot{\theta}_2 + D_{212}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{211}\dot{\theta}_1^2 + D_2$$

可得

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{21} = m_2 p_2^2 + m_2 l_1 p_2 c_2 \\ D_{22} = m_2 p_2^2 \\ D_{212} = -m_2 l_1 p_2 s_2 + m_2 l_1 p_2 s_2 = 0 \\ D_{211} = m_2 l_1 p_2 s_2 \\ D_2 = m_2 g p_2 s_{12} \end{array} \right.$$



写成矩阵有：

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{111} & D_{122} \\ D_{211} & D_{222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{112} & D_{121} \\ D_{212} & D_{221} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

惯性力

向心力

哥式力

重力



关节驱动力矩与关节位移、速度、加速度之间的关系，即力与运动之间的关系，称为二自由度工业机器人的动力学方程。

$$\tau_1 = D_{11}\ddot{\theta}_1 + D_{12}\ddot{\theta}_2 + D_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{122}\dot{\theta}_2^2 + D_1$$

$$\begin{cases} D_{11} = m_1 p_1^2 + m_2 p_2^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 p_2 c_2 \\ D_{12} = m_2 p_2^2 + m_2 l_1 p_2 c_2 \\ D_{112} = -2m_2 l_1 p_2 s_2 \\ D_{122} = -m_2 l_1 p_2 s_2 \\ D_1 = (m_1 p_1 + m_2 l_1) g s_1 + m_2 p_2 g s_{12} \end{cases}$$

$$\tau_2 = D_{21}\ddot{\theta}_1 + D_{22}\ddot{\theta}_2 + D_{212}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{211}\dot{\theta}_1^2 + D_2$$

$$\begin{cases} D_{21} = m_2 p_2^2 + m_2 l_1 p_2 c_2 \\ D_{22} = m_2 p_2^2 \\ D_{212} = -m_2 l_1 p_2 s_2 + m_2 l_1 p_2 s_2 = 0 \\ D_{211} = m_2 l_1 p_2 s_2 \\ D_2 = m_2 g p_2 s_{12} \end{cases}$$

进行分析可知以下几点：

①含有 $\ddot{\theta}_1$ 或 $\ddot{\theta}_2$ 的项表示由于加速度引起的关节力矩项，其中：

含有D11和D22的项分别表示由于关节1加速度和关节2加速度引起的惯性力矩项；

含有D12的项表示关节2的加速度对关节1的耦合惯性力矩项；

含有D21的项表示关节1的加速度对关节2的耦合惯性力矩项。



②含有 $\dot{\theta}_1$ 和 $\dot{\theta}_2$ 的项表示由于向心力引起的关节力矩项，其中：

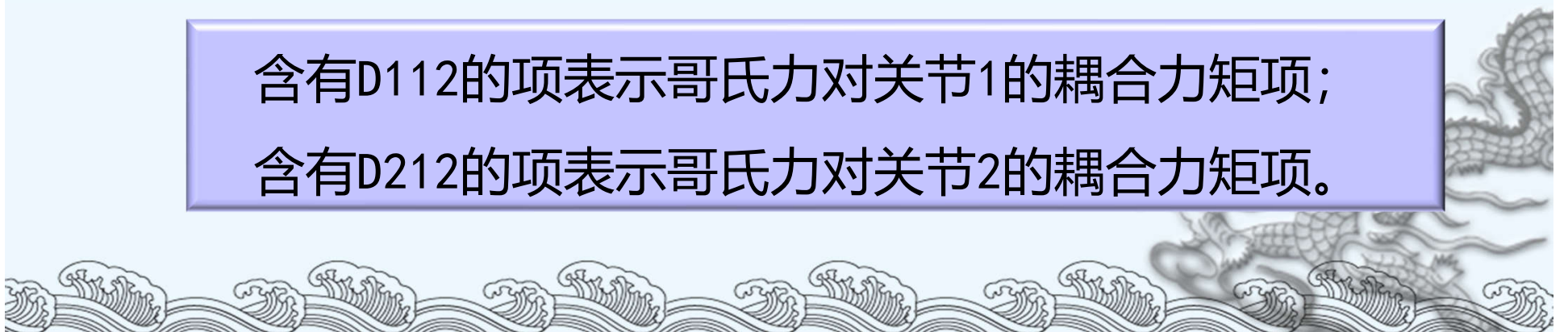
含有 D_{122} 的项表示关节2速度引起的向心力对关节1的耦合力矩项；

含有 D_{211} 的项表示关节1速度引起的向心力对关节2的耦合力矩项。

③含有 $\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$ 的项表示由于哥氏力引起的关节力矩项

含有 D_{112} 的项表示哥氏力对关节1的耦合力矩项；

含有 D_{212} 的项表示哥氏力对关节2的耦合力矩项。



④只含关节变量 θ_1, θ_2 的项表示重力引起的关节力矩项，
其中：

含有D1的项表示连杆1、连杆2的质量对关节1引起的重力矩项；

含有D2的项表示连杆2的质量对关节2引起的重力矩项。



通常有以下几种简化问题的方法：

①当杆件质量不很大，重量很轻时，动力学方程中的重力矩项可以省略。

②当关节速度不很大，机器人不是高速机器人时，含有 $\dot{\theta}_1^2, \dot{\theta}_2^2, \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$ 等项可以省略。

③当关节加速度不很大，也就是关节电机的升降速不是很突然时，那么含 $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$ 的项有可能给予省略。当然，关节加速度的减少，会引起速度升降的时间增加，延长了机器人作业循环的时间。



思考与练习



1. 图 4.20 所示为二自由度机械手, 杆长为 $l_1 = l_2 = 0.5\text{m}$, 试求表 4.1 中 3 种情况下的关节瞬时速度 $\dot{\theta}_1$ 和 $\dot{\theta}_2$ 。

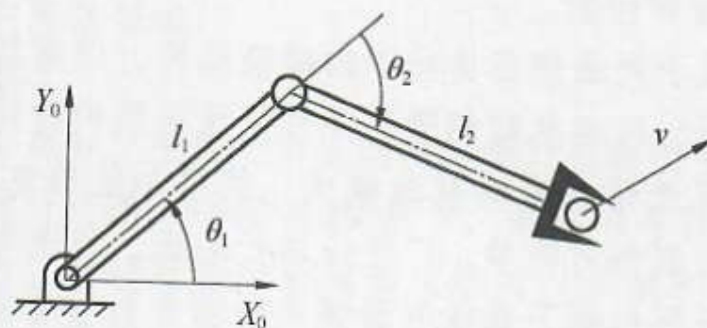


图 4.20 二自由度机械手

表 4.1 末端执行器速度和关节位置

$v_x / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	-1.0	0	1.0
$v_y / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	0	1.0	1.0
θ_1	30°	30°	30°
θ_2	-60°	120°	-30°

思考与练习



3. 图 4.22 所示为一个三自由度机械手，其手部夹持一质量 $m = 10\text{kg}$ 的重物， $l_1 = l_2 = 0.8\text{m}$ ， $l_3 = 0.4\text{m}$ ， $\theta_1 = 60^\circ$ ， $\theta_2 = -60^\circ$ ， $\theta_3 = -90^\circ$ 。若不计机械手的重量，求机械手处于平衡状态时各关节力矩。

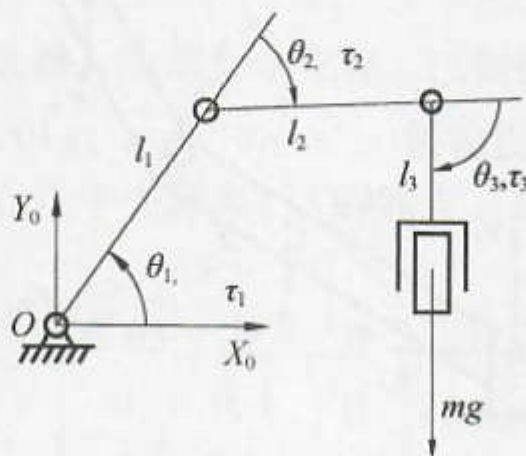


图 4.22 三自由度机械手

思考与练习



8. 二连杆机器人如图 4.27 所示。连杆长度为 d_i ，质量为 m_i ，重心位置为 $(0.5d_i, 0, 0)$ ，连杆惯量为 $I_{zzi} = \frac{1}{3}m_id_i^2$ ， $I_{yyi} = \frac{1}{3}m_id_i^2$ ， $I_{xxi} = 0$ ，传动机构的惯量为 $I_{ai} = 0 (i = 1, 2)$ 。用拉格朗日矩阵法确定动力学方程的参数 D_{ij} ， D_{ijk} ， D_i 。

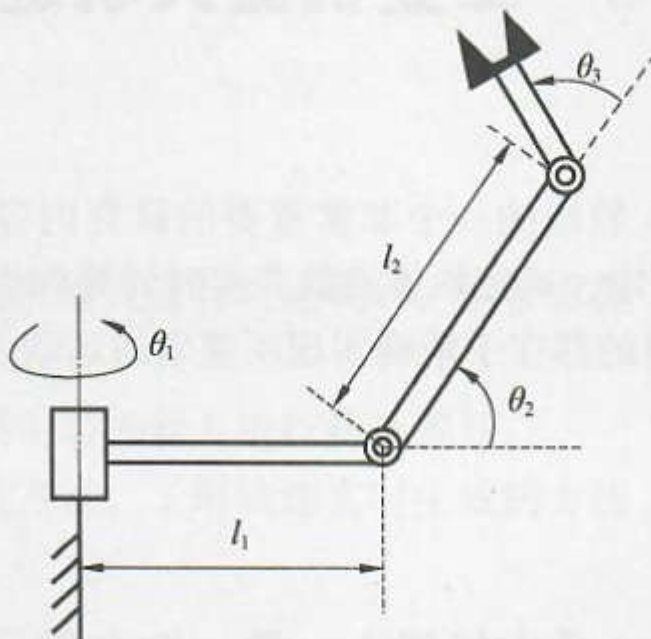


图 4.27 二连杆机器人

思考与练习



9. 试求图 4.28 所示三连杆机器人的动力学方程。已知机器人参数如下： $l_1 = l_2 = 0.5\text{m}$, $m_1 = 4.6\text{kg}$, $m_2 = 2.3\text{kg}$, $m_3 = 1.0\text{kg}$, $g = 9.8\text{m/s}^2$, 假设连杆 1 和 2 的质量都集中在其连杆的末端（远端），而连杆 3 的质心位于坐标系 {3} 的原点，即在连杆 3 的近端上，连杆 3 的惯量矩阵为

$${}^3I = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

决定两个质心位置与每个连杆坐标系的关系为 ${}^1p_{C_1} = l_1 X_1$, ${}^2p_{C_2} = l_2 X_2$, ${}^3p_{C_3} = 0$ 。

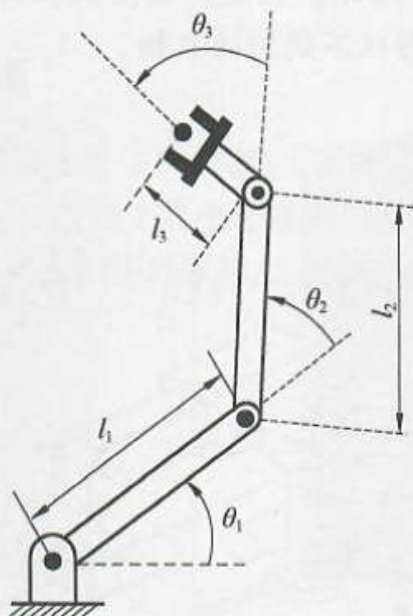
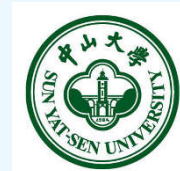


图 4.28 三连杆机器人

思考与练习



上述4道题目

10月10日前交！

命名规则：姓名_学号_第四章作业

robotics2019@163.com

