

Este es el examen final del curso *Árboles y Grafos*, 2024-2. El examen tiene 5 preguntas: otorga un total de 58 puntos y 10 puntos de bono. El examen será evaluado sobre 58 puntos. El examen es *individual* y debe ser desarrollado a mano. No puede usar el computador ni ningún otro dispositivo electrónico; no puede hablar, chatear o compartir sus soluciones con sus compañeros. Adicionalmente, solo puede sacar durante el parcial las dos hojas de algoritmos escritos a mano de acuerdo a las indicaciones dadas en clase. Además de esto no puede sacar ningún tipo de material adicional en papel y solo puede usar durante el parcial las hojas de cuadernillo entregadas por el profesor. Si necesita una hoja adicional para hacer anotaciones puede solicitarla. Tenga en cuenta los puntos de cada pregunta y planifique adecuadamente su tiempo. El parcial tiene una duración de 140 minutos.

Nombre y código: \_\_\_\_\_

Pregunta	1	2	3	4	5	Total
Puntos	12	16	14	16	0	58
Puntaje						

### Conceptos Teóricos[12 pts.]

1. Responda los siguientes ítems:

- (a) (6 puntos) De los algoritmos sobre árboles y grafos vistos a lo largo del curso de Árboles y Grafos 2024-2, ¿cuál es el algoritmo que más le gusta o que más le impresiona? Explique objetivamente su respuesta.
- (b) (6 puntos) ¿Por qué solo es posible usar árboles de Fenwick para realizar consultas sobre rangos de una secuencia sobre una función reversible? Explique.

### Algoritmos Grafos y Árboles [50 pts.]

2. (16 puntos) Considere el siguiente problema:

The Department of National Defence (DND) wishes to connect several northern outposts by a wireless network. Two different communication technologies are to be used in establishing the network: every outpost will have a radio transceiver and only  $s$  outposts will in addition have a satellite channel.

Any two outposts with a satellite channel can communicate via the satellite, regardless of their location. Otherwise, two outposts can communicate by radio only if the distance between them does not exceed  $D$ , which depends of the power of the transceivers. Higher power yields higher  $D$  but costs more. Due to purchasing and maintenance considerations, the transceivers at the outposts must be identical; that is, the value of  $D$  is the same for every pair of outposts. For each outpost is known the coordinates  $(x, y)$ .

Your job is to determine the minimum  $D$  required for the transceivers. There must be at least one communication path (direct or indirect) between every pair of outposts.

Especifique el problema y escriba un algoritmo que resuelva este problema. Indique y explique la complejidad de su solución.

3. (14 puntos) Considere el siguiente problema:

En el Amigable, Gigante, Respetado y Avanzado imperio de Zlatan, más conocido como el Imperio AGRA, hay una importante cantidad de ciudades que están conectadas entre sí por algunas vías antiguas en las que los vehículos transitan en una única dirección. Los estados del imperio corresponden a los grupos más grandes de ciudades en los cuáles es posible viajar entre cualquier par de ciudades. Las vías que conectan un estado con otro estado son denominadas vías interestatales.

Zlatan tiene la intención de renovar su imperio y para esto, él tiene dos estrategias. La primera estrategia es construir la doble calzada en las vías interestatales para que sea posible viajar por estas vías en ambas direcciones. De esta manera, la distancia entre dos estados corresponderá a la cantidad de vías interestatales que deben ser atravesadas para llegar de un estado al otro (una vez todas las vías interestatales son bidireccionales). La segunda estrategia es escoger un estado como el estado capital para impulsar la economía entre estados. El estado capital será cualquier estado para el cuál la máxima distancia a cualquier otro estado es mínima. En caso de que hayan múltiples estados que cumplan esta condición, el estado capital será aquel estado que está compuesto de la mayor cantidad de ciudades.

A Zlatan le gustaría saber cuáles son las ciudades que hacen parte del estado capital y estas ciudades deben estar ordenadas ascendentemente.

Especifique el problema y escriba un algoritmo que resuelva este problema con una complejidad  $O(n + m)$  siendo  $n$  el número de ciudades y  $m$  el número de vías. Indique y explique la complejidad de su solución.

4. (16 puntos) Considere el siguiente problema:

Cariñoso es un oso y es el presidente del país *What-The-Fatherland*. Hay  $n$  osos en este país incluyendo a Cariñoso. Todos los osos están ubicados en una línea circular y están enumerados de 1 hasta  $n$ . El  $i$ -ésimo oso mide exactamente  $a_i$  centímetros de altura.

Un grupo de osos es un segmento contiguo no vacío de la línea. El tamaño del grupo es el número de osos en el grupo. La fortaleza del grupo corresponde a la mínima altura del oso en el grupo.

Cariñoso siente curiosidad por saber para algún  $x$  tal que  $1 \leq x < n$  cuál es la máxima fortaleza entre todos los grupos de tamaño  $x$ . Por ejemplo, si  $n = 7$ ,  $x = 3$  y la altura de los osos son 5, 4, 1, 2, 6, 3, 7 luego la máxima fortaleza entre todos los grupos de tamaño  $x$  es 4.

Especifique el problema y escriba un algoritmo que resuelva este problema. Indique y explique la complejidad de su solución.

5. (10 +) **Bonus:** Recientemente, Zlatan se cansó de sus kilos de más y empezó a ir todos los días a un gimnasio cerca a su casa. En el gimnasio hay una serie de cajones en los que se pueden guardar las pertenencias. Debido a que Zlatan vive en un sector de la ciudad un poco

inseguro, Zlatan no se siente tranquilo en dejar sus pertenencias en alguno de estos cajones sin colocar un candado. Para evitar dolores de cabeza, Zlatan se compra en Temu un candado de última tecnología en el que se tienen cuatro perillas que permiten seleccionar un número de cuatro dígitos que corresponde a la clave del candado. La clave del candado puede ser obtenida rápidamente con la ayuda de algunos botones especiales que están disponibles en el candado. Cada boton tiene un número de 4 dígitos asociado. Cuando cualquiera de dichos botones es presionado, el número asociado al botón es sumado al número que es desplegado en el candado y un nuevo número pasa a ser desplegado. El nuevo número corresponde a los 4 dígitos menos significativos del resultado de la suma. Contrario a lo esperado, Zlatan se ha dado cuenta que es muy difícil por él desgloquear el candado ya que puede requerir presionar muchas veces cada botón. Por esta razón Zlatan quisiera determinar si es posible desbloquear el candado y de ser así cuál es la menor cantidad de veces que debe presionar los botones para lograrlo.

Como un ejemplo, considere que el número que está inicialmente en el candado es 0000, que la clave de Zlatan es 8888 y que el candado tiene tres botones con los números 1111, 3333 y 9000 asociados a ellos. Una posibilidad para Zlatan sería presionar el botón con el número 1111 8 veces. Sin embargo, una mejor alternativa es presionar el botón 3333 dos veces y luego presionar el botón 1111 dos veces. De esta manera, la menor cantidad de veces que se debe presionar el botón es 4.

Escriba un algoritmo que resuelva este problema. Indique su complejidad. Explique.