Informe Proyecto Final

Juliana Sánchez Gómez

Entrega: Noviembre 5, 2024

Universidad Pontificia Javeriana Cali
Arboles y grafos
Carlos Ramirez

Índice

1. Descripción general del problema.

El problema exige encontrar la mejor manera de distribuir los impuestos de una serie de ciudades en el imperio de Zlatan, donde cada ciudad tiene su impuesto natural y puede sumarsele el impuesto de las calles que conecten con ella. Las calles tienen todas una longitud indicada, de manera que el impuesto de cada una de ellas es la longitud multiplicada por la cantidad de parejas de ciudades que se desconectasen si esa vía se cerrara. Así, el precio a pagar por cada calle (que podría ser 0 en el caso de que al clausurar esa ruta ninguna ciudad se desvinculara) se asignará a una y solo una de las dos ciudades que esta ruta conecte. La pregunta es entonces, ¿A cual ciudad se le asignará el impuesto de la calle?. Esto debe hacerse de manera que, después de asignados todos los impuesto, el valor a pagar de la ciudad con el mayor impuesto deberá ser el menor posible. Así pues si en un caso la ciudad que más debe pagar tiene un impuesto de 50 y se encuentra otra manera de distribiur en la que el valor mayor a pagar sea 40, entonces esa distribución será una mejor opción.

2. Especificación del problema.

2.1. Entrada.

Recibe un grafo no dirigido $G = (V, E)$ con una función de peso $w : E \to R$

- V es el conjunto de Ciudades del imperio (Nodos),
- E es el conjunto de calles entre las ciudades (Aristas).

La función de peso para las calles (aristas), $w : E \to R$, donde $w(e) = h_e$ es el peso asociado a cada calle (arista), es decir la longitud de ella. $e \in E$.

- $A = [a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}]$ **:** Siendo a_i el impuesto natural de cada ciudad identificada con el índice $i \in N$

  $$i < 0 < n$$

  y es $n \in N$ correspondiente a $|V|$.

2.2. Salida.

El algoritmo devuelve $c \in N$,
siendo c el valor a pagar por la ciudad que tenga el mayor impuesto asignado en la mejor distribución (la más óptima), haciendo que así el impuesto total más alto en una ciudad sea el menor posible.

3. Casos de Prueba

3.1. Caso de prueba 1

- **Entrada:**

```
10 9
15 20 10 7 14 1 2 3 4 12
1 4 9
1 2 3
1 8 13
1 3 1
1 5 8
5 6 5
8 7 7
8 9 2
9 10 4
```

- **Salida esperada:**

```
Case #1: The highest tax that must be paid to Emperor Zlatan is 315.
```

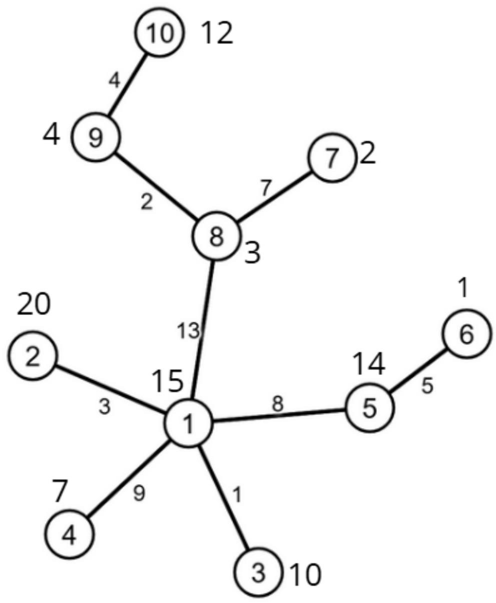

Figura 1: Grafo del Caso de Prueba 1.

- **Explicación:** En este caso particular todas las calles desconectarían almenos alguna ciudad si se clausurara, así pues el arbol por el que se va a trabajar sería ese mismo. La arista que genera el mayor valor a asignar es aquella entre la ciudad 8 c_8 y la ciudad 1 c_1, valor que surge de $4 \times 6 \times 13 = 312$, valor que se otorga a c_8, y dando así la salida de 315, pues todas las demás asignaciones son finalmente menores a esta.

3.2. Caso de prueba 2

- **Entrada:**

```
14 16
20 1 14 2 15 40 50 4 20 1 39 50 51 31
1 2 7
2 11 45
2 10 13
11 10 5
10 9 4
9 12 5
9 8 11
9 4 18
12 13 7
12 14 65
13 14 9
3 4 2
4 7 8
8 7 6
7 5 11
5 6 40
```

- **Salida esperada:**

```
Case #2: The highest tax that must be paid to Emperor Zlatan is 279.
```

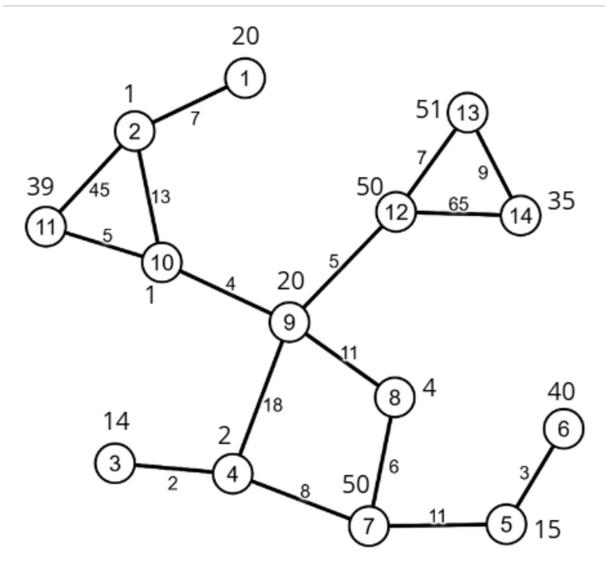

Figura 2: Grafo del Caso de Prueba 2.

- **Explicación:** El grafo que se analiza en este caso genera un bosque, en el que se puede analizar cada arbol como un caso por separado. Uno de los puentes es la arista que conecta la ciudad 12 con la ciudad 9 y aquella que conecta la ciudad 9 con la 20, generando un pequeño arbol de 3 nodos entre ellas. Igualmente pasa con la calle que conecta la ciudad 7 con la ciudad 5 y aquella que se encuentra entre la ciudad 5 la ciudad 6. Forma otro pequeño arbolito de 3 nodos. El peso de la arista de la c_5 y la c_7 es de $12 \times 2 \times 11 = 264$, que asignada a la ciudad 5 toma un valor total de 279. Justamente mi salida.

3.3. Caso de prueba 3

- **Entrada:**

```
9 10
4 53 90 69 23 5 34 21 9
1 2 4
2 3 7
3 4 2
4 5 6
5 6 19
6 7 12
7 8 4
8 9 1
9 1 3
```

- **Salida esperada:**

```
Case #3: The highest tax that must be paid to Emperor Zlatan is 90.
```

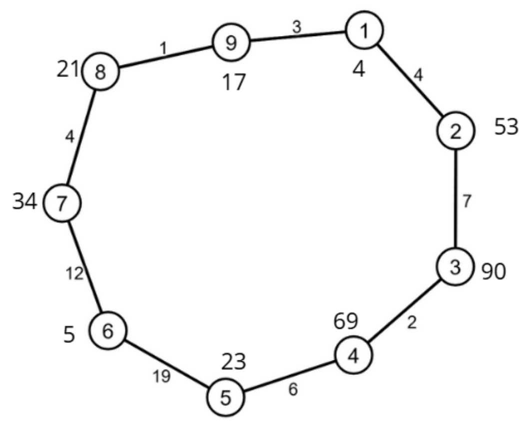

Figura 3: Grafo del Caso de Prueba 3.

- **Explicación:** La forma en la que se organiza este imperio hace que no haya ninguna ciudad que quede desconectada al clausurar alguna calle, lo que haría que no haga falta asignar ningún impuesto extra a los nodos, así pues la salida es simplemente la ciudad con el impuesto natural mas alto, en este caso la ciudad 3.

4. Explicación general de la estrategia de solución

Para determinar los impuestos de cada calle en particular, se encuentran los componentes conexos, ubicando los puentes y ocultándolos en un siguiente recorrido. Estos componentes conexos conectados entre sí através de los puentes forman un nuevo grafo con la forma de un arbol. Se guardaría en cada nuevo nodo el número de ciudades que haya en dicho componente. Las aristas que conecten estos componentes conexos serán la calles que tendrán un impuesto diferente de 0.

Para contar las parejas desconectadas se hará un recorrido del grafo de componentes por un lado de la desconección, sumando los valores guardados en cada nodo, es decir la cantidad de ciudades por componente. De esta manera para conocer la cantidad de ciudades del otro lado de la desconección se debe hacer también un corrido, no se debería simplemente restar el valor recientemente encontrado al total N (Número de ciudades en el imperio) pues podrían haber ciudades no contadas en el primer componente que ya se hallaban previamentee desconectadas y no deberían incluirse. Despúes de encontrados ambos valores se multiplican y este impuesto extra, multiplicado también por la longitud determinada otorgará el impuesto de dicha calle.

4.1. Primera Idea

En un primer lugar se consideró el decidir como asignar el impuesto de cada calle con una simulación de todas las posibilidades, lo que hubiera generado una complejidad de 2^m siendo m el número de puentes (calles con impuesto). Justamente por todo este gasto se descartó.

4.2. Segunda Idea

Como segunda idea se consideraba el impuesto a asignar de mayor valor, y entre las dos ciudades(nodos) correspondientes a dicha calle, se le asignaba este impuesto a la ciudad que entre los dos tuviese un impuesto natural menor, así, se procedía con el siguiente mayor impuesto a asignar y se aplicaba la misma lógica. Se procedía de la misma forma hasta asignar el último. Esta idea rápidamente se descartó pues se generaron casos en los cuales fallaba.

El peso que se debe asignar de la calle entre la ciudad 1 (c_1) y la ciudad 3 (c_3) es de $2 \times 1 \times 2 = 4$, así mismo el valor de la calle entre c_1 y c_2 es de $2 \times 1 \times 4 = 8$. Según la lógica descrita se debería asignar primero el segundo impuesto calculado, el "8", al c_1, pues su impuesto natural 2 es menor al de c_2 3. De esta manera el impuesto ahora asignado a c_1 es de 10. Se puede ver ahora que cuando se quiera asignar el impuesto de la calle entre c_3 y c_1 se le otorgará a c_1 pues 10 es menor a 13 (impuesto natural de c_3). Mi salida en este caso sería igual a 14, lo que es incorrecto, pues si le hubiese otorgado el 8 a c_2 y el 4 a c_1 la salida sería 13, definitivamente diferente y mejor que la recientemente calculada.

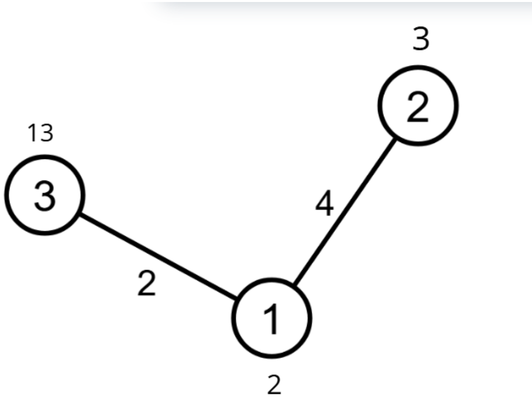

Figura 4: Caso que falla.

4.3. Tercera Idea

Se planteó un proceso de asignación recorriendo el bosque que queda de solo las ciudades conectadas con calles que sean puentes, de manera que parta desde cualquier ciudad hoja, es decir desde cualquier ciudad que tenga una sola adyacencia. Este recorrería arista por arista asignando los impuestos basado en valor del impuesto natural de cada ciudad extremo, asegurandóse que sea el menor entre ambos, de esta manera cuando llegara a todas las demás hojas, se devolviera reevalueando y escogiendo la mejor opción. Se podrá ver como en un arbol donde cada nodo no tenga mas de 2 aristas adyacentes a él esta lógica plateada daría una salida correcta, pero basta con asumir un nodo de varías adyacencias.

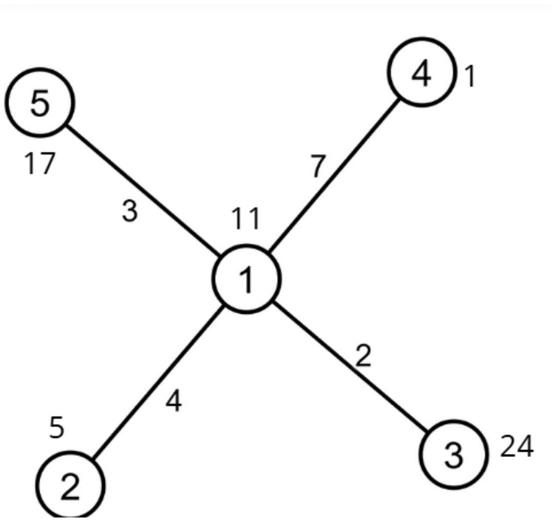

Figura 5: Caso que falla.

El peso de la calle entre c_1 y c_2 es de $4 \times 1 \times 4 = 16$, la calle entre c_1 y c_3 es de $4 \times 1 \times 2 = 8$, luego la calle entre c_1 y c_4 es de $4 \times 1 \times 7 = 28$ y por último la calle entre c_1 y c_5 es de $4 \times 1 \times 3 = 12$. De esta menera plateemos comenzar desde c_2, que asignaría el peso de 16 a c_2 pues tiene un impuesto natural claramente menor al de c_1, así quedaría con un valor de 21. Se procede con la primera bifurcación de c_1, la arista entre ella misma y c_5, por lo que siendo 11 menor que 17, se le otorgará el impuesto de 12 al de 11, quedando así de 23. La calle entre c_1 y c_4 se asigna a c_4 y finalmente, la arista entre c_3 y c_1, con un peso de 8 se le otorgará a c_1, dejando una salida de 31. Lo que es incorrecto pues si se le hubiese asignado el 8 a c_1 y el 12 a c_5 la salida sería 29, mejor y difente a la propuesta.

4.4. Cuarta Idea actualmente en desarrollo

Despúes de hallados los arboles con los puentes y los componentes conexos se trata de seguir una lógica en la que prioriza al nodo que tenga menos adyacencias, y de alguna manera cada vez que asigne un valor y reduciendo las aristas. Trabajar con dependencias.