Real Business Cycle: Costos de Ajuste en la Inversión

Miguel Alvarado

Julio, 2022

1. Solución Analítica

Hogar representativo:

$$\max_{\{c_t, n_t, k_{t+1}, i_t\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{{c_t}^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{{n_t}^{1+v}}{1+v} \right) \right\}$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} c_t + i_t &= w_t n_t + R_t k_t \\ k_{t+1} &= (1-\delta) k_t + i_t - \frac{\mathcal{X}}{2} i_t \left(\frac{i_t}{i_{t-1}} - 1 \right)^2 \end{aligned}$$

el lagrangeano es:

$$l = E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\left(\frac{{c_t}^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{{n_t}^{1+v}}{1+v} \right) + \lambda_t \left\{ w_t n_t + R_t k_t - c_t - i_t \right\} + Q_t \left\{ (1-\delta) k_t + i_t - \frac{\mathcal{X}}{2} i_t \left(\frac{i_t}{i_{t-1}} - 1 \right)^2 - k_{t+1} \right\} \right] \right\}$$

De las condiciones de primer orden, donde definimos $q_t = \frac{Q_t}{\lambda_t}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} {c_t}^{-\sigma} - \lambda_t &= 0 \\ -{n_t}^{v} + \lambda_t w_t &= 0 \\ -1 + q_t \left(1 - \frac{\mathcal{X}}{2} \left[3 \frac{{i_t}^2}{{i_{t-1}}^2} - 4 \frac{i_t}{i_{t-1}} + 1 \right] \right) + \beta E_t \left\{ q_{t+1} \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} \mathcal{X} \left[\frac{{i_{t+1}}^3}{{i_t}^3} - \frac{{i_{t+1}}^2}{{i_t}^2} \right] \right\} &= 0 \\ q_t - \beta E_t \left\{ \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} R_{t+1} + q_{t+1} \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} (1-\delta) \right\} &= 0 \end{aligned}$$

Firma representativa:

$$\max_{\{n_t, k_t\}} \Pi_t = z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} - w_t n_t - R_t k_t$$

Las condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} w_t &= (1-\alpha) z_t k_t^{\alpha} n_t^{-\alpha} \\ R_t &= \alpha z_t k_t^{\alpha-1} n_t^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Luego, el sistema no lineal de ecuaciones diferenciales estocástico que gobierna la dinámica del modelo, viene dada por:

$$
\begin{aligned}
{c_t}^{-\sigma} - \lambda_t &= 0 \\
-{n_t}^{v} + \lambda_t w_t &= 0 \\
-1 + q_t\left(1 - \frac{\mathcal{X}}{2}\left[3\frac{{i_t}^2}{{i_{t-1}}^2} - 4\frac{i_t}{i_{t-1}} + 1\right]\right) + \beta E_t\left\{q_{t+1}\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}\mathcal{X}\left[\frac{{i_{t+1}}^3}{{i_t}^3} - \frac{{i_{t+1}}^2}{{i_t}^2}\right]\right\} &= 0 \\
q_t - \beta E_t\left\{\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}R_{t+1} + q_{t+1}\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}(1-\delta)\right\} &= 0 \\
(1-\alpha) z_t k_t^{\alpha} n_t^{-\alpha} &= w_t \\
\alpha z_t k_t^{\alpha-1} n_t^{1-\alpha} &= R_t \\
z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} &= y_t \\
c_t + i_t &= y_t \\
(1-\delta) k_t + i_t - \frac{\mathcal{X}}{2} i_t\left(\frac{i_t}{i_{t-1}} - 1\right)^2 &= k_{t+1} \\
\rho_z \log(z_t) + \varepsilon_{t+1} &= \log(z_{t+1})
\end{aligned}
$$

Expresamos este sistema considerando las variables en su estado estacionario, esto es: $x_t = x_{t+1} = x, \forall t$. Así, tenemos el sistema no lineal de ecuaciones que determina el estado estacionario deterministico[1] (Sistema 1):

$$
\begin{aligned}
c^{-\sigma} - \lambda &= 0 \\
-n^{v} + \lambda w &= 0 \\
q - 1 &= 0 \\
\frac{q}{\beta} - (R + (1-\delta) q) &= 0 \\
w - (1-\alpha) z k^{\alpha} n^{-\alpha} &= 0 \\
R - \alpha z k^{\alpha-1} n^{1-\alpha} &= 0 \\
y - z k^{\alpha} n^{1-\alpha} &= 0 \\
y - c - i &= 0 \\
i - \delta k &= 0 \\
z - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

[1] De este sistema, se desprende que $\frac{1}{\beta} = R + (1-\delta)$

Log-linealizamos, en torno al estado estacionario, el sistema no lineal de ecuaciones diferenciales estocástico que gobierna la dinámica del modelo modelo.

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_t &= -\sigma \hat{c}_t \\
v\hat{n}_t &= \hat{w}_t + \hat{\lambda}_t \\
\hat{q}_t &= \mathcal{X}\left(\hat{i}_t - \hat{i}_{t-1}\right) - E_t\left\{\beta\mathcal{X}\left(\hat{i}_{t+1} - \hat{i}_t\right)\right\} \\
\hat{q}_t &= E_t\left\{\hat{\lambda}_{t+1} - \hat{\lambda}_t + \beta R\hat{R}_{t+1} + \beta(1-\delta)\hat{q}_{t+1}\right\} \\
\hat{w}_t &= \hat{z}_t + \alpha\hat{k}_t - \alpha\hat{n}_t \\
\hat{R}_t &= \hat{z}_t + (\alpha - 1)\hat{k}_t + (1-\alpha)\hat{n}_t \\
\hat{y}_t &= \hat{z}_t + \alpha\hat{k}_t + (1-\alpha)\hat{n}_t \\
y\hat{y}_t &= c\hat{c}_t + i\hat{i}_t \\
k\hat{k}_{t+1} &= (1-\delta)k\hat{k}_t + i\hat{i}_t \\
\hat{z}_{t+1} &= \rho_z\hat{z}_t + \varepsilon_{t+1}
\end{aligned}$$

En la tercera ecuación de este último sistema, hago uso de la siguiente variable auxiliar:

$$\hat{I}_t = \hat{i}_{t-1}$$

Con esto, el sistema puede ser expresado del modo siguiente:

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_t &= -\sigma \hat{c}_t && (1)\\
v\hat{n}_t &= \hat{w}_t + \hat{\lambda}_t && (2)\\
\hat{q}_t &= (1+\beta)\mathcal{X}\hat{i}_t - \mathcal{X}\hat{I}_t - E_t\left\{\beta\mathcal{X}\hat{i}_{t+1}\right\} && (3)\\
\hat{\lambda}_t + \hat{q}_t &= E_t\left\{\hat{\lambda}_{t+1} + \beta R\hat{R}_{t+1} + \beta(1-\delta)\hat{q}_{t+1}\right\} && (4)\\
\hat{w}_t &= \hat{z}_t + \alpha\hat{k}_t - \alpha\hat{n}_t && (5)\\
\hat{R}_t &= \hat{z}_t + (\alpha - 1)\hat{k}_t + (1-\alpha)\hat{n}_t && (6)\\
\hat{y}_t &= \hat{z}_t + \alpha\hat{k}_t + (1-\alpha)\hat{n}_t && (7)\\
y\hat{y}_t &= c\hat{c}_t + i\hat{i}_t && (8)\\
k\hat{k}_{t+1} &= (1-\delta)k\hat{k}_t + i\hat{i}_t && (9)\\
\hat{z}_{t+1} &= \rho_z\hat{z}_t + \varepsilon_{t+1} && (10)\\
\hat{I}_{t+1} &= \hat{i}_t && (11)
\end{aligned}$$

Luego, nuestro sistema debe ser colpasado en cinco ecuaciones, las que poseen dinámica, es decir, ecuaciones (3), (4), (9), (10) y la nueva ecuación (11), tal que el sistema solo sea función de cinco variables: $\left\{\hat{c}, \hat{k}, \hat{z}, \hat{q}, \hat{I}\right\}$.

De este modo, después de un poco de álgebra y el algunos cambios de variables, para reducir el tamaño de las expresiones, se tiene (Sistema 2):

$$
\begin{aligned}
-\sigma\hat{c}_t+\hat{q}_t &= h_1\hat{c}_{t+1}+h_4\hat{q}_{t+1}+h_2\hat{k}_{t+1}+h_3\hat{z}_{t+1}+h_1\hat{\mu}^c_{t+1}+h_4\hat{\mu}^q_{t+1}+h_2\hat{\mu}^k_{t+1}+h_3\hat{\mu}^z_{t+1} && (12)\\
p_1\hat{c}_t+\hat{q}_t+\mathcal{X}\hat{I}_t+p_2\hat{k}_t+p_3\hat{z}_t &= -f_3\hat{c}_{t+1}-f_4\hat{k}_{t+1}-f_5\hat{z}_{t+1}-f_3\hat{\mu}^c_{t+1}-f_4\hat{\mu}^k_{t+1}-f_5\hat{\mu}^z_{t+1} && (13)\\
d_1\hat{c}_t+d_2\hat{k}_t+d_3\hat{z}_t &= \hat{I}_{t+1} && (14)\\
r_1\hat{c}_t+r_2\hat{k}_t+r_3\hat{z}_t &= \hat{k}_{t+1} && (15)\\
\rho_z\hat{z}_t &= \hat{z}_{t+1}-\varepsilon_{t+1} && (16)
\end{aligned}
$$

donde:

$$p_1=-(1+\beta)\mathcal{X}d_1 \quad , \quad p_2=-(1+\beta)\mathcal{X}d_2 \quad , \quad p_3=-(1+\beta)\mathcal{X}d_3$$

$$f_3=\beta\mathcal{X}d_1 \quad , \quad f_4=\beta\mathcal{X}d_2 \quad , \quad f_5=\beta\mathcal{X}d_3$$

$$r_1=(1-\alpha)e_1a_1-e_2 \quad , \quad r_2=(1-\delta)+\alpha e_1+(1-\alpha)e_1a_2 \quad , \quad r_3=e_1+(1-\alpha)e_1a_3$$

$$e_1=\frac{y}{k} \quad , \quad e_2=\frac{c}{k} \quad , \quad b_1=\frac{y}{i} \quad , \quad b_2=\frac{c}{i}$$

$$a_1=\frac{-\sigma}{v+\alpha} \quad , \quad a_2=\frac{\alpha}{v+\alpha} \quad , \quad a_3=\frac{1}{v+\alpha}$$

$$d_1=(1-\alpha)b_1a_1-b_2 \quad , \quad d_2=\alpha b_1+(1-\alpha)b_1a_2 \quad , \quad d_3=b_1+(1-\alpha)b_1a_3$$

$$g_1=(1-\alpha)a_1 \quad , \quad g_2=(\alpha-1)+(1-\alpha)a_2 \quad , \quad g_3=1+(1-\alpha)a_3$$

$$h_1=-(\sigma-\beta Rg_1) \quad , \quad h_2=\beta Rg_2 \quad , \quad h_3=\beta Rg_3 \quad , \quad h_4=\beta(1-\delta)$$

Finalmente, las ecuaciones (12), (13), (14), (15) y (16) se pueden expresar matricialmente como sigue:

$$
\begin{bmatrix}-\sigma & 1 & 0 & 0 & 0\\ p_1 & 1 & \mathcal{X} & p_2 & p_3\\ d_1 & 0 & 0 & d_2 & d_3\\ r_1 & 0 & 0 & r_2 & r_3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_z\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\hat{c}_t\\ \hat{q}_t\\ \hat{I}_t\\ \hat{k}_t\\ \hat{z}_t\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}h_1 & h_4 & 0 & h_2 & h_3\\ -f_3 & 0 & 0 & -f_4 & -f_5\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\hat{c}_{t+1}\\ \hat{q}_{t+1}\\ \hat{I}_{t+1}\\ \hat{k}_{t+1}\\ \hat{z}_{t+1}\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}0 & h_1 & h_4 & 0 & h_2 & h_3\\ 0 & -f_3 & 0 & 0 & -f_4 & -f_5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\varepsilon_{t+1}\\ \hat{\mu}^c_{t+1}\\ \hat{\mu}^q_{t+1}\\ \hat{\mu}^I_{t+1}\\ \hat{\mu}^k_{t+1}\\ \hat{\mu}^z_{t+1}\end{bmatrix}
$$

Finalmente, la rutina programada en Matlab, nos selecciona el autovector asociado al autovalor estable. En este caso, donde tenemos dos raices estables, nos selecciona los autovectores q, de dimensión 2, asociados a dichas raices. Luego, sabemos que:

$$
\begin{bmatrix}q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & q_{15}\\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} & q_{25}\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\hat{c}_t\\ \hat{q}_t\\ \hat{I}_t\\ \hat{k}_t\\ \hat{z}_t\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}
$$

Esto es:

$$q_{11}\hat{c}_t + q_{12}\hat{q}_t + q_{13}\hat{I}_t + q_{14}\hat{k}_t + q_{15}\hat{z}_t = 0 \tag{17}$$

$$q_{21}\hat{c}_t + q_{22}\hat{q}_t + q_{23}\hat{I}_t + q_{24}\hat{k}_t + q_{25}\hat{z}_t = 0 \tag{18}$$

de donde, despejando para $\hat{q}_t$ de (18):

$$\hat{q}_t = -\frac{q_{21}}{q_{22}}\hat{c}_t - \frac{q_{23}}{q_{22}}\hat{I}_t - \frac{q_{24}}{q_{22}}\hat{k}_t - \frac{q_{25}}{q_{22}}\hat{z}_t \tag{19}$$

Reemplazando esto último en (17), y un poco de álgebra, se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= q_{11}\hat{c}_t + q_{12}\left\{-\frac{q_{21}}{q_{22}}\hat{c}_t - \frac{q_{23}}{q_{22}}\hat{I}_t - \frac{q_{24}}{q_{22}}\hat{k}_t - \frac{q_{25}}{q_{22}}\hat{z}_t\right\} + q_{13}\hat{I}_t + q_{14}\hat{k}_t + q_{15}\hat{z}_t \\ 0 &= \left(q_{11} - \frac{q_{12}q_{21}}{q_{22}}\right)\hat{c}_t - \left(\frac{q_{12}q_{23}}{q_{22}} - q_{13}\right)\hat{I}_t - \left(\frac{q_{12}q_{24}}{q_{22}} - q_{14}\right)\hat{k}_t - \left(\frac{q_{12}q_{25}}{q_{22}} - q_{15}\right)\hat{z}_t \qquad (20) \end{aligned}$$

Realizamos un cambios de variable sobre los coeficientes en las ecuaciones (19) y (20). De esta última despejamos para $\hat{c}_t$. Luego con las ecuaciones para $\hat{c}_t$ y $\hat{q}_t$, reemplazamos en las ecuaciones log-linealizadas (14) y (15) de esta sección y con el proceso autoregresivo, tenemos el sistema que soluciona el modelo, es decir, las ecuaciones que determinan la trayectoria de las variables: $\left\{\hat{c}_t, \hat{q}_t, \hat{k}_{t+1}, \hat{I}_{t+1}, \hat{z}_{t+1}\right\}$, notando que, al ser variable predeterminada, $\hat{k}_1 = 0$ y dada la defición de $\hat{I}_t = \hat{i}_{t-1}$, se tiene que $\hat{I}_1 = 0$. Entonces, el sistema es:

$$\hat{c}_t = \frac{\omega_2}{\omega_1}\hat{I}_t + \frac{\omega_3}{\omega_1}\hat{k}_t + \frac{\omega_4}{\omega_1}\hat{z}_t \tag{21}$$

$$\hat{q}_t = \mu_1\hat{c}_t + \mu_2\hat{I}_t + \mu_3\hat{k}_t + \mu_4\hat{z}_t \tag{22}$$

$$\hat{k}_{t+1} = r_1\left\{\frac{\omega_2}{\omega_1}\hat{I}_t + \frac{\omega_3}{\omega_1}\hat{k}_t + \frac{\omega_4}{\omega_1}\hat{z}_t\right\} + r_2\hat{k}_t + r_3\hat{z}_t \tag{23}$$

$$\hat{I}_{t+1} = d_1\left\{\frac{\omega_2}{\omega_1}\hat{I}_t + \frac{\omega_3}{\omega_1}\hat{k}_t + \frac{\omega_4}{\omega_1}\hat{z}_t\right\} + d_2\hat{k}_t + d_3\hat{z}_t \tag{24}$$

$$\hat{z}_{t+1} = \rho_z\hat{z}_t \tag{25}$$

Con estas trayectorias, y del sistema log-linealizado (Ecuaciones (1) - (11) de esta sección) y un poco de álgebra, recuperamos las restantes soluciones (trayectorias).

Por ejemplo, con las ecuaciones (1) y (5) en (2), se tiene la trayectoria para $\hat{n}_t$[2]:

$$\hat{n}_t = \frac{-\sigma}{v+\alpha}\hat{c}_t + \frac{\alpha}{v+\alpha}\hat{k}_t + \frac{1}{v+\alpha}\hat{z}_t \tag{26}$$

[2] El resto de las trayectorias, como se señala, se obtienen del sistema de ecuaciones (1 - 11). Esto es evidente en el m.file de Matlab.

2. Funciones Impulso Respuesta

Finalmente, una vez que hemos determinado las trayectorias de todas las variables, la rutina realiza un gráfico de estas: