Real Business Cycle: Modelo Básico

Miguel Alvarado

Julio, 2022

1. Solución Analítica

Como las soluciones por el enfoque del Planificador Central y por Mercados Descentralizados son matemáticamente equivalentes, para este ejercicio, se opta por resolver el modelo mediante el primer enfoque.

El Planificador Central resuelve el siguiente problema:

$$\max_{\{c_t, n_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{{c_t}^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{{n_t}^{1+v}}{1+v} \right) \right\}$$

$$\begin{array}{rcl} & s.a. & \\ c_t + k_{t+1} & \leq & z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} + (1-\delta) k_t \\ \log(z_t) & = & \rho_z \log(z_{t-1}) + \varepsilon_t \\ \{k_0, z_o\} & ; & dados \end{array} \tag{1}$$

El Lagrangiano, suponiendo soluciones interiores:

$$l_0 = E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\left(\frac{{c_t}^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{{n_t}^{1+v}}{1+v} \right) + \lambda_t \left(z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} + (1-\delta) k_t - c_t - k_{t+1} \right) \right] \right\}$$

Las Condiciones de Primer Orden (CPO):

$$\begin{array}{rcl} \{c_t\} & : & E_t \left\{ \beta^t \left[{c_t}^{-\sigma} - \lambda_t \right] \right\} = 0 \\ \{n_t\} & : & E_t \left\{ \beta^t \left[-{n_t}^{v} + \lambda_t (1-\alpha) z_t k_t^{\alpha} {n_t}^{-\alpha} \right] \right\} = 0 \\ \{k_{t+1}\} & : & E_t \left\{ -\beta^t \lambda_t + \beta^{t+1} \lambda_{t+1} \left[\alpha z_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} n_{t+1}^{1-\alpha} + (1-\delta) \right] \right\} = 0 \\ \{\lambda_t\} & : & E_t \left\{ \beta^t \left[z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} + (1-\delta) k_t - c_t - k_{t+1} \right] \right\} = 0 \end{array}$$

Un poco de algebra en las CPO:

$$\{c_t\} \; : \; {c_t}^{-\sigma} - \lambda_t = 0 \tag{2}$$

$$\{n_t\} \; : \; -{n_t}^{v} + \lambda_t (1-\alpha) z_t k_t^{\alpha} {n_t}^{-\alpha} = 0 \tag{3}$$

$$\{k_{t+1}\} \; : \; \lambda_t - \beta E_t \left\{ \lambda_{t+1} \left[\alpha z_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} n_{t+1}^{1-\alpha} + (1-\delta) \right] \right\} = 0 \tag{4}$$

$$\{\lambda_t\} \; : \; z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} + (1-\delta) k_t - c_t - k_{t+1} = 0 \tag{5}$$

La ecuación (2) en (3), y despejamos n_t:

$$\begin{aligned} {n_t}^v &= {c_t}^{-\sigma}\left(1-\alpha\right) z_t k_t^{\alpha} n_t^{-\alpha} \\ n_t &= \left[\left(1-\alpha\right) {c_t}^{-\sigma} z_t k_t^{\alpha}\right]^{\frac{1}{v+\alpha}} \end{aligned} \tag{6}$$

La expresión hallada para n_{t+1} en (6)[1] y (2), en (4) y algebra:

$$\begin{aligned} {c_t}^{-\sigma} - \beta E_t\left\{ {c_{t+1}}^{-\sigma}\left[\alpha z_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1}\left(\left[\left(1-\alpha\right){c_{t+1}}^{-\sigma} z_{t+1} k_{t+1}^{\alpha}\right]^{\frac{1}{v+\alpha}}\right)^{1-\alpha} + \left(1-\delta\right)\right]\right\} &= 0 \\ {c_t}^{-\sigma} - \beta E_t\left\{ {c_{t+1}}^{-\sigma}\left[\alpha z_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1}\left[\left(1-\alpha\right){c_{t+1}}^{-\sigma} z_{t+1} k_{t+1}^{\alpha}\right]^{\frac{1-\alpha}{v+\alpha}} + \left(1-\delta\right)\right]\right\} &= 0 \\ {c_t}^{-\sigma} - \beta E_t\left\{ {c_{t+1}}^{-\sigma}\left[\alpha (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{v+\alpha}} {z_{t+1}}^{\frac{v+1}{v+\alpha}} {c_{t+1}}^{-\sigma\left(\frac{1-\alpha}{v+\alpha}\right)} {k_{t+1}}^{-v\left(\frac{1-\alpha}{v+\alpha}\right)} + \left(1-\delta\right)\right]\right\} &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

La expresión hallada para n_t en (6), en (5) y algebra:

$$\begin{aligned} z_t k_t^{\alpha}\left(\left[\left(1-\alpha\right){c_t}^{-\sigma} z_t k_t^{\alpha}\right]^{\frac{1}{v+\alpha}}\right)^{1-\alpha} + \left(1-\delta\right) k_t - c_t - k_{t+1} &= 0 \\ z_t k_t^{\alpha}\left(\left(1-\alpha\right){c_t}^{-\sigma} z_t k_t^{\alpha}\right)^{\frac{1-\alpha}{v+\alpha}} + \left(1-\delta\right) k_t - c_t - k_{t+1} &= 0 \\ (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{v+\alpha}} {z_t}^{\frac{v+1}{v+\alpha}} {c_t}^{-\sigma\left(\frac{1-\alpha}{v+\alpha}\right)} {k_t}^{\alpha\left(\frac{v+1}{v+\alpha}\right)} + \left(1-\delta\right) k_t - c_t - k_{t+1} &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Luego, el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal estocástico que gobierna la dinámica del modelo, viene dada por las siguientes ecuaciones (de (7), (8) y (1):

$$\beta E_t\left\{ {c_{t+1}}^{-\sigma}\left[\alpha (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{v+\alpha}} {z_{t+1}}^{\frac{v+1}{v+\alpha}} {c_{t+1}}^{-\sigma\left(\frac{1-\alpha}{v+\alpha}\right)} {k_{t+1}}^{-v\left(\frac{1-\alpha}{v+\alpha}\right)} + \left(1-\delta\right)\right]\right\} = {c_t}^{-\sigma} \tag{9}$$

$$(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{v+\alpha}} {z_t}^{\frac{v+1}{v+\alpha}} {c_t}^{-\sigma\left(\frac{1-\alpha}{v+\alpha}\right)} {k_t}^{\alpha\left(\frac{v+1}{v+\alpha}\right)} + \left(1-\delta\right) k_t = c_t + k_{t+1} \tag{10}$$

$$\rho_z \log\left(z_t\right) + \varepsilon_{t+1} = \log\left(z_{t+1}\right) \tag{11}$$

Expresamos este sistema considerando a las variables en su Estado Estacionario, esto es: $x_t = x_{t+1} = x, \forall t$.

$$\begin{aligned} \alpha\beta(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{v+\alpha}} z^{\frac{v+1}{v+\alpha}} c^{-\sigma\left(\frac{1-\alpha}{v+\alpha}\right)} k^{-v\left(\frac{1-\alpha}{v+\alpha}\right)} + \beta\left(1-\delta\right) - 1 &= 0 \\ (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{v+\alpha}} z^{\frac{v+1}{v+\alpha}} c^{-\sigma\left(\frac{1-\alpha}{v+\alpha}\right)} k^{\alpha\left(\frac{v+1}{v+\alpha}\right)} - \delta k - c &= 0 \\ z - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Dado que los exponentes estan en función de parámetros, para reducir el algebra realizo los siguientes cambios de variable:

$$g = \frac{1-\alpha}{v+\alpha} \quad ; \quad h = \frac{v+1}{v+\alpha}$$

Con estos cambios de variable, tenemos el sistema de ecuaciones no lineal que determina el estado estacionario deterministico (Sistema 1):

$$\alpha\beta(1-\alpha)^g z^h c^{-\sigma g} k^{-vg} + \beta\left(1-\delta\right) - 1 = 0 \tag{12}$$

$$(1-\alpha)^g z^h c^{-\sigma g} k^{\alpha h} - \delta k - c = 0 \tag{13}$$

$$z - 1 = 0 \tag{14}$$

[1] De (6), se tiene que: $n_{t+1} = \left[\left(1-\alpha\right){c_{t+1}}^{-\sigma} z_{t+1} k_{t+1}^{\alpha}\right]^{\frac{1}{v+\alpha}}$

Antes de comenzar a explicar la solución mediante Matlab, log-linealizamos el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal estocástico que gobierna la dinámica del modelo, entorno al estado estacionario determinado en el último sistema de ecuaciones: $\{c, k, z\}$ y expresemos este sistema matricialmente.

Entonces, siguiendo las técnicas de log-linealización estudiadas y algunos cambios de variable definidos inmediatamente después, tenemos (Sistema 2):

$$\sigma \hat{c}_t = a_1 \hat{c}_{t+1} + a_2 \hat{k}_{t+1} + a_3 \hat{z}_{t+1} + a_1 \hat{\mu}^c_{t+1} + a_2 \hat{\mu}^k_{t+1} + a_3 \hat{\mu}^z_{t+1} \tag{15}$$

$$b_1 \hat{c}_t + b_2 \hat{k}_t + b_3 \hat{z}_t = -\hat{k}_{t+1} \tag{16}$$

$$\rho_z \hat{z}_t = \hat{z}_{t+1} - \varepsilon_{t+1} \tag{17}$$

Donde:

$$g = \frac{1-\alpha}{v+\alpha} \quad ; \quad h = \frac{v+1}{v+\alpha}$$

$$\theta = (1-\alpha)^g z^h c^{-\sigma g} k^{\alpha h} \quad ; \quad \pi = \alpha\beta(1-\alpha)^g z^h c^{-\sigma g} k^{-vg}$$

$$a_1 = \sigma + \pi\sigma g \quad ; \quad a_2 = \pi v g \quad ; \quad a_3 = -\pi h$$

$$b_1 = \frac{\theta\sigma g + c}{k} \quad ; \quad b_2 = -\frac{\theta\alpha k + (1-\delta)\,k}{k} \quad ; \quad b_3 = -\frac{\theta h}{k}$$

Finalmente, las ecuaciones (15), (16) y (17) se pueden expresar matricialmente, como sigue:

$$\begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & \rho_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_t \\ \hat{k}_t \\ \hat{z}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_{t+1} \\ \hat{k}_{t+1} \\ \hat{z}_{t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \hat{\mu}^c_{t+1} \\ \hat{\mu}^k_{t+1} \\ \hat{\mu}^z_{t+1} \end{bmatrix}$$

Ecuación matricial que expresamos simplemente como:

$$A_1 Y_t = A_2 Y_{t+1} + A_3 \eta_{t+1} \tag{18}$$

Una vez hecho todo esto, obtengamos la solución del modelo (trayectorias) y modelamos el impacto de un shock de 1 % en la tecnología. Entonces:

1. Dado el problema descrito al principio de estas notas, obtengo las CPO y con un poco de algebra llego al sistema de ecuaciones diferenciales no lineal y estocástico de gobierna la dinámica del modelo (Ecuaciones (9), (10) y (11)).

2. En tal sistema, tomamos las variables como si estuvieran en su estado estacionario y obtenemos el sistema no lineal que determina el estado estacionario deterministico del modelo (Ecuaciones (12), (13) y (14)). Para resolver este sistema, primero programé una función en matlab **sist_for_ss_rbc_cp_1a.m** donde describo mi sistema no lineal a resolver de la forma $F(X) = 0$. Una otra función, también programada en matlab, **ss_for_seq_rbc_cp_1a.m** resuelve el sistema no lineal descrito en **sist_for_ss_rbc_cp_1a.m**. Luego, con ambas funciones programadas puedo obtener los valores de estado estacionario determinístico del modelo, es decir, los valores para c, k, y z.

3. Una vez que he determinado los valores de estado estacionario de las variables, log-linealizo el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal estocástico de gobierna la dinámica del modelo (Ecuaciones (9), (10) y (11)), entorno al estado estacionario, determinado numéricamente en el punto 2. Con esto y un poco de algebra obtenemos el sistema log-lienalizado (Ecuaciones (15), (16) y (17)), sistema que expresamos matricialmente (Ecuación (18)).

Ahora, en el archivo de matlab **rbc_cp_1a.m**, archivo desde donde se ejecuta toda la rutina[2]. En la rutina:

* Defino los distintos parámetros del modelo, asi como todos los otros parámetros que definí para reducir el álgebra y el tamaño de las expresiones[3].

* La rutina ejecuta el m.file **ss_for_seq_rbc_cp_1a.m**, que a su vez hace uso de el m.file **sist_for_ss_rbc_cp_1a.m**, esto para obtener los valores de estado estacionario para las variables del modelo. Estos valores se consideran como variables globales, junto con otras, de modo de poder utilizarlas en todo lo que sigue de la rutina del m.file.

4. Una vez determinados el valor de estado estacionario para las variables del modelo y definidos otros valores, se arman las matrices de la ecuación (18) y se obtiene la matriz A, donde:

$$A = A^{-1}A_1$$

* En esta matriz A, se le realiza la descomposión de Jordan, para obtener la forma estructural del modelo.

$$\begin{aligned} A_1 Y_t &= A_2 Y_{t+1} + A_3 \eta_{t+1} \\ A^{-1} A_1 Y_t &= A^{-1} A_2 Y_{t+1} + A^{-1} A_3 \eta_{t+1} \\ Y_t &= A Y_{t+1} + B \eta_{t+1} \end{aligned}$$

* De tal descomposición, se obtenen las matrices F, matriz de autovalores de A y Q, matriz de autovectores de A. Donde, las matrices tienen la propiedad que: $QFQ^{-1} = A$. Con esto:

$$\begin{aligned} Y_t &= A Y_{t+1} + B \eta_{t+1} \\ Y_t &= QFQ^{-1} Y_{t+1} + B \eta_{t+1} \\ Q^{-1} Y_t &= Q^{-1} QFQ^{-1} Y_{t+1} + Q^{-1} B \eta_{t+1} \\ Q^{-1} Y_t &= FQ^{-1} Y_{t+1} + Q^{-1} B \eta_{t+1} \end{aligned}$$

Luego, nuestro modelo estructural es[4]:

$$Z_t = F Z_{t+1} + \Phi \eta_{t+1} \tag{19}$$

* En la matriz F, el programa verifica que se cumplan las condiciones de Blanchard y Kahn, para asegurar la estabilidad del sistema. Si este es el caso, nos entrega un mensaje y nos muestra

[2] Siempre que en su cd directory esten los tres m.file arriba señalados, simplemente se deberá escribir **rbc_cp_1a.m** en el prompt de matlab y ejecutar.

[3] Los nombres de los parámetros se asignan de manera natural para que coincidan con la notación de estas notas.

[4] Donde: $Z_t = Q^{-1}Y_t$, $Z_{t+1} = Q^{-1}Y_{t+1}$, y $\Phi = Q^{-1}B$

la matriz F.

* Si el sistema es estable[5], la rutina programada nos selecciona el (los) vector (vectores) de la matriz de autovectores[6] Q^{-1} asociados al (los) autovalor(es) dentro del círculo unitario y genera un nuevo vector (matriz) q. Para este vector (matriz) y dada la particular forma diagonal de F, tomando esperanza en t sobre la ecuación (19)[7], iterando hacia adelante obtendremos que para la(s) raiz (raices) dentro del circulo unitario, $z_t \in Z_t$, converge(n) a:

$$z_t = 0$$

Luego, dado que definimos:

$$Z_t = Q^{-1} Y_t$$

Podemos escribir entonces:

$$z_t = qY_t$$

Por tanto:

$$qY_t = 0$$

Desde donde podemos determinar la expresión de la función de política de la(s) varaible(s) libre(s) del modelo.

En nuestro caso, donde tenemos una raiz dentro del circulo unitario, q es de dimension (1x3):

$$q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\begin{aligned} qY_t &= 0 \\ \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_t \\ \hat{k}_t \\ \hat{z}_t \end{bmatrix} &= 0 \\ q_{11}\hat{c}_t + q_{12}\hat{k}_t + q_{13}\hat{z}_t &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos la ecuación que gobierna la trayectoria de los desvios del consumo respecto de su estado estacionario:

$$\hat{c}_t = -\left(\frac{q_{12}}{q_{11}}\right)\hat{k}_t - \left(\frac{q_{13}}{q_{11}}\right)\hat{z}_t \tag{20}$$

Con esta última expresión en la ecuación (16), ecuación log-linealizada del stock de capital, obtenemos la ecuación que gobierna la trayectoria de los desvios del stock de capital respecto de su estado estacionario:

$$\hat{k}_{t+1} = -b_1\left(-\left(\frac{q_{12}}{q_{11}}\right)\hat{k}_t - \left(\frac{q_{13}}{q_{11}}\right)\hat{z}_t\right) - b_2\hat{k}_t - b_3\hat{z}_t \tag{21}$$

[5] Si no es estable, muestra un mensaje y termina la rutina

[6] En el m.file **rbc_cp_1a.m** la matriz Q^{-1} esta denotada como QQ.

[7] Donde, $E_t\{\eta_{t+1}\} = 0$

Ademas, sabemos que[8]:

$$\hat{z}_{t+1} = \rho_z \hat{z}_t + \varepsilon_{t+1} \qquad (22)$$

5. Finalmente, si suponemos que en $t = 1$, ocurre un shock de 1 % en la tecnología, esto es $\varepsilon_1 = 1$, dado que en $t = 0$, $\hat{z}_0 = 0$ y $\hat{k}_0 = 0$ (pues son variables predeterminadas), las tres últimas ecuaciones describen la trayectoria de las variables. Esto se hace mediante un simple loop en el mismo m.file.

Hasta este punto, se han encontrado las trayectorias de $\hat{c}_t$, $\hat{k}_{t+1}$, y $\hat{z}_{t+1}$. Sin embargo, como las soluciones por el enfoque del Planificador Central y por Mercados Descentralizados son matemáticamente equivalentes, podemos tomar estas soluciones (trayectorias) que obtuvimos, reemplazarlas en las ecuaciones log-linealizadas de la solución descentralizada y calcular así las trayectorias restantes. También podemos tomar las ecuaciones previas que obtuvimos y a partir de estas calcular las trayectorias restantes. Veamos esto:

Lambda: $\hat{\lambda}_t$

De la ecuacíon (2), tenemos:

$$c_t^{-\sigma} = \lambda_t$$

En estado estacionario:

$$c^{-\sigma} = \lambda$$

Log-linealizamos la ecuación (2):

$$\begin{aligned} c^{-\sigma}(1 - \sigma \hat{c}_t) &= \lambda(1 + \hat{\lambda}_t) \\ (1 - \sigma \hat{c}_t) &= (1 + \hat{\lambda}_t) \\ -\sigma \hat{c}_t &= \hat{\lambda}_t \end{aligned}$$

Luego, la trayectoria para $\hat{\lambda}_t$ viene dada por:

$$\hat{\lambda}_t = -\sigma \hat{c}_t \qquad (23)$$

Vemos que $\hat{\lambda}_t$ es función del parámetro conocido σ y de la trayectoria del consumo $\hat{c}_t$, que también conocemos. Luego, podemos calcular la trayectoria de $\hat{\lambda}_t$ que buscamos.

Trabajo: $\hat{n}_t$

De la ecuacíon (6), tenemos:

$$\begin{aligned} n_t &= \left[(1-\alpha)\, c_t{}^{-\sigma} z_t k_t^{\alpha}\right]^{\frac{1}{v+\alpha}} \\ n_t &= (1-\alpha)^{\frac{1}{v+\alpha}} c_t{}^{\left(\frac{-\sigma}{v+\alpha}\right)} z_t{}^{\frac{1}{v+\alpha}} k_t{}^{\left(\frac{\alpha}{v+\alpha}\right)} \qquad (24) \end{aligned}$$

En estado estacionario:

$$n = (1-\alpha)^{\frac{1}{v+\alpha}} c^{\left(\frac{-\sigma}{v+\alpha}\right)} z^{\frac{1}{v+\alpha}} k^{\left(\frac{\alpha}{v+\alpha}\right)}$$

[8] $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_z^2)$

Log-linealizamos la ecuación (24):

$$\begin{aligned}
n(1+\hat{n}_t) &= (1-\alpha)^{\frac{1}{v+\alpha}} c^{\left(\frac{-\sigma}{v+\alpha}\right)} z^{\frac{1}{v+\alpha}} k^{\left(\frac{\alpha}{v+\alpha}\right)} \left(1 - \frac{\sigma}{v+\alpha}\hat{c}_t + \frac{1}{v+\alpha}\hat{z}_t + \frac{\alpha}{v+\alpha}\hat{n}_t\right) \\
(1+\hat{n}_t) &= \left(1 - \frac{\sigma}{v+\alpha}\hat{c}_t + \frac{1}{v+\alpha}\hat{z}_t + \frac{\alpha}{v+\alpha}\hat{n}_t\right)
\end{aligned}$$

Luego, la trayectoria para $\hat{n}_t$ viene dada por:

$$\hat{n}_t = -\frac{\sigma}{v+\alpha}\hat{c}_t + \frac{1}{v+\alpha}\hat{z}_t + \frac{\alpha}{v+\alpha}\hat{k}_t \tag{25}$$

Vemos que $\hat{n}_t$ es función de parámetros conocidos $\{\sigma, v, \alpha\}$ y de las trayectorias de $\hat{c}_t$, $\hat{z}_t$, y $\hat{k}_t$ que también las conocemos. Luego, podemos calcular la trayectoria de $\hat{n}_t$ que buscamos.

<u>Inversión</u>: $\hat{i}_t$

De la ecuacíon de movimiento (acumulación) del capital, tenemos:

$$\begin{aligned}
i_t &= k_{t+1} - k_t + \delta k_t \\
i_t &= k_{t+1} - (1-\delta)\, k_t
\end{aligned} \tag{26}$$

En estado estacionario:

$$\begin{aligned}
i &= k - k + \delta k \\
i &= \delta k
\end{aligned}$$

Log-linealizamos la ecuación (26):

$$\begin{aligned}
i\left(1+\hat{i}_t\right) &= k\left(1+\hat{k}_{t+1}\right) - (1-\delta)\, k \left(1+\hat{k}_t\right) \\
i + i\hat{i}_t &= k + k\hat{k}_{t+1} - (1-\delta)\, k - (1-\delta)\, k\hat{k}_t \\
i\hat{i}_t &= k\hat{k}_{t+1} - (1-\delta)\, k\hat{k}_t \\
\hat{i}_t &= \frac{k}{i}\hat{k}_{t+1} - (1-\delta)\,\frac{k}{i}\hat{k}_t \\
\hat{i}_t &= \frac{k}{\delta k}\hat{k}_{t+1} - (1-\delta)\,\frac{k}{\delta k}\hat{k}_t
\end{aligned}$$

Luego, la trayectoria para $\hat{i}_t$ viene dada por:

$$\hat{i}_t = \frac{1}{\delta}\left(\hat{k}_{t+1} - (1-\delta)\,\hat{k}_t\right) \tag{27}$$

Vemos que $\hat{i}_t$ es función del parámetro conocido $\{\delta\}$ y de las trayectorias de $\hat{k}_{t+1}$, y $\hat{k}_t$ que también las conocemos. Luego, podemos calcular la trayectoria de $\hat{i}_t$ que buscamos.

<u>Producto</u>: $\hat{y}_t$

De la restricción agregada de recursos de la economía, tenemos:

$$y_t = c_t + i_t \tag{28}$$

En estado estacionario:

$$y = c + i$$

Log-linealizamos la ecuación (28):

$$\begin{aligned} y\left(1+\hat{y}_t\right) &= c\left(1+\hat{c}_t\right)+i\left(1+\hat{i}_t\right) \\ y+y\hat{y}_t &= c+c\hat{c}_t+i+i\hat{i}_t \\ y\hat{y}_t &= c\hat{c}_t+i\hat{i}_t \\ \hat{y}_t &= \frac{c}{y}\hat{c}_t+\frac{i}{y}\hat{i}_t \end{aligned}$$

Sabemos que $y = c + i$ y que $i = \delta k$, entonces: $y = c + \delta k$. Luego, la trayectoria para $\hat{y}_t$ viene dada por:

$$\hat{y}_t = \left(\frac{c}{c+\delta k}\right)\hat{c}_t + \left(\frac{i}{c+\delta k}\right)\hat{i}_t \tag{29}$$

Vemos que $\hat{y}_t$ es función de parámetros conocidos $\{\delta\}$, el estado estado estacionario de $\{c, k\}$ y de las trayectorias de $\hat{c}_{t+1}$, y $\hat{i}_t$ que también las conocemos. Luego, podemos calcular la trayectoria de $\hat{y}_t$ que buscamos.

Ahora, nos falta reproducir las trayectorias de los precios de los factores[9]: $\left\{\hat{w}_t, \hat{R}_t\right\}$.

Salario: $\hat{w}_t$

El salario es igual a la productividad marginal del trabajo, esto es:

$$w_t = (1-\alpha) z_t k_t^{\alpha} n_t^{-\alpha} \tag{30}$$

En estado estacionario:

$$w = (1-\alpha) z k^{\alpha} n^{-\alpha}$$

Log-linealizamos la ecuación (30):

$$w\left(1+\hat{w}_t\right) = (1-\alpha) z k^{\alpha} n^{-\alpha}\left(1+\hat{z}_t+\alpha\hat{k}_t-\alpha\hat{n}_t\right)$$

Luego, la trayectoria para $\hat{w}_t$ viene dada por:

$$\hat{w}_t = \hat{z}_t+\alpha\hat{k}_t-\alpha\hat{n}_t \tag{31}$$

Vemos que $\hat{w}_t$ es función del parámetro conocido $\{\alpha\}$ y de las trayectorias de $\hat{k}_t$, y $\hat{n}_t$ que también las conocemos. Luego, podemos calcular la trayectoria de $\hat{w}_t$ que buscamos.

Costo del Capital: $\hat{R}_t$

[9]Solo por notación: $\left(\frac{w_t}{p_t}\right) = w_t$, y $\left(\frac{r_t}{p_t}\right) = R_t$.

El costo del capital es igual a la productividad marginal del capital, esto es:

$$\hat{R}_t = \alpha z_t k_t^{\alpha-1} n_t^{1-\alpha} \tag{32}$$

En estado estacionario:

$$R = \alpha z k^{\alpha-1} n^{1-\alpha}$$

Log-linealizamos la ecuación (32):

$$R\left(1+\hat{R}_t\right) = \alpha z k^{\alpha-1} n^{1-\alpha}\left(1+\hat{z}_t+(\alpha-1)\hat{k}_t+(1-\alpha)\hat{n}_t\right)$$

Luego, la trayectoria para $\hat{R}_t$ viene dada por:

$$\hat{R}_t = \hat{z}_t+(\alpha-1)\hat{k}_t+(1-\alpha)\hat{n}_t \tag{33}$$

Vemos que $\hat{R}_t$ es función del parámetro conocido $\{\alpha\}$ y de las trayectorias de $\hat{k}_t$, y $\hat{n}_t$ que también las conocemos. Luego, podemos calcular la trayectoria de $\hat{R}_t$ que buscamos.

2. Funciones Impulso Respuesta

Finalmente, una vez que hemos determinado las trayectorias de todas las variables, la rutina realiza un gráfico de estas: