

Este es el segundo parcial del curso *Árboles y Grafos*, 2024-2. El examen tiene 5 preguntas: otorga un total de 62 puntos y 10 puntos de bono. El examen será evaluado sobre 62 puntos. El examen es *individual* y debe ser desarrollado a mano. No puede usar el computador ni ningún otro dispositivo electrónico; no puede hablar, chatear o compartir sus soluciones con sus compañeros. Adicionalmente, solo puede sacar durante el parcial las dos hojas de algoritmos escritos a mano de acuerdo a las indicaciones dadas en clase. Además de esto no puede sacar ningún tipo de material adicional en papel y solo puede usar durante el parcial las hojas de cuadernillo entregadas por el profesor. Si necesita una hoja adicional para hacer anotaciones puede solicitarla. Tenga en cuenta los puntos de cada pregunta y planifique adecuadamente su tiempo. El parcial tiene una duración de 140 minutos.

Nombre y código: _____

Pregunta	1	2	3	4	5	Total
Puntos	12	19	15	16	0	62
Puntaje						

Conceptos Teóricos Conectividad y Caminos más Cortos [12 pts.]

1. Responda los siguientes ítems:

- (a) (6 puntos) Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido y sean C_1 y C_2 dos componentes fuertemente conexos distintos de G . Si $u, v \in C_1$, $w, x \in C_2$ y existe un camino que conecta u con w , es posible que exista un camino que conecte v con x ? Explique.
- (b) (6 puntos) Explique por qué el algoritmo de Dijkstra solo puede ser utilizado cuando los pesos de las aristas no son negativos. De un ejemplo de lo que podría ocurrir cuando se ejecuta el algoritmo con un grafo con pesos negativos.

Algoritmos Conectividad y Caminos más Cortos [50 pts.]

2. Considere el siguiente problema:

¡Los precios de los vuelos están locos! El costo de un boleto está determinado por numerosos factores y, por lo general, no está directamente relacionado con la distancia recorrida. Muchos viajeros intentan ser creativos, a veces utilizando solo partes de boletos con escalas en varias ciudades para lograr un viaje de menor costo. Sin embargo, las aerolíneas están al tanto de este comportamiento y generalmente requieren que el viaje cubierto por un boleto se complete en orden y sin trayectos intermedios. Por ejemplo, si tienes un boleto para viajar de Ciudad-1 a Ciudad-2 y luego a Ciudad-3, no se te permite usar solo la parte del boleto para viajar de Ciudad-2 a Ciudad-3. Siempre debes comenzar en la primera ciudad del boleto. Además, no está permitido viajar de Ciudad-1 a Ciudad-2, volar a otro lugar y luego regresar para continuar tu viaje de Ciudad-2 a Ciudad-3.

Consideremos un ejemplo. Supongamos que se le permite comprar tres tipos de boletos:

Boleto #1: Ciudad-1 a Ciudad-3 a Ciudad-4 \$225.00 Boleto #2: Ciudad-1 a Ciudad-2 \$200.00 Boleto #3: Ciudad-2 a Ciudad-3 \$50.00

Suponga que desea viajar de Ciudad-1 a Ciudad-3. Hay dos maneras de llegar usando solo las opciones de boletos disponibles:

Comprar el Boleto #1 por \$225.00 y usar solo el primer tramo del boleto. Comprar el Boleto #2 por \$200.00 y el Boleto #3 por \$50.00. La primera opción es la más barata.

Dada una serie de ofertas de boletos de avión y un itinerario de viaje, debe determinar cuáles boletos comprar y en cuál orden para minimizar el costo del viaje. Los boletos de avión pueden incluir cualquier cantidad de escalas y el itinerario puede incluir cualquier cantidad de ciudades.

- (a) (3 puntos) Explique por qué con los datos suministrados no es posible obtener directamente la respuesta.
- (b) (7 puntos) Indique los elementos que considera se deben tener en cuenta en los estados y para un estado arbitrario cuáles serían las posibles transicciones. Explique.
- (c) (6 puntos) Proponga un ejemplo de datos de entrada y muestre cómo luciría el grafo de estados para dicho ejemplo.
- (d) (3 puntos) ¿cuál sería el algoritmo o los algoritmos más apropiados para resolver el problema? Explique.

3. (15 puntos) Considere el siguiente problema:

A set of laboratory mice is being trained to escape a maze. The maze is made up of cells, and each cell is connected to some other cells. However, there are obstacles in the passage between cells and therefore there is a time penalty to overcome the passage. Also, some passages allow mice to go one-way, but not the other way round.

Suppose that all mice are now trained and, when placed in an arbitrary cell in the maze, take a path that leads them to the exit cell in minimum time.

We are going to conduct the following experiment: a mouse is placed in each cell of the maze and a count-down timer is started. When the timer stops we count the number of mice out of the maze.

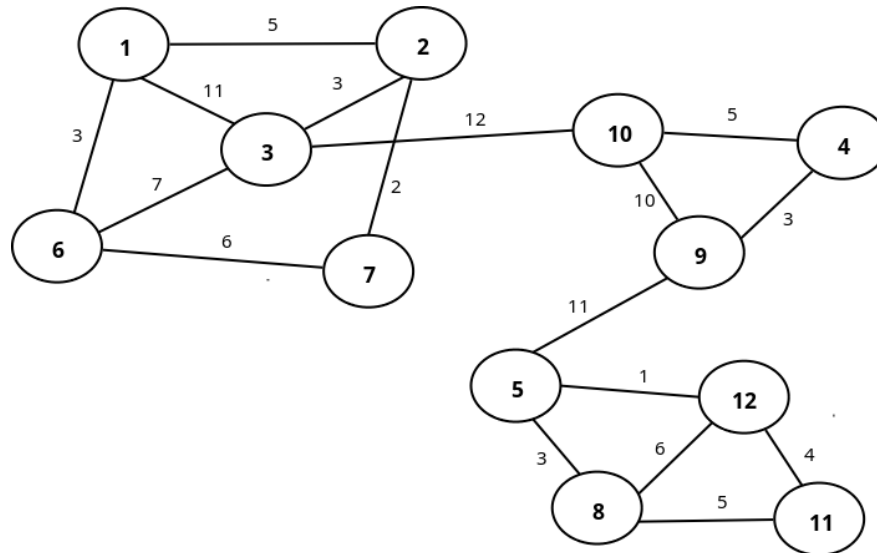
Write a program that, given a description of the maze and the time limit, predicts the number of mice that will exit the maze. Assume that there are no bottlenecks in the maze, i.e. that all cells have room for an arbitrary number of mice.

Especifique el problema y escriba un algoritmo que resuelva este problema. Indique y explique la complejidad de su solución.

4. (16 puntos) Considere el siguiente problema:

En el AGRAdable y AGRAndado Imperio de Zlatan hay estaciones de tren conectadas por vías en las que los trenes transitan en ambas direcciones. Para cada vía el paso de un tren por ella genera algunos costos relacionados a la energía empleada por el tren y por el sistema

en general. Las ciudades corresponden a agrupaciones de estaciones que están comunicadas entre si por una única vía. El siguiente gráfico muestra una parte del imperio:



En el gráfico se observan 3 ciudades. La primera ciudad está compuesta por las estaciones 1, 3, 2, 6 y 7. La segunda ciudad está compuesta por las estaciones 10, 4 y 9 y la tercera ciudad está compuesta por las ciudades 5, 12, 8 y 11.

La estación más importante del imperio es conocida como la estación central del imperio. Desde esa estación se coordina el funcionamiento de todo el sistema. En algunos procesos administrativos se requiere usar una estación en cada ciudad como la estación principal de la ciudad. Zlatan quiere elegir entre las estaciones de cada ciudad la estación que será la estación principal. La estación principal será la estación de cada ciudad en la que el costo de llegar desde la estación central sea lo menor posible. Se requiere determinar para cada ciudad un identificador, el número de la estación principal y el costo requerido para llegar a ella desde la estación central.

Si en el gráfico anterior se asume que la estación central del imperio es la estación 7 entonces la salida debería indicar que la estación principal de la primera ciudad debe ser la estación 2 para la cuál el costo es 2. La estación principal de la segunda ciudad debe ser la estación 10 para la cuál el costo es 17. En tanto que la estación principal de la tercera ciudad debe ser la estación 5 y su costo es 36.

Zlatan necesita su ayuda y estará muy AGRAdecido por la colaboración. Especifique el problema y escriba un algoritmo que resuelva este problema. Indique y explique la complejidad de su solución.

5. (10 +) Elija uno de los siguientes ejercicios:

Opción 1: Escriba un algoritmo que reciba un grafo y use una versión modificada del recorrido primero en profundidad para determinar para cada arista qué rol cumplió durante el recorrido (*tree edge*, *back edge*, *forward edge*, *cross edge*).

Opción 2: Demuestre la siguiente propiedad:

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido con una función de peso $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $p = v_0, v_1, \dots, v_k$ un camino más corto de v_0 a v_k entonces todos los subcaminos de p son también caminos más cortos.