Real Business Cycle: Costos de Ajuste en el Capital

Miguel Alvarado

Julio, 2022

1. Solución Analítica

Hogar representativo:

$$\max_{\{c_t, n_t, k_{t+1}, i_t\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{{c_t}^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{{n_t}^{1+v}}{1+v} \right) \right\}$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} c_t + i_t &= w_t n_t + R_t k_t \\ k_{t+1} &= (1-\delta) k_t + i_t - \frac{\mathcal{X}}{2} k_t \left(\frac{i_t}{k_t} - \frac{i}{k} \right)^2 \end{aligned}$$

el lagrangeano es:

$$l = E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\left(\frac{{c_t}^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{{n_t}^{1+v}}{1+v} \right) + \lambda_t \left\{ w_t n_t + R_t k_t - c_t - i_t \right\} + Q_t \left\{ (1-\delta) k_t + i_t - \frac{\mathcal{X}}{2} k_t \left(\frac{i_t}{k_t} - \frac{i}{k} \right)^2 - k_{t+1} \right\} \right] \right\}$$

De las condiciones de primer orden, donde definimos $q_t = \frac{Q_t}{\lambda_t}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} {c_t}^{-\sigma} - \lambda_t &= 0 \\ -{n_t}^{v} + \lambda_t w_t &= 0 \\ -1 + q_t \left\{ 1 - \mathcal{X} \left[\frac{i_t}{k_t} - \frac{i}{k} \right] \right\} &= 0 \\ q_t - \beta E_t \left\{ \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} R_{t+1} + q_{t+1} \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \left\{ (1-\delta) - \frac{\mathcal{X}}{2} \left[\frac{i_{t+1}}{k_{t+1}} - \frac{i}{k} \right]^2 + \mathcal{X} \left[\frac{i_{t+1}}{k_{t+1}} - \frac{i}{k} \right] \left[\frac{i_{t+1}}{k_{t+1}} \right] \right\} \right\} &= 0 \end{aligned}$$

Firma representativa:

$$\max_{\{n_t, k_t\}} \Pi_t = z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} - w_t n_t - R_t k_t$$

Las condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} w_t &= (1-\alpha) z_t k_t^{\alpha} n_t^{-\alpha} \\ R_t &= \alpha z_t k_t^{\alpha-1} n_t^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Luego, el sistema no lineal de ecuaciones diferenciales estocástico que gobierna la dinámica del modelo, viene dada por:

$$
\begin{aligned}
{c_t}^{-\sigma} - \lambda_t &= 0 \\
-{n_t}^{v} + \lambda_t w_t &= 0 \\
1 - q_t \left\{ 1 - \mathcal{X} \left[\frac{i_t}{k_t} - \frac{i}{k} \right] \right\} &= 0 \\
q_t - \beta E_t \left\{ \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} R_{t+1} + q_{t+1} \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \left\{ (1-\delta) - \frac{\mathcal{X}}{2} \left[\frac{i_{t+1}}{k_{t+1}} - \frac{i}{k} \right]^2 + \mathcal{X} \left[\frac{i_{t+1}}{k_{t+1}} - \frac{i}{k} \right] \left[\frac{i_{t+1}}{k_{t+1}} \right] \right\} \right\} &= 0 \\
(1-\alpha) z_t k_t^{\alpha} n_t^{-\alpha} &= w_t \\
\alpha z_t k_t^{\alpha-1} n_t^{1-\alpha} &= R_t \\
z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} &= y_t \\
c_t + i_t &= y_t \\
(1-\delta) k_t + i_t - \frac{\mathcal{X}}{2} k_t \left(\frac{i_t}{k_t} - \frac{i}{k} \right)^2 &= k_{t+1} \\
\rho_z \log(z_t) + \varepsilon_{t+1} &= \log(z_{t+1})
\end{aligned}
$$

Expresamos este sistema considerando las variables en su estado estacionario, esto es: $x_t = x_{t+1} = x, \forall t$. Así, tenemos el sistema no lineal de ecuaciones que determina el estado estacionario deterministico[1] (Sistema 1):

$$
\begin{aligned}
c^{-\sigma} - \lambda &= 0 \\
-n^{v} + \lambda w &= 0 \\
q - 1 &= 0 \\
\frac{q}{\beta} - (R + (1-\delta) q) &= 0 \\
w - (1-\alpha) z k^{\alpha} n^{-\alpha} &= 0 \\
R - \alpha z k^{\alpha-1} n^{1-\alpha} &= 0 \\
y - z k^{\alpha} n^{1-\alpha} &= 0 \\
y - c - i &= 0 \\
i - \delta k &= 0 \\
z - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

[1] De este sistema, se desprende que $\frac{1}{\beta} = R + (1-\delta)$

Log-linealizamos, en torno al estado estacionario, el sistema no lineal de ecuaciones diferenciales estocástico que gobierna la dinámica del modelo modelo.

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_t &= -\sigma \hat{c}_t && (1)\\
v\hat{n}_t &= \hat{w}_t + \hat{\lambda}_t && (2)\\
\hat{q}_t &= \mathcal{X}\delta\hat{i}_t - \mathcal{X}\delta\hat{k}_t && (3)\\
\hat{\lambda}_t + \hat{q}_t &= E_t\left\{\hat{\lambda}_{t+1} + \beta R\hat{R}_{t+1} + \beta\hat{q}_{t+1}\right\} && (4)\\
\hat{w}_t &= \hat{z}_t + \alpha\hat{k}_t - \alpha\hat{n}_t && (5)\\
\hat{R}_t &= \hat{z}_t + (\alpha-1)\,\hat{k}_t + (1-\alpha)\,\hat{n}_t && (6)\\
\hat{y}_t &= \hat{z}_t + \alpha\hat{k}_t + (1-\alpha)\,\hat{n}_t && (7)\\
y\hat{y}_t &= c\hat{c}_t + i\hat{i}_t && (8)\\
k\hat{k}_{t+1} &= (1-\delta)\,k\hat{k}_t + i\hat{i}_t && (9)\\
\widehat{z_{t+1}} &= \rho_z\hat{z}_t + \varepsilon_{t+1} && (10)
\end{aligned}$$

Luego, nuestro sistema debe ser colpasado en tres ecuaciones, las que poseen dinámica, es decir, ecuaciones (4), (9) y (10), tal que el sistema solo sea función de tres variables: $\left\{\hat{c}, \hat{k}, \hat{z}\right\}$.

De este modo, después de un poco de álgebra y el algunos cambios de variables, para reducir el tamaño de las expresiones, se tiene (Sistema 2):

$$\begin{aligned}
a_1\hat{c}_t + a_2\hat{k}_t + a_3\hat{z}_t &= b_1\hat{c}_{t+1} + b_2\hat{k}_{t+1} + b_3\hat{z}_{t+1} + b_1\hat{\mu}^c_{t+1} + b_2\hat{\mu}^k_{t+1} + b_3\hat{\mu}^z_{t+1} && (11)\\
d_1\hat{c}_t + d_2\hat{k}_t + d_3\hat{z}_t &= \hat{k}_{t+1} && (12)\\
\rho_z\hat{z}_t &= \hat{z}_{t+1} - \varepsilon_{t+1} && (13)
\end{aligned}$$

donde:

$$\phi_1 = \frac{\sigma(1-\alpha)}{v+\alpha} \quad , \quad \phi_2 = \frac{v(\alpha-1)}{v+\alpha} \quad , \quad \phi_3 = \frac{\alpha(v+1)}{v+\alpha} \quad , \quad \phi_4 = \frac{v+1}{v+\alpha}$$

$$m_1 = \frac{y}{i} \quad , \quad m_2 = \frac{c}{i}$$

$$a_1 = -\left(\sigma + \mathcal{X}\delta\left(\phi_1 m_1 + m_2\right)\right) \quad , \quad a_2 = \left(\phi_3 m_1 - 1\right)\mathcal{X}\delta \quad , \quad a_3 = \mathcal{X}\delta\left(\phi_4 m_1\right)$$

$$b_1 = -\left[\sigma + \beta R\phi_1 + \beta\mathcal{X}\delta\left(\phi_1 m_1 + m_2\right)\right] \quad , \quad b_2 = \beta R\phi_2 + \beta\left(\phi_3 m_1 - 1\right)\mathcal{X}\delta \quad , \quad b_3 = \beta R\phi_4 + \beta\mathcal{X}\delta\left(\phi_4 m_1\right)$$

$$d_1 = -\delta\left(\phi_1 m_1 + m_2\right) \quad , \quad d_2 = \delta\left(\phi_3 m_1\right) + (1-\delta) \quad , \quad d_3 = \delta\left(\phi_4 m_1\right)$$

Finalmente, las ecuaciones (11), (12) y (13) se pueden expresar matricialmente como sigue[2]:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ 0 & 0 & \rho_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_t \\ \hat{k}_t \\ \hat{z}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_{t+1} \\ \hat{k}_{t+1} \\ \hat{z}_{t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \hat{\mu}^c_{t+1} \\ \hat{\mu}^k_{t+1} \\ \hat{\mu}^z_{t+1} \end{bmatrix}$$

Finalmente, la rutina programada en Matlab, nos selecciona los autovectores asociados al autovalor estable. En este caso, donde tenemos una única raiz estable, nos selecciona el autovector q, de dimensión 1×3, asociado a dicha raiz. Luego, sabemos que:

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_t \\ \hat{k}_t \\ \hat{z}_t \end{bmatrix} = 0$$

Esto es:

$$q_{11}\hat{c}_t + q_{12}\hat{k}_t + q_{13}\hat{z}_t = 0$$

de donde, despejando para $\hat{c}_t$, y además reemplazando esto en la ecuación log-linealizada (12) y, por otro lado, dado el proceso autoregresivo, tenemos el sistema que soluciona el modelo, es decir, las ecuaciones que determinan la trayectoria de las variables: $\left\{\hat{c}_t, \hat{k}_{t+1}, \hat{z}_{t+1}\right\}$, notando que, al ser una variable predeterminada, $\hat{k}_1 = 0$.

$$\begin{aligned} \hat{z}_{t+1} &= \rho_z \hat{z}_t && (14) \\ \hat{c}_t &= -\left(\frac{q_{12}}{q_{11}}\right)\hat{k}_t - \left(\frac{q_{13}}{q_{11}}\right)\hat{z}_t && (15) \\ \hat{k}_{t+1} &= d_1\left(-\left(\frac{q_{12}}{q_{11}}\right)\hat{k}_t - \left(\frac{q_{13}}{q_{11}}\right)\hat{z}_t\right) + d_2\hat{k}_t + d_3\hat{z}_t && (16) \end{aligned}$$

Con estas trayectorias, y del sistema log-linealizado (Ecuaciones (1) - (10) de esta sección) y un poco de álgebra, recuperamos las restantes soluciones (trayectorias).

Por ejemplo, con las ecuaciones (1) y (5) en (2), se tiene la trayectoria para $\hat{n}_t$[3]:

$$\hat{n}_t = \frac{-\sigma}{v+\alpha}\hat{c}_t + \frac{\alpha}{v+\alpha}\hat{k}_t + \frac{1}{v+\alpha}\hat{z}_t \qquad (17)$$

[2]Notemos que existe una otra factorización del sistema que genera las mismas soluciones. Este es:

$$\begin{bmatrix} -\sigma & -\mathcal{X} & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ 0 & 0 & \rho_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_t \\ \hat{k}_t \\ \hat{z}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & (b_2 - \mathcal{X}) & b_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_{t+1} \\ \hat{k}_{t+1} \\ \hat{z}_{t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \hat{\mu}^c_{t+1} \\ \hat{\mu}^k_{t+1} \\ \hat{\mu}^z_{t+1} \end{bmatrix}$$

[3]El resto de las trayectorias, como se señala, se obtienen del sistema de ecuaciones (1 - 10). Esto es evidente en el m.file de Matlab.

2. Funciones Impulso Respuesta

Finalmente, una vez que hemos determinado las trayectorias de todas las variables, la rutina realiza un gráfico de estas: