Nociones

Definición (de contexto)

Son contextos los siguientes

1) cualquier símbolo de variable x
2) $[\,]$ (hueco)
3) $(\lambda x\, C_1[\,])$, siempre que x sea un símbolo de variable y $C_1[\,]$ un contexto.
4) $(C_1[\,]\, C_2[\,])$, siempre que $C_1[\,]$ y $C_2[\,]$ sean contextos.

y no hay más contextos que estos. La clase de todos ellos es representada por $\mathcal{C}[\,]$.

Ejemplo :

- Todo λ-término es un contexto.
- Supongamos el contexto

$$((\lambda x\, [\,]x)M)$$

que con los convenios habituales puede ser representado por

$$(\lambda x.\, [\,]x)M$$

donde M es un contexto.

Entonces $C[\lambda y.y]$ es

$$(\lambda x.(\lambda y.y)x)M$$

$\lambda x.x =_\alpha \lambda y.y$

$\lambda xy.\,x(yx) =_\alpha$
$\lambda zw.\,z(wz)$

Definición (explicación de $=_\alpha$)

M' es producido a partir M por cambio de variables acotadas siempre que:

$$M \equiv C[\lambda x.N]$$

y

$$M' \equiv C[\lambda y.(N[x:=y])]$$

donde $C[\,]$ es un contexto con un hueco e y no ocurre en N.

(*)

Definición

M es α-congruente con N, en símbolos $M =_\alpha N$, si N resulta de M por una serie de cambios de variable acotadas.

Ejemplo: $C[\,] \equiv [\,]$; $M \equiv \lambda x.xy \equiv C[\lambda x.xy]$
$N \equiv C[\lambda z.(xy)[x:=z]] \equiv \lambda z.(xy)[x:=z]$
$\equiv \lambda z.(zy) \Rightarrow \lambda x.xy =_\alpha \lambda z.zy$

pero $\lambda x.xy \neq_\alpha \lambda y.yy$

Ejemplo: Sean

$$C[\,] \equiv \lambda x.[\,], \quad \lambda y.xy$$

$$\lambda xy.xy \equiv C[\lambda y.xy]$$

$$C[\lambda z.\, xy[y:=z]] \equiv C[\lambda z.xz]$$
$$\equiv \lambda x.(\lambda z.xz)$$
$$\equiv \lambda xz.xz$$

Nota:

- Son identificados términos α-congruentes (agrupándolos en clases de equivalencia)
- Los λ-términos son representantes de esas clases de equivalencia.
- Interpretamos $M[x:=N]$ como una operación entre clases de equivalencia, usando representantes de acuerdo con el siguiente convenio de variables.

Definición (convenio de variables de Barendregt)

Si $M_1, \ldots, M_n$ ocurren en cierto contexto matemático (definición, demostración, etc.) entonces en esos términos todos los símbolos de variable acotados son elegidos distintos a los de variable que ocurran libremente.

por ejemplo si en M_1 ocurre x libremente en los M_i restantes no aparece λx. ...

El Lema de Sustitución

Lema (de sustitución)

Sean M, N y L λ-términos. Si x e y son símbolos de variable distintos y x no ocurre libremente en L, entonces:

$$M[x:=N][y:=L] \equiv M[y:=L][x:=N[y:=L]]$$

dem

Por inducción sobre la estructura de M.

1) Si M es un símbolo de variable hay tres casos a considerar

- $M \equiv x$; entonces

$$\begin{aligned} M[x:=N][y:=L] &\equiv N[y:=L] \\ &\equiv x[x:=N[y:=L]] \\ &\equiv M[y:=L][x:=N[y:=L]] \end{aligned}$$

- $M \equiv y$; entonces

$M[x:=N][y:=L] \equiv y[y:=L]$

$\equiv L$

$\equiv L[x:=N[y:=L]]$ (porque $x \notin FV(L)$ por hip.)

$\equiv M[y:=L][x:=N[y:=L]]$

c) $M \equiv z$, $z \not\equiv x$ y $z \not\equiv y$; entonces

$$M[x:=N][y:=L] \equiv z$$
$$\equiv M[y:=L][x:=N[y:=L]]$$

y por tanto se da la igualdad en cada uno de los casos.

2) Si $M \equiv \lambda z. M_1$; supondremos que z es distinto de x e y y que $z \notin FV(NL)$ (esto siempre puede conseguirse con un renombramiento de variable adecuado)

$$(\lambda z. M_1)[x:=N][y:=L]$$
$$\equiv \lambda z. M_1[x:=N][y:=L]$$
$$\equiv \lambda z. M_1[y:=L][x:=N[y:=L]] \quad \text{(por h.i.)}$$
$$\equiv (\lambda z. M_1)[y:=L][x:=N[y:=L]]$$

y ello demuestra la igualdad

3) Si $M \equiv M_1 M_2$ entonces:

$$(M_1 M_2)[x:=N][y:=L]$$
$$\equiv (M_1[x:=N][y:=L])(M_2[x:=N][y:=L])$$
$$\equiv (M_1[y:=L][x:=N[y:=L]]) \quad \text{(hip. induc. dos veces)}$$
$$(M_2[y:=L][x:=N[y:=L]])$$

$$\equiv M[y:=L][x:=N[y:=L]]$$

(1) **Lema**

Sean M, N, M', N' λ-términos y x un s. de variable:

1) Si $M = M'$ entonces $M[x:=N] = M'[x:=N]$
2) Si $N = N'$ entonces $M[x:=N] = M[x:=N']$
3) Si $M = M'$ y $N = N'$ entonces

$$M[x:=N] = M'[x:=N']$$

dem

1) Por inducción sobre la longitud de una demostración de $M = M'$

a) Que $M = M'$ sea un axioma de la forma $(\lambda y.A)B = A[y:=B]$; entonces

$$M[x:=N] \equiv (\lambda y. A[x:=N])(B[x:=N])$$

$$= A[x:=N][y:=B[x:=N]] \text{ (por } \beta\text{-conver)}$$

$$\equiv A[y:=B][x:=N] \text{ (por lema sustitu.)}$$

$$\equiv M'[x:=N]$$

todo esto por el lema de sustitución y por el convenio de variables, que supone que $y \not\equiv x$ e $y \notin FV(N)$.

b) Que $M = M'$ sea un axioma de la forma $M \equiv M'$. En ese caso el resultado es inmediato.

c) $M = M'$ es $ZM_1 = ZM_1'$ y es consecuencia directa de $M_1 = M_1'$. Entonces

$$\begin{aligned} M[x:=N] &\equiv Z[x:=N]M_1[x:=N] \\ &= Z[x:=N]M_1'[x:=N] \\ &\equiv M'[x:=N] \end{aligned}$$

Si fuera $M_1 Z = M_1' Z$, el tratamiento es similar. El resto de casos también se tratan de una forma análoga.

Otra forma de verlo

Sup. que $M = M'$, entonces $\lambda x.M = \lambda x.M'$ por la regla ξ

luego $(\lambda x.M)N = (\lambda x.M')N$ (por regla 5)

luego $M[x:=N] = M'[x:=N]$; por β, la regla 3 (eventualmente) y la regla 4.

2) Por inducción sobre la estructura de M.

a) $M \equiv z$; caben los siguientes casos:

i) $z \equiv x$; $x[x:=N] \equiv N$
$$= N' \quad \text{(hip.)}$$

$\equiv x[x:=N']$

•) $z \not\equiv x$;

$z[x:=N] \equiv z$

$\equiv z[x:=N']$

b) $M \equiv \lambda z. M_1$;

•) $z \equiv x$;

$M[x:=N] \equiv (\lambda x. M_1)[x:=N]$

$\equiv \lambda x. M_1$

$\equiv (\lambda x. M_1)[x:=N']$

$\equiv M[x:=N']$

•) $z \not\equiv x$ y $z \notin FV(NN')$

Por hip. de inducción: $M_1[x:=N] = M_1[x:=N']$
y por la regla ξ:

$\lambda z. M_1[x:=N] = \lambda z. M_1[x:=N']$

$M[x:=N] \equiv (\lambda z. M_1)[x:=N]$

$\equiv \lambda z. M_1[x:=N]$

$= \lambda z. M_1[x:=N']$ (hip. induc.)

$$\equiv (\lambda z.\, M_1)[x:=N']$$
$$\equiv M[x:=N']$$

c) $M = M_1 M_2$;

$$M[x:=N] \equiv (M_1 M_2)[x:=N]$$
$$\equiv (M_1[x:=N])(M_2[x:=N])$$
$$= (M_1[x:=N'])(M_2[x:=N']) \quad \text{hip. induc.}$$
$$\equiv (M_1 M_2)[x:=N']$$
$$\equiv M[x:=N']$$

3) Es consecuencia de 1) y 2)

$$M[x:=N] = M'[x:=N] = M'[x:=N']$$

Lo que queremos demostrar se obtiene por transitividad.

Nota:

La siguiente afirmación es cierta

Si $N = N'$ entonces

$$\lambda x.x(\lambda y.\,N) = \lambda x.x(\lambda y.\,N')$$

En efecto:

$$N = N' \Rightarrow \lambda y.N = \lambda y.N'$$
$$\Rightarrow x(\lambda y.N) = x(\lambda y.N')$$

$$\Rightarrow \lambda x.\, x(\lambda y.N) = \lambda x.x(\lambda y.N')$$

Pero no lo es por la afirmación 2) del lema anterior puesto que $\lambda x.\, x(\lambda y.N)$ NO puede ser escrito como

$$(\lambda x.x(\lambda y.z))[z:=N]$$

si x ó y ocurren libremente en N.

Lema (transparencia referencial)

Para todo contexto $C[\,]$, si $N=N'$ entonces $C[N]=C[N']$.

dem

Por inducción sobre la estructura de $C[\,]$. Hay varios casos:

- ▪) $C[\,] \equiv x$, entonces $C[N] \equiv x \equiv C[N']$
- ▪) $C[\,] \equiv [\,]$, entonces

$$\begin{aligned} C[N] &\equiv N \\ &= N' \\ &\equiv C[N'] \end{aligned}$$

- ▪) $C[\,] \equiv \lambda x.C_1[\,]$, entonces

  Por hipótesis de inducción se tiene que

$C_1[N] = C_1[N']$ y entonces, por la regla ξ:

$$\lambda x. C_1[N] = \lambda x. C_1[N']$$

y por tanto tenemos que $C[N] = C[N']$

- $C[\,] \equiv C_1[\,]\, C_2[\,]$;

Por hipótesis de inducción tenemos que $C_1[N] = C_1[N']$ y que $C_2[N] = C_2[N']$

Así pues:

$$C_1[N]\, C_2[N] = C_1[N']\, C_2[N] \quad \text{(regla 5)}$$
$$C_1[N']\, C_2[N] = C_1[N']\, C_2[N'] \quad \text{(regla 6)}$$

luego (por transitividad)

$$\begin{aligned} C[N] &\equiv C_1[N]\, C_2[N] \\ &= C_1[N']\, C_2[N'] \\ &\equiv C[N'] \end{aligned}$$