SISTEMA λ

Para definir el sistema λ debemos comenzar dando la definición clásica de sustitución.

Definición (de sustitución clásica)

Sean x, y símbolos de variable y M, N, M_1, M_2 λ-términos. Definimos inductivamente:

$$M[x:=N]$$

que en algunos buenos libros es representado por $M[N/x]$, como sigue:

1) $x[x:=N] \overset{\text{def.}}{\equiv} N$

2) $y[x:=N] \equiv y$, siempre que $x \not\equiv y$

3) $(\lambda x. M)[x:=N] \equiv \lambda x. M$

4) $(\lambda y. M)[x:=N] \equiv \lambda y. M[x:=N]$, si $x \not\equiv y$ y $x \notin FV(M)$ ó $y \notin FV(N)$ (*)

5) $(\lambda y. M)[x:=N] \equiv (\lambda z. M[y:=z])[x:=N]$ $(x \not\equiv y)$ si $x \in FV(M)$ e $y \in FV(N)$ (**), donde z es una s. v. tal que $z \notin FV(N) \cup FV(M)$

6) $(M_1 M_2)[x:=N] \equiv (M_1[x:=N])(M_2[x:=N])$

Ejemplo

Haga la sustitución $M[x:=N]$ siendo

$$M \equiv (\lambda y.\, xy)z \quad \text{y} \quad N \equiv yx$$

Observamos que $x \in FV(xy) (= \{x,y\})$ y también $y \in FV(yx) (= \{x,y\})$.

Luego estamos en el caso 5). Hemos, por tanto, de elegir $z \notin FV(yx) \cup FV(xy)$ o sea $z \notin \{x,y\}$.

$$M[x:=N] \overset{\text{def.}}{\equiv} \left(\left(\lambda z.(xy)[y:=z]\right)[x:=yx]\right)(z[x:=yx])$$

$$\equiv \left(\left(\lambda z.\, x[y:=z]\, y[y:=z]\right)[x:=yx]\right) z \qquad 2)$$

$$\equiv \left((\lambda z.\, xz)[x:=yx]\right)z \quad (z \notin FV(yx))$$

$$\equiv \left(\lambda z.\, (xz)[x:=yx]\right)z$$

$$\equiv (\lambda z.\, (yx)z)z \equiv (\lambda z.\, yxz)z$$

Sea $p \equiv x \in FV(M)$ y $q \equiv y \in FV(N)$. La afirmación (*) es $\alpha \equiv \neg p \vee \neg q$ y $\neg\alpha$ es $\neg(\neg p \vee \neg q)$ que equivale a $p \wedge q$, o sea, (**).

Nota:

$M[x:=N]$ viene a ser algo así como reemplazar por N las ocurrencias libres de x en M teniendo el cuidado de renombrar antes las variables abstraídas en M que en la sustitución fuesen a establecer nuevas ligaduras sobre las variables que ocurren libremente en N considerado aislado.

Lema (de identidad)

Sean M y N λ-términos y x un símbolo de variable. Si x NO OCURRE libremente en M, entonces:

$$M[x:=N] \equiv M \qquad (1)$$

dem

La demostración es por inducción sobre la estructura de M. Hay varios casos:

- Primer caso: supondremos que $M \equiv y$. Por la hipótesis del lema, $y \not\equiv x$ y por la definición de sustitución:

$$\begin{aligned} M[x:=N] &\equiv y[x:=N] \\ &\equiv y \\ &\equiv M \end{aligned}$$

•) Supongamos que $M \equiv \lambda y.M_1$ y que (1) se cumple para λ-términos de menor complejidad que la de M. Si x no ocurre libremente en M pueden darse dos casos:

→) $y \equiv x$; entonces

$$
\begin{aligned}
M[x:=N] &\equiv (\lambda x.M_1)[x:=N] \\
&\equiv \lambda x.M_1 \qquad (3) \\
&\equiv M
\end{aligned}
$$

→) $x \not\equiv y$ y x no ocurre libremente en M_1; entonces:

$$
\begin{aligned}
M[x:=N] &\equiv (\lambda y.M_1)[x:=N] \\
&\equiv \lambda y.M_1[x:=N]; \quad x\not\equiv y \text{ y } x \notin FV(M_1) \ (4) \\
&\equiv \lambda y.M_1 \quad (com(M_1)<com(M), \text{ hip. inducción}) \\
&\equiv M
\end{aligned}
$$

•) Supongamos que $M \equiv M_1 M_2$ para ciertos λ-términos M_1 y M_2.

Si $x \notin FV(M) = FV(M_1) \cup FV(M_2)$ entonces $x \notin FV(M_1)$ y $x \notin FV(M_2)$.

Si, por hipótesis de inducción, (1) se cumple para λ-términos de menor complejidad que M, se cumplirá para M_1 y para M_2. Así pues:

$$\begin{aligned} M[x:=N] &\equiv (M_1 M_2)[x:=N] \\ &\equiv (M_1[x:=N])(M_2[x:=N]) \quad (6) \\ &\equiv M_1 M_2 \qquad \text{hip. de inducción.} \\ &\equiv M \end{aligned}$$

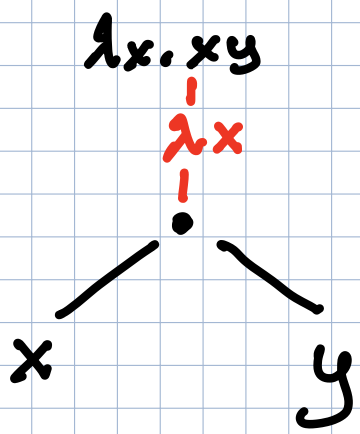
Por el principio de inducción queda demostrado el lema.

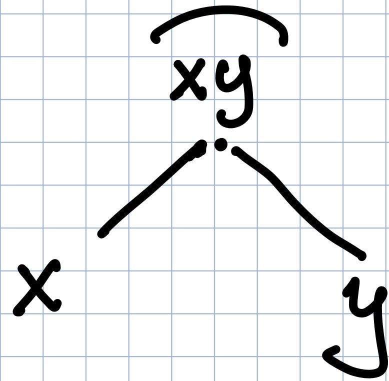
Observaciones :

Definimos la complejidad, com, del λ término M como sigue:

$$\mathrm{com}(M) = \begin{cases} 0, & \text{si } M \equiv x, \\ 1 + \mathrm{com}(M_1), & \text{si } M \equiv \lambda x. M_1, \\ 1 + \mathrm{com}(M_1) + \mathrm{com}(M_2), & \text{si } M \equiv M_1 M_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{com}(\lambda x.\, xy) &= 1 + \mathrm{com}(xy) \\ &= 1 + (1 + \mathrm{com}(x) + \mathrm{com}(y)) \\ &= 1 + (1 + 0 + 0) \\ &= 2 + 0 + 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

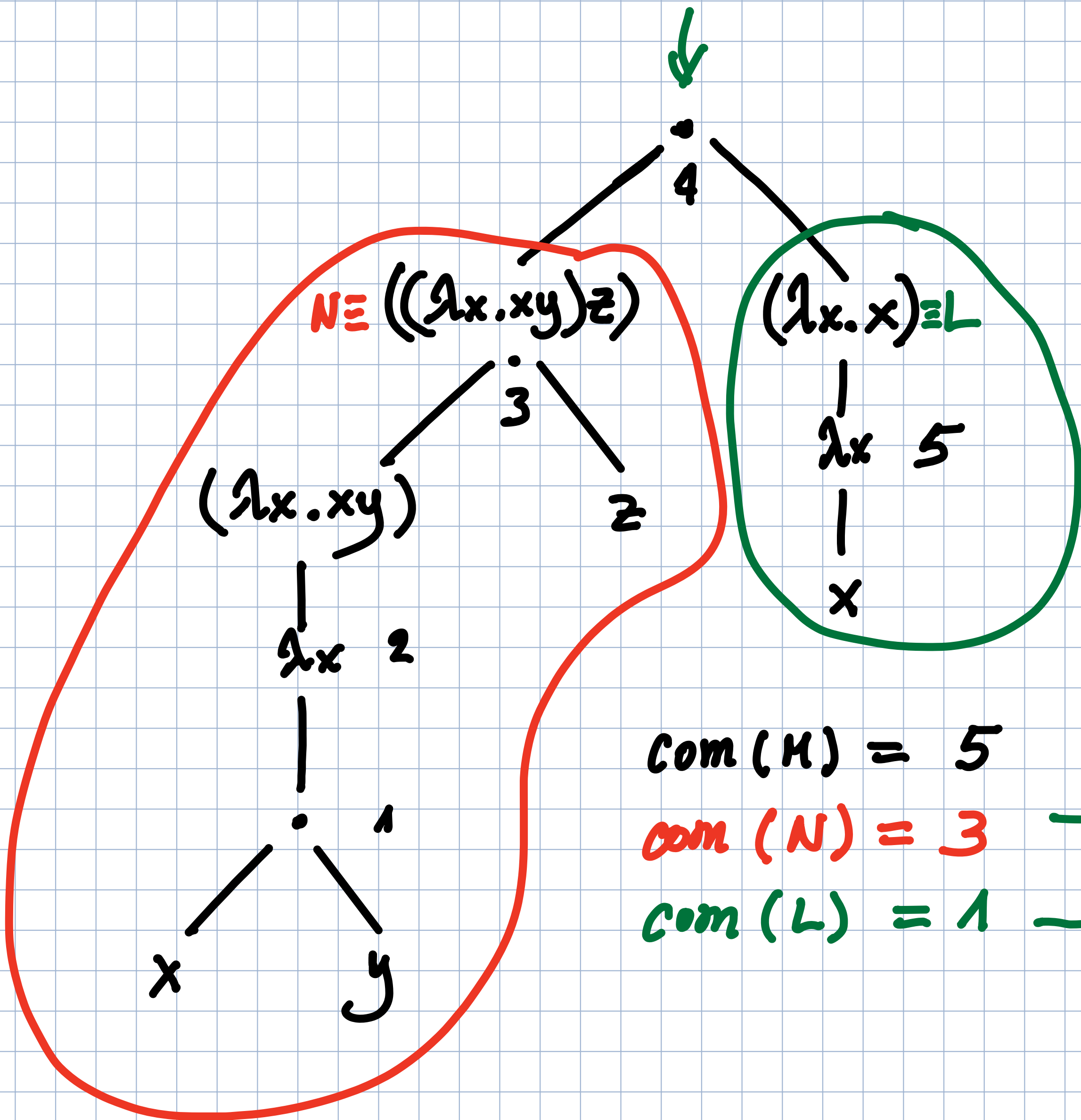




$$\mathrm{com}(xy) = 1$$

$$\mathrm{com}(\lambda x.xy) = 1 + 1$$
$$= 2$$

$$M \equiv (((\lambda x.xy)z)(\lambda x.x))$$



$com(M) = 5$

$com(N) = 3$

$com(L) = 1$

$$\begin{aligned}
com(M) &= 1 + com((\lambda x.xy)z) + com(\lambda x.x) \\
&= 1 + 1 + com(\lambda x.xy) + com(z) + 1 + com(x) \\
&= 3 + 1 + com(xy) + com(z) + com(x) \\
&= 4 + 1 + com(x) + com(y) + com(z) \\
&\quad + com(x) \\
&= 5 + 0 + 0 + 0 + 0 \\
&= 5
\end{aligned}$$