EXTENSIONALIDAD

La relación de convertibilidad es una igualdad intencional. Esto quiere decir que dos términos son considerados iguales si codifican el mismo algoritmo en algún sentido.

Esta noción excluye de la igualdad a algunos términos que podríamos pensar de forma natural que son iguales.

Por ejemplo, supongamos que M es un λ-término tal que $x \notin FV(M)$ y consideremos los λ-términos:

$$\lambda x.Mx \quad \text{y el propio} \quad M$$

Dado cualquier otro λ-término N se cumple que

$$\begin{aligned}(\lambda x.Mx)N &= (Mx)[x:=N] \\ &\equiv (M[x:=N])(x[x:=N]) \\ &\equiv MN\end{aligned}$$

En resumidas cuentas se tiene que para todo λ-término N:

$$(\lambda x.Mx)N = MN$$

por lo que $\lambda x.Mx$ podría ser considerado igual a M, ya que aplicados siempre producen ambos el mismo resultado.

Ésta es la noción clásica de igualdad extensional.

Sin embargo, $\lambda x.Mx = M$ cuando $x \notin FV(M)$ no es un teorema de λ.

Hay dos iniciativas para extender λ de forma que quede incluida esa igualdad como teorema:

I) Añadir la regla ext

$$\frac{Mx = Nx}{M = N}, \quad x \notin FV(MN) \quad (ext)$$

y esto daría la teoría $\lambda + ext$

II) Añadir un axioma, como propuso Church, y éste sería el axioma η:

$$\lambda x.Mx = M, \quad x \notin FV(M) \qquad (\eta)$$

y esto daría la teoría extendida $\lambda\eta$

Es fácil entender que ambas visiones lo son del mismo objeto. En efecto:

Teorema

El sistema λ+ ext es equivalente al sistema $\lambda\eta$

dem

Consideremos el sistema λ+ ext y razonemos desde él. Supongamos que M es un λ-término tal que $x \notin FV(M)$. Entonces por β se tiene que

$$\begin{aligned}(\lambda x.Mx)x &= Mx[x:=x] \\ &= (M[x:=x])(x[x:=x]) \\ &= Mx\end{aligned}$$

y aplicando la regla ext se tiene que

$$\lambda x.Mx = M$$

y esto es η.

Consideremos ahora el sistema $\lambda\eta$ y razonemos desde él. Supongamos que tenemos dos λ-términos M y N tales que $x \notin FV(MN)$. Supongamos además que $Mx = Nx$

Por la regla ξ tenemos que

$$\lambda x.Mx = \lambda x.Nx$$

Pero por el axioma η tenemos que $\lambda x.Mx = M$ y que $\lambda x.Nx = N$.

Por transitividad tenemos entonces que $M = N$ y así sabemos que la regla ext es correcta en el sistema $\lambda\eta$

Ejercicios

1) Sea M un λ-término cerrado y sea el λ-término

$$G \equiv \lambda yx.x(yx)$$

Demostrar que en el sistema $\lambda\eta$ si M es un operador de punto fijo entonces

$$M = GM$$

2) Sea α el axioma

$$\lambda x.M = \lambda y.M[x:=y], \; y \notin FV(M)$$

Sea ahora M un λ-término (no necesariamente cerrado) y

$$G \equiv \lambda yx.x(yx)$$

Demuestre que en el sistema $\lambda\eta\alpha$, si M es un operador de punto fijo entonces $M = GM$

3) Sea M un λ-término cerrado y

$$G \equiv \lambda yx.x(yx)$$

En $\lambda\eta$ demostrar que son equivalentes los siguientes afirmaciones:

a) $M = GM$

b) M es un operador de punto fijo

b) $\Rightarrow$ a)

$$F(MF) = MF \Rightarrow M = GM$$

$$GM \equiv (\lambda yx.\, x(yx))\, M$$
$$= (\lambda x.\, x(yx))(y := M)$$
$$\equiv \lambda x.\, (x(yx))[y := M]$$
$$\equiv \lambda x.\, (x(Mx))$$
$$= \lambda x.\, Mx = M$$

CONSISTENCIA Y COMPLETITUD

Def.

Una ecuación es cualquier fórmula de la forma:

$$\boxed{M = N}$$

donde M y N son λ-términos.

Def

La ecuación $M = N$ es cerrada sii, por definición, los λ-términos M y N son cerrados.

Def.

Si $\mathcal{T}$ es una teoría con ecuaciones como sus fórmulas, entonces $\mathcal{T}$ es consistente (abreviadamente $\mathrm{Con}(\mathcal{T})$) sii, por definición, existe al menos una ecuación cerrada que no es consecuencia de la teoría $\mathcal{T}$

Nota:

La teorías λ y $\lambda\eta$ son consistentes (consultar la demostración en el libro de Barendregt)

La propiedad de consistencia es bastante frágil. Para tener una muestra consideremos

$$\boxed{\begin{aligned} S &\equiv \lambda xyz.xz(yz) \\ K &\equiv \lambda xy.x \\ I &\equiv \lambda x.x \end{aligned}}$$

Obsérvese si elegimos convenientemente M, N y O:

$$\begin{aligned} SMNO &= MO(NO) \quad \text{(por } \beta\text{-conversión)} \\ KMN &= M \\ IM &= M \end{aligned}$$

Si añadimos:

$$S = K$$

al sistema λ, obtenemos un sistema inconsistente, por tanto lo mismo se podría decir de $\lambda\eta$

Vamos a comprobar lo dicho.

Supongamos pues que $\boxed{S = K}$ valiese como axioma incorporándolo a λ.

Entonces para cualesquiera λ-términos cerrados A, B, C se tendría

$$SABC = KABC$$

luego

$$AC(BC) = AC$$

consideremos en particular que $A \equiv C \equiv I$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} I &= II \\ &= II(BI) \\ &= I(BI) \\ &= BI \end{aligned}$$

De nuevo en particular podemos tomar $B \equiv KD$ para D un λ-término cualquiera cerrado. Entonces:

$$\begin{aligned} I &= BI \\ &\equiv KDI \\ &= D \end{aligned}$$

De nuevo particularizaremos al caso $D \equiv KN$ donde N es un λ-término arbitrario entre los cerrados. Así pues:

$$I = KN$$

Para cualquier otro λ-término cerrado M se cumplirá:

$$\begin{aligned} M &= IM \\ &= KNM \\ &= N \end{aligned}$$

Hemos concluido que en el sistema λ enriquecido con el axioma $S = K$ vale para cualesquiera λ-términos cerrados M y N que

$$\boxed{M = N}$$

así que ese sistema es inconsistente.

Definición

Sean M, N λ-términos. M y N son incompatibles, abreviadamente $M \# N$, sii, por def., el sistema que resulta de añadir $M = N$ a λ como axioma es inconsistente.

Ejemplo: S y K son incompatibles, o sea, $S \# K$.

Definición

Sea M un λ-término.
M es una forma β-normal, abreviadamente una β-nf o simplemente una nf, si, por def., M no tiene ningún subtérmino de la forma $(\lambda x.R)S$

Definición

Una $\beta\eta$-nf es una β-nf que además no contiene ningún subtérmino de la forma:

$$\lambda x.Rx, \quad \text{con } x \notin FV(R)$$

Definición

Sea M un λ-término.
M tiene una β-nf si, por def., existe un λ-término N tal que:

1) $N = M$
2) N es una β-nf.

M tiene una $\beta\eta$-nf sii, por def., existe un λ-término N tal que:

1) $N = M$
2) N es una $\beta\eta$-nf.

Ejemplos

•) $\lambda x.x$ es una β-nf.
•) $(\lambda xy.x)(\lambda x.x)$ tiene a $\lambda yx.x$ como una β-nf.

•) $\Omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ no tiene ninguna β-nf.

•) K y S son $\beta\eta$-nf

•) $\lambda x.x(\lambda z.xz)$ no es una $\beta\eta$-nf (por el subtérmino $\lambda z.xz$). Sin embargo $\lambda x.xx$ es una $\beta\eta$-nf suya. En efecto, por η, $\lambda z.xz = x$ y por tanto

$$x(\lambda z.xz) = xx$$

pero por ξ,

$$\lambda x.x(\lambda z.xz) = \lambda x.xx$$

y $\lambda x.xx$ es una $\beta\eta$-nf.

Teorema (Curry)

Sean M un λ-términos.
Si M tiene una β-nf entonces M tiene una $\beta\eta$-nf.

Corolario

Sea M un λ-término.
Son equivalentes las siguientes afirmaciones

1) M tiene una β-nf.
2) M tiene una $\beta\eta$-nf.

Teorema

Sean M y N λ-términos. Entonces

1) Si M y N son ambos β-nf y distintos, entonces $M=N$ no es un teorema de λ.
2) Si M y N son ambos $\beta\eta$-nf y distintos, entonces $M=N$ no es un teorema de $\lambda\eta$
3) Si M y N son ambos $\beta\eta$-nf y distintos, entonces $M \not\# N$.

Observación:

El apartado 3 del anterior teorema debe ser enunciado a través de $\beta\eta$-nf y no basta con β-nf. En efecto y y $\lambda x.yx$ son β-nf y distintos pero no incompatibles. Obsérvese que son η-equivalentes.

Teorema

Sean M y N λ-términos. Si M y N tienen cada uno una β-nf, entonces una de dos:

1) $M = N$ es un teorema de $\lambda\eta$
2) $M \# N$