Notación y Sistema

Términos

Def. (alfabeto)

El alfabeto de los términos consta de los siguientes símbolos:

1) símbolos de variable: $x, y, z, \dots$ en cantidad no finita pero numerable
2) λ
3) símbolos de paréntesis: $)$, $($

y no hay otros símbolos salvo estos.

Def (expresión)

Llamamos expresión del λ-calculus a cualquier sucesión finita de símbolos de su lenguaje.

Ejemplos:

- $\lambda)x(yz$
- $(\lambda x(xyz))$

...

Def (λ-término)

Son λ-términos de λ-calculus las siguientes expresiones:

1) x, para todo símbolo de variable x.

2) $(\lambda x M)$ siempre que x sea un símbolo de variable y M un λ-término.

3) (MN), siempre que M y N sean λ-términos.

y cualquier λ-término se atiene a uno de esos patrones.

Nota:

- Los λ-términos de la forma 2) se denominan abstracciones
- Los λ-términos de la forma 3) se denominan aplicaciones

Convenio:

- Convenimos en escribir $\lambda x . M$ como abreviatura de $(\lambda x M)$. (1)
- Convenimos en escribir $\lambda x_1 \cdots x_n . M$ como abreviatura de:

$$(\lambda x_1 (\cdots (\lambda x_n M) \cdots)) \quad (2)$$

•) Convenimos en abreviar por

$$M N_1 \cdots N_n$$

el λ-término:

$$(\cdots(M N_1) \cdots N_n)$$

Def (símbolo var. libre, ligada, combinador)

El conjunto de variables ligadas de un λ-término M, en símbolos $BV(M)$, se define como sigue:

$$BV(x) = \emptyset$$
$$BV(\lambda x.N) = BV(N) \cup \{x\}$$
$$BV(LN) = BV(L) \cup BV(N)$$

El conjunto de variables libres de un término M, representado por $FV(M)$, se define como sigue:

$$FV(x) = \{x\}$$
$$FV(\lambda x.N) = FV(N) \setminus \{x\}$$
$$FV(LN) = FV(L) \cup FV(N)$$

Un término M es cerrado si, por def., se tiene que $FV(M) = \emptyset$

Los términos cerrados reciben el nombre de combinadores.

Notación:

La clase de los λ-términos es representada a veces por Λ.

La clase de los combinadores es representada por Λ°

Ejemplos:

1) De λ-términos:

- x, y, z símbolos de variable
- xy
- $\lambda x.xy$
- $\lambda y.(\lambda x.xy) \equiv \lambda yx.xy$
- $(\lambda y.(\lambda x.xy))z \equiv (\lambda yx.xy)z$
- $\lambda w.((\lambda yx.xy)z)$
- $\lambda x.(\lambda x.(xy))$

2) De ligazón de símbolos de variable

Sea M el lambda término:

$$M \equiv \lambda xy.\ xyz$$

que abrevia a $(\lambda x(\lambda y((xy)z)))$.

Vamos a calcular: $BV(M)$ y $FV(M)$

$$\begin{aligned}
BV(M) &= \{x\} \cup BV(\lambda y.xyz) \\
&= \{x\} \cup \{y\} \cup BV(xyz) \\
&= \{x,y\} \cup BV(xy) \cup BV(z) \\
&= \{x,y\} \cup BV(x) \cup BV(y) \cup \emptyset \\
&= \{x,y\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
FV(M) &= FV(\lambda y.xyz) \setminus \{x\} \\
&= (FV(xyz) \setminus \{y\}) \setminus \{x\} \\
&= ((FV(xy) \cup F(z)) \setminus \{y\}) \setminus \{x\} \\
&= ((FV(x) \cup FV(y) \cup \{z\}) \setminus \{y\}) \setminus \{x\} \\
&= (\{x,y,z\} \setminus \{y\}) \setminus \{x\} \\
&= \{z\}
\end{aligned}$$

3) $FV((\lambda x.x)x) = \{x\}$

$BV((\lambda x.x)x) = \{x\}$

con lo cual vemos que si $N \equiv (\lambda x.x)x$

entonces $FV(N) \cap BV(N) = \{x\} \neq \emptyset$

4) $M \equiv \lambda x.y$

$$FV(M) = FV(y) \setminus \{x\}$$
$$= \{y\} \setminus \{x\} = \{y\}$$
$$BV(M) = BV(y) \cup \{x\}$$
$$= \emptyset \cup \{x\}$$
$$= \{x\}$$
$$BV(M) \cap FV(M) = \emptyset$$

Definición (de subtérmino)

Sea M un λ-término. El conjunto de los subtérminos de M, en símbolos $sub(M)$, es el definido por la siguiente igualdad

$$sub(x) = \{x\}$$
$$sub(\lambda x.M) = sub(M) \cup \{\lambda x.M\}$$
$$sub(MN) = sub(M) \cup sub(N) \cup \{MN\}$$

Ejem

Sea $M \equiv \lambda xy.xyz$ y calculemos $sub(M)$

$$\begin{aligned}
sub(M) &= \{\lambda xy.xyz\} \cup sub(\lambda y.xyz) \\
&= \{\lambda xy.xyz\} \cup \{\lambda y.xyz\} \cup sub(xyz) \\
&= \{\lambda xy.xyz, \lambda y.xyz\} \cup sub((xy)z) \\
&= \{\lambda xy.xyz, \lambda y.xyz\} \cup \{xyz\} \\
&\quad \cup sub(xy) \cup sub(z) \\
&= \{\lambda xy.xyz, \lambda y.xyz, xyz\} \cup sub(xy) \\
&\quad \cup \{z\} \\
&= \{\lambda xy.xyz, \lambda y.xyz, xyz, z\} \cup sub(x) \\
&\quad \cup sub(y) \cup \{xy\} \\
&= \{\lambda xy.xyz, \lambda y.xyz, xyz, z, x, y, xy\}
\end{aligned}$$

Nota:

En lo que sigue si M y N son λ-términos, la notación:

$$M \equiv N$$

significará que son sintácticamente idénticos.

No confundir esta situación con $M = N$, lo que será definido posteriormente.