

Este es el primer parcial del curso *Árboles y Grafos*, 2025-1. El examen tiene 6 preguntas: otorga un total de 67 puntos y 8 puntos de bono. El examen será evaluado sobre puntos. El examen es *individual* y debe ser desarrollado a mano. No puede usar el computador ni ningún otro dispositivo electrónico; no puede hablar, chatear o compartir sus soluciones con sus compañeros. Adicionalmente, no puede sacar ningún tipo de material en papel y solo puede usar durante el parcial las hojas de cuadernillo entregadas por el profesor. Si necesita una hoja adicional para hacer anotaciones puede solicitarla. Tenga en cuenta los puntos de cada pregunta y planifique adecuadamente su tiempo. El parcial tiene una duración de 140 minutos.

Nombre y código: \_\_\_\_\_

Pregunta	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos	13	15	15	16	8	0	67
Puntaje							

### Dividir y Conquistar [13 pts.]

1. (13 puntos) Considere el siguiente problema:

Zlatan acaba de iniciar un negocio de transcripción de textos y ha contratado empleados para que realicen esta labor. Zlatan necesita transcribir  $M$  textos (enumerados de 1 a  $M$ ), cada uno con un total de páginas  $p_1, p_2, \dots, p_M$  y ha contratado un total de  $K$  empleados que trabajarán en diferentes turnos. Los textos deben ser transcritos en orden, es decir, desde el texto 1 hasta el texto  $M$  y por cuestiones de estética, cada texto debe ser transcrita por un solo empleado. Se puede asumir que cada empleado tarda 1 minuto por cada página transcrita y cada empleado trabajará un único turno y el tiempo de dicho turno estará determinado por la cantidad de páginas de los textos que tuvo que transcribir. No es posible que un trabajador tenga su turno dividido en dos partes. Por cuestiones de reglamentación laboral, a Zlatan le gustaría determinar una forma de asignar los textos a los empleados de tal forma que se minimice la máxima cantidad de minutos que trabaja cualquier empleado.

Si por ejemplo,  $M = 9$  y  $K = 3$  y el número de páginas de los textos está dado por la lista  $[100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900]$ , en la solución esperada, el empleado con más minutos trabajará 1700 minutos y en la asignación de textos el primer empleado transcribirá los textos 1, 2, 3, 4 y 5, el segundo empleado transcribirá los textos 6 y 7 y el último empleado se encargará de los textos 8 y 9.

Implemente una solución a este problema e indique su complejidad. Explique.

**Grafos [30 pts.]**

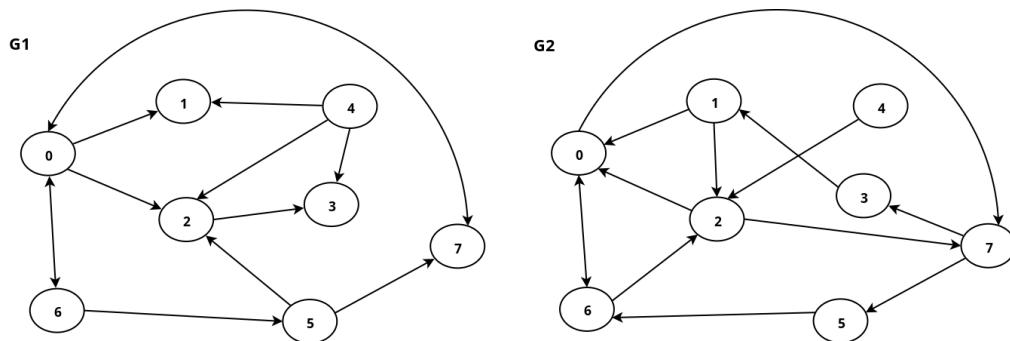
2. (15 puntos) Considere la operación **Eex** que recibe dos grafos dirigidos  $G_1$  y  $G_2$  que contienen los mismos vértices pero las aristas podrían diferir y produce como resultado un grafo con los mismos vértices en el que habrá una arista  $(u, v)$  si dicha arista está en  $G_1$  pero no en  $G_2$  o está en  $G_2$  pero no en  $G_1$ . Formalmente, sean  $G_1 = (V, E_1)$  y  $G_2 = (V, E_2)$ , la operación **Eex** se define así:

$$G_1 \text{ Eex } G_2 = (V, E')$$

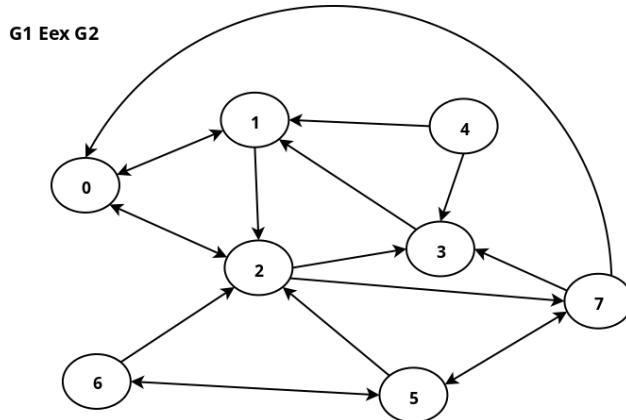
tal que:

$$E' = \{(u, v) | ((u, v) \in E_1 \wedge (u, v) \notin E_2) \vee ((u, v) \notin E_1 \wedge (u, v) \in E_2)\}$$

Para ejemplificar esta operación, considere dos grafos como los siguientes:



El grafo que se obtiene al aplicar la operación es el siguiente:



En este grafo es posible apreciar, por ejemplo, que las aristas  $(0, 6)$ ,  $(6, 0)$  y  $(0, 7)$  están tanto en  $G_1$  como en  $G_2$  y por eso dichas aristas no aparecen en  $G_1 \text{ Eex } G_2$ , mientras que una arista como  $(7, 3)$  no está en  $G_1$  pero si en  $G_2$  y por eso aparece en  $G_1 \text{ Eex } G_2$ .

Escriba un programa que reciba el grafo  $G_1$  representado con listas de adyacencia y el grafo  $G_2$  representado con matrices de adyacencia y produzca como resultado el grafo  $G_1 \text{ Eex } G_2$ . Usted es libre de elegir cuál será la representación del grafo  $G_1 \text{ Eex } G_2$ .

3. (15 puntos) Considere el siguiente problema:

You are Ash, the famous Pokemon trainer. To become the greatest Pokemon master, you travel through regions battling against gym leaders and entering Pokemon League competitions. With your welltrained Pikachu, Squirtle and Bulbasaur, you have already captured six badges! What a marvellous performance!

Now, you are walking through the Enchanted Forest, where the most powerful Pokemons live . . . No, not those giant dragons; we are actually talking about Jigglypuffs. A Jigglypuff is a normal-type Balloon Pokemon, with a round, balloon-like body, a tuft of fur on its forehead, and stubby arms and legs. What's so powerful of them? Well, do you notice that microphone in the picture? That's right, Jigglypuff has a well-regarded singing voice, and its most popular attack is to sing its opponent to sleep! Therefore, it is always a good idea to find a route avoiding places wherever you might hear the Jigglypuffs' lullaby.

Q				♪	♪	♪
		X		♪	J	♪
			X	♪	♪	♪
	X	X				
				♪	♪	♪
				♪	J	♪



Let us model the situation as follows: we shall treat the forest as a rectangular grid. Your starting position is at the top left corner of the grid  $(1, 1)$ , and you will leave the forest at the lower right corner  $(R, C)$ . There might be blocked areas which you are not allowed to trespass through. Jigglypuffs might be present at some cells. The loudness  $L$  of each Jigglypuff is given, which means that places no more than  $L$  units in any direction away from the Jigglypuff are considered “dangerous” and should be avoided.

Escriba un algoritmo que resuelva este problema. El algoritmo debe recibir el tablero de dimensiones  $R \times C$  y un arreglo de  $N$  tripletas  $(r_i, c_i, l_i)$  que indican las coordenadas  $(r_i, c_i)$  de la ubicación de cada Jigglypuff en el mapa y su *loudness*.

### Complejidad y Análisis [24 pts.]

4. (16 puntos) Considere el siguiente algoritmo:

```
def algoritmo(A):
    ans = []
    i = 0
    ac = 0
    while i < len(A):
```

```
ans.append(ac * A[i])
ac = max(ac, A[i])
i = i + 1
return ans
```

Indique qué calcula este algoritmo y realice el análisis de la correctitud del mismo siguiendo los pasos vistos en clase.

5. (8 puntos) Demuestre o refute la siguiente afirmación:

$$7n^2 + 6n \in O(5n^2 \log n)$$

6. (8 +) **Bonus:** Demuestre la siguiente propiedad:

$$h \in O(g) \wedge g \in O(f) \Rightarrow h \in O(f)$$