# LA TEORÍA $\lambda$

En lo que sigue presentamos una teoría sobre la igualdad de $\lambda$-términos, le llamaremos "convertibilidad".

Es razonable exigir lo siguiente:

1) Un término aplicación debería ser igual al resultado obtenido aplicando la parte funcional al término argumento

2) La igualdad debería ser una relación de equivalencia.

3) Términos iguales deberían serlo en cualquier contexto:

Consideremos los siguientes ejemplos motivadores con funciones polinómicas:

1) $f(x) = x^2 - 1$ (en realidad $\lambda x . x^2 - 1$)

$$\begin{aligned} f(5) &= (x^2 - 1)[x := 5] \text{ (en realidad } (\lambda x . x^2 - 1) 5) \\ &= (5^2 - 1) \\ &= 24 \end{aligned}$$

$(\lambda x . x^2 - 1) 5 = (x^2 - 1)[x := 5]$

$\lambda x.\ \underline{x^2-1}$

2) $f(x) = x^2 - 1$ $\qquad h(x) = x^2 + (-1)$

$g(x) = (x+1)(x-1)$

$f(x) = f(x)$

$f(x) = g(x) \Rightarrow g(x) = f(x)$

$f(x) = h(x)$ y $h(x) = g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$

3) $f(x) \not\equiv g(x)$ pero $f(x) = g(x)$

$$\begin{aligned} f(x)\,5 &= 5^2 - 1 \\ &= 24 \\ &= 6 \cdot 4 \\ &= (5+1)(5-1) \\ &= g(x)\,5 \end{aligned}$$

$4+1 \not\equiv 5$ pero $4+1 = 5$

$f(x)\,(4+1) = 24 = f(x)\,(5)$

$(x+1)(x-1) \not\equiv x^2 - 1$, pero $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$

$\lambda x.(x+1)(x-1) = \lambda x.(x^2-1)$

La teoría $\lambda$ está dada por los siguientes axiomas y reglas:

noción evaluación

1) $(\lambda x.M)N = M[x := N]$ ($\beta$-conversión)

= es rel. equival.

2) $M = M$ (reflexividad)

3) $\dfrac{M = N}{N = M}$ (simetría)

4) $\dfrac{M = N \quad N = L}{M = L}$ (transitividad)

recoge la trans. referencial

5) $\dfrac{M = N}{MZ = NZ}$

6) $\dfrac{M = N}{ZM = ZN}$

7) $\dfrac{M = N}{\lambda x.M = \lambda x.N}$ (regla $\xi$)

Escribiremos $\lambda \vdash M = N$ para indicar que $M = N$ es un teorema de $\lambda$ (se puede justificar como axioma y aplicación de reglas). En tal caso leeremos ($M$ y $N$ son $\beta$-convertibles) y el sistema será denominado $\lambda$-calculus.

Nota:

Si $M \equiv N$ entonces $M = N$, pero la afirmación recíproca NO es cierta. En efecto:

$$(\lambda x.x)y = x[x:=y]$$
$$\equiv y$$

o sea $(\lambda x.x)y = y$, pero $(\lambda x.x)y \not\equiv y$ ya que no tienen la misma escritura ambos $\lambda$-términos (cada $\lambda$-término tiene una única escritura. Así pues:

$$\boxed{\equiv \subsetneq =}$$

## Teorema (del punto fijo)

Para todo $\lambda$-término $F$ existe al menos un $\lambda$-término $X$ tal que $FX = X$

**dem**

Sea $x$ un símbolo de variable que no ocurra libremente en la (única) escritura de $F$ (quizá porque no ocurra y dada la abundancia no finita numerable de símbolos de variable).

Consideremos ahora:

$$W \equiv \lambda x . F(xx)$$

y

$$X \equiv WW$$

Así se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} WW &\equiv (\lambda x . F(xx))W \\ &= (F(xx))[x:=W] \quad (\beta\text{-conversión}) \\ &\equiv (F[x:=W])((xx)[x:=W]) \\ &\equiv (F[x:=W])((x[x:=W])(x[x:=W])) \\ &\equiv F(WW) \qquad\qquad (x \notin FV(F)) \end{aligned}$$

y en definitiva que:

$$X = FX$$

**Nota:**

- El $\lambda$-término $X$ del teorema del punto fijo se denomina "punto fijo de $F$"
- La lectura es que si $F$ es aplicado a $X$, el resultado es convertible a $X$.
- Todos los $\lambda$-términos tienen al menos un punto fijo
- Para cada $\lambda$-términos es posible construir al menos un punto fijo

## Ejemplos

1) Tomemos como $F$ el $\lambda$-termino

$$\lambda x.x$$

En este caso el $\lambda$-término $W$ es

$$\lambda x.F(xx) \equiv \lambda x.(\lambda x.x)(xx)$$
$$= \lambda x.\, x[x:=(xx)]$$
$$\equiv \lambda x.\, xx$$

$$X \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \text{ (irred. por } \beta\text{-conver.)}$$

2) Tomemos como $F$ el $\lambda$-término

$$\lambda xy.xy$$

En este caso el $\lambda$-término $W$ es

$$\lambda x.\, F(xx) \equiv \lambda x.(\lambda xy.xy)(xx)$$
$$= \lambda x.\, (\lambda y.xy)[x:=xx]$$
$$\equiv \lambda x.(\lambda y.(xy)[x:=xx])$$
$$\equiv \lambda xy.(xx)y \equiv \lambda xy.\, xxy$$

y entonces el pto. fijo $X$ es

$$(\lambda xy.\ xxy)(\lambda xy.xxy)$$

3) Sea F el $\lambda$-término $\lambda xy.x$ y busquemos un pto. fijo suyo. Entonces W es:

$$\lambda x.(\lambda xy.x)(xx) = \lambda x.(\lambda y.x)[x:=xx]$$
$$\equiv \lambda x.\ (\lambda y.\ x[x:=xx])$$
$$\equiv \lambda x.\ \lambda y.\ xx$$
$$\equiv \lambda xy.\ xx$$

El punto fijo X es entonces

$$(\lambda xy.xx)(\lambda xy.xx)$$

4) Consideremos el $\lambda$-término F

$$\lambda xyz.xz(yz)$$

En este caso W es:

$$\lambda x.\ F(xx) \equiv \lambda x.(\lambda xyz.\ xz(yz))(xx)$$
$$= \lambda x.(\lambda yz.\ xz(yz))[x:=xx]$$

$$\equiv \lambda x.(\lambda yz.(xx)z(yz))$$

$$\equiv \lambda xyz.\ xxz(yz)$$

Entonces el punto fijo $X$ de $F$ es:

$$(\lambda xyz.\ xxz(yz))(\lambda xyz.\ xxz(yz))$$

**Nota:** Los puntos fijos juegan un papel importante en las ciencias de la computación. Por ejemplo, la función factorial

$$\text{fac } 0 = 1$$

$$\text{fac } (\text{succ } n) = (\text{succ } n)(\text{fac } n)$$

es un pto. fijo del término:

$$\lambda fn.\ \text{if} (= n\ 0)\ 1\ (\times\ n\ (f(\text{pred } n)))$$

## Ejercicio

Un $\lambda$-término $M$ cerrado es un operador (o combinador) de punto fijo sí, por definición, para todo $\lambda$-término $F$ se cumple que:

$$F(MF) = MF$$

Sea el $\lambda$-término:

$$G \equiv \lambda xy.\, y(xy)$$

y

$$M \equiv (\lambda xy.\, y(xxy))(\lambda xy.\, y(xxy))$$

Haga lo siguiente:

1) Demostrar que $M$ es un punto fijo de $G$.

2) Demostrar que si $N$ es un punto fijo de $G$ (es decir, $N = GN$) entonces $N$ es un operador de punto fijo, siempre qué sea cerrado.

3) Demostrar que $M$ es combinador de punto fijo.

4) Si $M$ es un operador cerrado de punto fijo entonces

$$M = G M$$