

Este es el examen final del curso *Árboles y Grafos*, 2025-1. El examen tiene 5 preguntas: otorga un total de 58 puntos y 10 puntos de bono. El examen será evaluado sobre 58 puntos. El examen es *individual* y debe ser desarrollado a mano. No puede usar el computador ni ningún otro dispositivo electrónico; no puede hablar, chatear o compartir sus soluciones con sus compañeros. Adicionalmente, solo puede sacar durante el parcial las dos hojas de algoritmos escritos a mano de acuerdo a las indicaciones dadas en clase. Además de esto no puede sacar ningún tipo de material adicional en papel y solo puede usar durante el parcial las hojas de cuadernillo entregadas por el profesor. Si necesita una hoja adicional para hacer anotaciones puede solicitarla. Tenga en cuenta los puntos de cada pregunta y planifique adecuadamente su tiempo. El parcial tiene una duración de 140 minutos.

Nombre y código: \_\_\_\_\_

Pregunta	1	2	3	4	5	Total
Puntos	12	16	14	16	0	58
Puntaje						

### Conceptos Teóricos[12 pts.]

1. Responda los siguientes ítems:

- (a) (6 puntos) Sea  $G = (V, E)$  un grafo no dirigido con una función de peso  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ . ¿Qué condición debe cumplir cualquier arista  $(u, v) \in E$  para que se pueda afirmar con completa seguridad que dicha arista hace parte de todos los MST de  $G$ ?
- (b) (6 puntos) ¿Por qué no es buena idea usar como función  $g$  en un árbol de Fenwick la función  $g(i) = i$ ? Explique.

### Algoritmos Grafos y Árboles [50 pts.]

2. (16 puntos) Considere el siguiente problema:

In the country of Graphland, there are many cities but no roads. The federal government wants to change this situation and plans to build roads and railroads such that all the cities in the country are connected through this new transportation system. To make the new system more efficient, Graphland will build only roads between cities within the same state and will use railroads to connect cities that are in different states. For the purposes of this problem, consider that if the distance between any two cities that are directly connected is at most  $r$  then they are in the same state. Notice that, by this definition, if  $A$  and  $B$  are in the same state, and  $B$  and  $C$  are in the same state, then  $A$  and  $C$  are also in the same state.

To minimize the costs of building the roads and railroads, the government also wants to build only the minimum necessary extension of roads and railroads such that there is a path between any pair of cities in the entire country. You've been

hired to determine what's the optimum transportation network system that Graphland must build. There will be  $n$  cities and for each city  $i$  it is known the integer coordinates  $(x_i, y_i)$  in the plan. It is necessary to determine the number of states in Graphland and the minimum extension of both roads and railroads that must be built to satisfy the conditions of the project.

Consider a scenario with  $n = 4$ ,  $r = 20$  and the cities located in  $(0, 0)$ ,  $(40, 30)$ ,  $(30, 30)$ ,  $(10, 10)$ . In this case the number of states in Graphland is 2. The minimum total extension of roads is 24,14 and the minimum total extension of railroads is 28,28.

Especifique el problema y escriba un algoritmo que resuelva este problema. Indique y explique la complejidad de su solución.

3. (14 puntos) Considere el siguiente problema:

En el Amigable, Gigante, Respetado y Avanzado imperio de Zlatan, más conocido como el Imperio AGRA, hay una importante cantidad de ciudades que están conectadas entre sí por vías de última tecnología en las que los vehículos transitan en ambas direcciones. Existen dos tipos de vías, las vías *intraestatales* y las vías *interestatales*. Las vías intraestatales conectan ciudades en un mismo estado mientras que las vías interestatales conectan ciudades en diferentes estados. Los estados están determinados por los grupos más grandes de ciudades tales que para cada par de ciudades  $u, v$  en el estado existe más de un camino que permite ir de  $u$  a  $v$ .

En el imperio existen estados capitales, estados periféricos y estados intermedios. Los estados capitales son todos aquellos estados para los cuáles la máxima distancia a cualquier otro estado es mínima. Los estados periféricos son aquellos estados para los cuáles solo hay una vía interestatal que los conecta con algún otro estado. Los estados intermedios son aquellos estados que no son ni capitales ni periféricos. A Zlatan le gustaría asociar los diferentes estados a un índice (empezando desde 0) y además conocer para cada estado capital y cada estado periférico la cantidad de ciudades que lo conforman.

Especifique el problema y escriba un algoritmo que resuelva este problema con una complejidad  $O(n + m)$  siendo  $n$  el número de ciudades y  $m$  el número de vías. Indique y explique la complejidad de su solución.

4. (16 puntos) Considere el siguiente problema:

Zlatan está obsesionado con las cadenas de texto y cuando está aburrido se divierte resolviendo algunos retos relacionados a este tipo de dato. En una oportunidad Zlatan escribió una cadena de texto de longitud  $n$  conformada únicamente por letras minúsculas sin incluir la ñ. Luego, seleccionó  $k$  letras diferentes y el reto consistía en determinar para algún rango  $[l, r]$  cuál de las  $k$  letras era la que más se repetía. Así mismo, era posible ocasionalmente cambiar alguna posición  $i$  ( $0 \leq i < n$ ) por otra letra. De esta manera, durante el juego, era posible realizar secuencias de  $m$  operaciones como las indicadas previamente.

Con el tiempo, Zlatan se dió cuenta de que el problema se vuelve más complicado cuando la cantidad  $n$  de letras en la cadena se hace cada vez más grande y decidió que podría hacer más fácil el proceso con un programa de computador.

Especifique el problema y escriba un algoritmo que resuelva este problema. Indique y explique la complejidad de su solución.

5. (10 +) **Bonus:** Una de las ciudades del Imperio AGRA, está protegida contra incendios con una estación de bomberos. Algunos de los residentes se han quedado de que la distancia de sus casas a la estación de bomberos es demasiado grande y en consecuencia el alcalde de dicha ciudad logró convencer al emperador Zlatan de construir una estación de bomberos adicional. Es necesario escoger la ubicación de la estación de bomberos adicional de tal forma que se reduzca la máxima distancia de cualquier casa a alguna de las estaciones de bombero (la antigua o la nueva). La ciudad fue construida de tal forma que hay una serie de  $n$  intersecciones que están conectados por carreteras de diferentes longitudes. Las casas están ubicadas en dichas intersecciones así como la estación de bomberos actual. Hay por lo menos una casa en cada intersección y pueden haber múltiples casas en una misma intersección aunque la distancia entre las casas ubicadas en una misma intersección no es importante para efectos de este problema. La estación nueva será construida en alguna de las intersecciones existentes.

Especifique este problema y escriba un algoritmo para resolverlo. Indique su complejidad. Explique.