**Proposta de Reserva: Abordagem Heurística**

**Professora Leonor Santiago Pinto**

Joana Lacerda (53581), Mariana Andrade (53579), Miguel Cruz (53686), Rodrigo Neves (53599)

1. **Abstract**

Este trabalho aborda um problema relativo à conservação de espécies, tendo como objetivo a elaboração de uma proposta de reserva com o número mínimo de povoamentos possível, sendo que cada espécie deverá estar presente em não menos do que dois povoamentos ligados entre si. Para o resolver foram desenvolvidas duas heurísticas (uma construtiva e outra melhorativa) com a respetiva programação em R, foi feita uma análise da relaxação e recorreu-se a um método evolutivo (em Excel) e um algoritmo com base na formulação em programação linear. O relatório termina com a comparação dos resultados dos vários métodos.

Keywords:

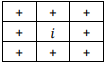
- Heurísticas

- Algoritmos

- Programação Linear Inteira

1. **Introdução**

Este relatório surge no seguimento do primeiro trabalho da Unidade Curricular de Investigação Operacional 2. Foi solicitado a cada um dos grupos, após apresentação de um problema, a idealização de uma Heurística Construtiva, uma Heurística Melhorativa, um minorante do valor ótimo do problema através da resolução de uma relaxação do mesmo e, por fim, comparar as soluções obtidas a partir de cada um dos processos enumerados anteriormente.

O problema apresentado é a elaboração de uma proposta para fazer uma reserva para conservação de um certo conjunto de espécies. Esta reserva deverá conter o número mínimo de povoamentos possível de forma a respeitar a restrição relativa a este problema: cada espécie deverá estar presente em não menos do que dois povoamentos ligados entre si. O critério de ligação de povoamentos é o seguinte:

Foi-nos pedido para testar os nossos métodos com a seguinte instância relativamente a:

1. Posicionamento dos povoamentos na reserva

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 |  |  |
| 4 | 5 | 6 | 7 |  |
| 8 | 9 | 10 | 11 |  |
| 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 |  |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

1. Presença de espécies em cada um dos povoamentos

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Espécies** | | | | | | |
| **original** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
| **1** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| **3** | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| **4** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **5** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **6** | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **7** | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| **8** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **9** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| **10** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| **11** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| **12** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| **13** | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| **14** | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| **15** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **16** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **17** | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| **18** | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| **19** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| **20** | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **21** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **22** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **23** | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| **24** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **25** | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

De forma a resolver este problema, o nosso grupo começou por formalizar uma relaxação do problema. Após este passo calculámos o minorante de uma relaxação no *Excel* e também uma solução a partir do método evolutivo. Passando à fase das Heurísticas, escrevemo-las em texto e programámo-las em R.

1. **Relaxação**

Como apresentado na introdução, para chegarmos a um minorante do problema decidimos resolver uma relaxação do mesmo em *Excel*, utilizando o *Solver* e retirando a condição que garante que, para cada espécie, dois dos povoamentos em que a mesma está presente são vizinhos.

Uma solução deste problema de cobertura múltipla é um conjunto de povoamentos a ser escolhido. Nesse sentido, atribuiu-se a cada povoamento a variável , i . Esta variável irá assumir o valor 1 caso o povoamento i seja escolhido e 0 no caso contrário.

Outra informação relevante para a resolução do problema é se uma determinada espécie existe num determinado povoamento. De modo a facilitar o entendimento da formalização decidiu-se atribuir a denominação , i , à informação dada pela tabela referente à presença de espécies em cada um dos povoamentos. Assim, aij assume o valor 1 caso a espécie j esteja no povoamento i e 0 caso contrário.

Assim sendo a formalização fica:

[1]

s.a. , [2]

Desta maneira garantimos, através de [1], que o número de povoamentos selecionados deve ser tão reduzido quanto possível e, através das 7 restrições de [2], que cada espécie está pelo menos em 2 povoamentos.

Recorrendo ao solver do excel obteve se a solução de 4 povoamentos (2,10,12,17).

1. **Método Evolutivo**

Após a resolução da relaxação do problema decidimos calcular uma possível solução, incluindo todas as condições do problema inicial, a partir do método evolutivo.

Para isso, criámos uma fórmula não linear que determina a vizinhança de cada povoamento com base nos endereços (em *Excel*) de cada um dos povoamentos no mapa, sendo que o valor 1 corresponde a povoamentos vizinhos e 0 ao caso contrário. Considera-se que um povoamento é vizinho dele próprio.

De modo a garantir que cada espécie está presente em pelo menos 2 vizinhos impuseram-se 7 restrições (uma referente a cada espécie), utilizando a função de máximo – dado que a função vai de povoamento a povoamento e verifica quantos vizinhos tem com a mesma espécie. De forma a analisar as vizinhanças de cada um dos povoamentos são necessários 25 argumentos, uma vez que a nossa instância inicial apresenta 25 povoamentos.

Esta análise da vizinhança só acontece quando o povoamento em análise tiver a espécie a que se refere a restrição e esteja a ser escolhido para a solução.

Utilizando o método evolutivo, chegámos a uma solução com 5 povoamentos: 2, 3, 6, 9 e 12.

Uma vez que esta solução não tem o mesmo valor que o minorante do problema obtido anteriormente, não podemos afirmar que esta é ótima, mas será, possivelmente, um valor mais perto da solução ótima do que as soluções que iremos obter posteriormente a partir de ambas as heurísticas.

1. **Heurísticas**

Fomos desafiados a estruturar duas Heurísticas, uma Construtiva e uma Melhorativa.

* 1. *Heurística Construtiva*

No que toca à Heurística Construtiva o objetivo da mesma é ser bastante simples e chegar a uma solução admissível mesmo que esteja longe de ser a ótima.

A lista L irá representar as espécies ainda não analisadas. Os conjuntos P e S começam vazios, o P irá representar os povoamentos já analisados e o S irá representar os povoamentos que compõe a solução.

**Input:** n espécies; m povoamentos; Vi conjunto dos povoamentos vizinhos do povoamento i (i={1 , … , m}) excluindo o próprio.

**Passo 0**

Criar uma lista L = {1,2, … , n} com todas as espécies, um conjunto P vazio e um conjunto S vazio.

Escolher o povoamento i que tenha mais espécies. Se houver empate, desempatar arbitrariamente.

[Obs.1]

**Passo 1**

Para a primeira espécie j (que pertença a L) presente no povoamento i, ver se esta espécie também está presente em algum elemento k de Vi.

Se estiver, inserir esse povoamento k (se e só se kS) no conjunto S = S + {k}. Retirar a espécie j da lista L = L – {j}.

**Passo 2**

Passar para a próxima espécie (que pertença a L) em i e repetir o passo 1 para esta espécie até:

1. não restarem espécies para analisar em i. Se S ≠ {} então adicionar o povoamento i ao conjunto S. - Passo 3

ou

1. L = {}. Adicionar i a S - STOP.

[Obs. 2]

**Passo 3**

Atualizar P = P + {i}.

Escolher arbitrariamente um povoamento h do conjunto S (hP) que contenha uma das espécies ainda restantes em L.

[Obs. 3]

Se não existir um povoamento h nestas condições passar para o passo 4.

Caso contrário, repetir o Passo 1 para o povoamento h.

**Passo 4**

Escolher o povoamento r com mais espécies na lista L e que não esteja em S. Se houver empate, desempatar arbitrariamente. Repetir Passo 1 para o povoamento r.

Se L={}, STOP.

Caso contrário, repetir o passo 4.

Algumas observações:

[Obs. 1] Apesar de selecionarmos o povoamento com mais espécies, sabemos que tal não garante de maneira alguma um resultado melhor. Tal como na heurística de custo mínimo usada no problema de transportes.

[Obs. 2] Apenas inserimos o povoamento i no fim do passo 3 para evitar inseri-lo mais do que uma vez. Tal aconteceria se existissem múltiplos vizinhos que verificavam a condição de ter a mesma espécie.

[Obs. 3] Temos de garantir que hP, de modo a assegurar que o povoamento escolhido é um vizinho e não um já analisado.

Exemplo de execução:

**Passo 0**

L = {1,2,3,4,5,6,7}, P = {} , S = {}, i=6

**Passo 1**

j=2; k=3; S= {3}; L={1,3,4,5,6,7}

**Passo 2**

j=3; k=2; S={2,3}; L={1,4,5,6,7}

j=4; k=2; S={2,3}; L={1,5,6,7}

j=5; k=3; S={2,3}; L= {1,6,7}

j=6; k=2; S= {2,3}; L = {1,7}

j=7; k=2; S={2,3}; L={1}

S={2,3,6}

Não restam espécies para analisar em i.

**Passo 3**

P={6}

h=3

**Passo 1**

j=1; não existe nenhum povoamento k nas condições

**Passo 3**

P={6,3}

Não existe nenhum povoamento h nestas condições.

**Passo 4**

r=4

**Passo 1**

j=1; k=9; S={2,3,4,6,9}; L={}

**Passo 2**

L={} STOP

Seguindo a heurística descrita, a solução consiste em inserir na reserva os povoamentos 2,3,4,6,9.

* 1. *Heurística Melhorativa*

No caso das Heurísticas Melhorativas, estas são inicializadas pegando numa solução admissível e, a partir dela, chegar a uma melhor solução para o problema. Por esta razão, as mesmas dependem da solução inicial com que se inicializa a Heurística.

No nosso caso, iremos iniciar a Heurística Melhorativa a partir da solução obtida na Heurística Construtiva.

Com isto, a lista S irá representar os povoamentos que compõe a solução. A lista S’ será uma cópia da lista S inicial que irá conter os povoamentos ainda não analisados. A lista T será auxiliar e irá conter os povoamentos eliminados no passo 3.

**Input:** n espécies; m povoamentos; Vi conjunto dos povoamentos vizinhos do povoamento i (i={1 , … , m}) excluindo o próprio; Lista S povoamentos na solução admissível.

**Passo 1**

Considerar uma solução admissível. Criar lista S’=S. Criar lista T = {}.

**Passo 2**

Escolher arbitrariamente um povoamento i de S (iS’). Eliminá-lo permanentemente da lista S’. Eliminá-lo temporariamente da lista S. Ver se a solução continua admissível, ou seja, se cada espécie está presente em, pelo menos, dois povoamentos vizinhos.

Se a solução continuar admissível – eliminar i permanentemente da lista S e repetir o passo 2 até não haver mais povoamentos para analisar em S. ( S’={}).

Se a solução não continuar admissível – repor i na lista S. Repetir o Passo 2 até S’={}.

Ir para o Passo 3.

**Passo 3**

Escolher o povoamento k em S que se encontra no canto superior esquerdo. Ver que espécies tem em comum com os povoamentos que verificam Vk∩S. Ver se existe algum povoamento y (yT), vizinho de todos vizinhos de k (com os quais k tenha espécies em comum). Este vizinho terá que conter, pelo menos, as mesmas espécies em comum.

Se houver um povoamento y nestas condições, eliminar k da lista S e substituí-lo por y. Atualizar T=T+{k}. Caso contrário, manter o povoamento k na lista S e não alterar T.

[Obs. 4]

Repetir o passo 3, escolhendo por filas, da esquerda para a direita um povoamento k até serem escolhidos todos os povoamentos em S.

Se houver substituições na lista S – repetir o Passo 2 com S’=S.

Caso contrário – STOP.

Algumas observações:

[Obs.4]

Quando não for possível eliminar mais povoamentos vamos verificar se é possível substituir algum povoamento i por um k que tenha:

1) os mesmos vizinhos (consideramos apenas os vizinhos que tenham espécies em comum com o i);

2) pelo menos as mesmas espécies em comum.

Se for possível, substituímos (ou seja, ficamos com o mesmo número de povoamentos). Isto cria a possibilidade de eliminar povoamentos quando repetirmos o passo 1.

Exemplo de execução:

**Passo 1**

S = {2,3,4,6,9}; S’={2,3,4,6,9}; T={}

**Passo 2**

i=2; S= {3,4,6,9}; S’={3,4,6,9}

A solução não continua admissível. S= {2,3,4,6,9}

i=3; S= {2,4,6,9}; S’={4,6,9}

A solução não continua admissível. S={2,3,4,6,9}

i=4; S= {2,3,6,9}; S’={6,9}

A solução não continua admissível. S={2,3,4,6,9}

i=6; S= {2,3,4,9}; S’={9}

A solução não continua admissível. S={2,3,4,6,9}

i=9; S={2,3,4,6}; S’={}

A solução não continua admissível. S={2,3,4,6,9}

S’={} – Passo 3

**Passo 3**

k=2; vizinhos={3,4,6}; Espécies em comum com o 3 ={7}, com o 4={}, com o 6={3,4,6,7}. Não existe nenhum povoamento y nas condições.

k=3; vizinhos={2,6}; Espécies em comum com o 2={7}, com o 6={2,5,7}. Não existe nenhum povoamento y nas condições.

k=4; vizinhos={2,9}; Espécies em comum com o 2={} com o 9={1}. y=12. S={2,3,6,9,12}. T={4}.

k=6; vizinhos={2,3,9}; Espécies em comum com o 2={3,4,6,7}, com o 3={2,5,7}, com o 9={7}. Não existe nenhum povoamento y nas condições.

k=9; vizinhos={6,12}; Espécies em comum com 6={7}, com o 12={1}. Não existe nenhum povoamento y nas condições.

k=12; vizinhos={9}; Espécies em comum com o 9={1}. Não existe nenhum povoamento y nas condições.

Houve substituições na lista S. Repetir Passo 2.

**Passo 2**

Repetir o passo 2 com S={2,3,6,9,12}

Não dá para eliminar nenhum povoamento.

Solução continua S={2,3,6,9,12}

**Passo 3**

Repetindo o passo 3 com S={2,3,6,9,12} não existe nenhuma substituição possível nas condições. STOP.

Seguindo a heurística descrita a solução consiste em inserir na reserva os povoamentos 2,3,6,9,12.

1. **Comparação de resultados**

Após a resolução do mesmo problema a partir de vários métodos, devemos agora comparar as soluções obtidas. Com isto, pretendemos avaliar a qualidade das nossas Heurísticas.

Apresentando de forma sucinta as soluções obtidas:

* Minorante a partir do *Solver*:
  + Valor da função objetivo: 4
  + Povoamentos na solução: {2,10,12,17}
* Método evolutivo:
  + Valor da função objetivo: 5
  + Povoamentos na solução: {2,3,6,9,12}
* Heurística Construtiva:
  + Valor da função objetivo: 5
  + Povoamentos na solução: {2,3,4,6,9}
* Heurística Melhorativa:
  + Valor da função objetivo: 5
  + Povoamentos na solução: {2,3,6,9,12}

Tendo estes valores em conta, inicialmente podemos observar que não temos qualquer garantia de termos atingido o valor ótimo do problema, uma vez que o valor do minorante não foi atingido a partir dos outros métodos. Observa-se ainda que o povoamento 2 se encontra em todas as soluções e que os povoamentos 3, 6 e 9 também estão presentes na maioria delas. Isto poderá ser justificado pelo facto de serem os povoamentos que têm mais espécies e pelo facto de os povoamentos 3 e 9 serem vizinhos do povoamento 6.

Também é possível constatar, a partir dos últimos 3 métodos, que o valor da função objetivo é o mesmo, ou seja, a Heurística Melhorativa, neste caso, não nos permitiu alcançar um melhor resultado, sendo que a Construtiva atingiu logo o mesmo valor que o Método evolutivo. A única diferença é que na Heurística Construtiva está presente o povoamento 4 no lugar do 12.

Pode-se concluir que a Heurística Construtiva é de facto é boa tendo em conta o minorante encontrado situa-se bastante perto do resultado obtido.

Refira-se, ainda, o facto de as Heurísticas terem chegado ambas ao mesmo valor que também corresponde ao valor da solução obtida a partir do método evolutivo, o que nos leva a concluir que as Heurísticas estão bem construídas e que conseguem atingir valores próximos do valor ótimo (pelo menos para esta instância).

Por fim, mencionar que não temos qualquer garantia de termos atingido o valor ótimo, uma vez que nunca chegámos ao valor do minorante a partir dos outros métodos.

1. **Programação Linear Inteira**

Partindo da formulação da relaxação do problema, fomos adicionando restrições que não retirassem soluções admissíveis e que nos levassem à solução ótima.

Na solução da relaxação, para a primeira espécie que não estivesse presente em, pelo menos, dois povoamentos vizinhos, adicionámos uma restrição: de todos os povoamentos que contêm a tal espécie e que não estão na solução, pelo menos um tem de estar. Quando não houver espécies nessas condições, alcançamos a solução ótima.

**Input:** S – lista de espécies; R – lista de povoamentos da relaxação; Ti– conjunto de povoamentos que contêm a espécie i; Vk– conjunto de povoamentos vizinhos do k.

**Passo 1:**Seja s a primeira espécie em S. Para o primeiro povoamento k do conjunto Ts∩R, verificar se existe outro povoamento j (diferente de k) também pertencente a Ts∩R tal que j pertence a Vk.. Se existir, avança-se para a espécie seguinte na lista S.  Caso contrário, repetir para o povoamento seguinte de Ts∩R (até se percorrer todo o conjunto).  Se se tiver percorrido todo o conjunto sem ter encontrado j que verifique as condições, ir para o passo 2.

**Passo 2**: Adicionar a seguinte restrição ao problema:∑xi≥1,  i ∈Ts∩ R.

**Passo 3:**Resolver o problema obtido. Atualizar a lista R.  Caso se tenha obtido uma solução admissível – STOP.   
Caso contrário, voltar ao passo 1.

Foi possível chegar a uma formulação do mesmo, apesar de não ser compacta:

Seguindo o algoritmo descrito a solução consiste em inserir na reserva os povoamentos: 2,6, 12 e 17.

1. **Conclusões**

Em suma, trata-se de um problema onde não foi possível formalizar de forma compacta, derivado da necessidade de definir a vizinhança e de garantir que cada espécie está pelo menos presente em dois povoamentos vizinhos.

Na resolução do problema com todas as condições, como não conseguimos formalizar as restrições de forma linear, utilizámos uma heurística (método evolutivo). Para além disso, esta está apenas concretizada para os 25 povoamentos e não para um qualquer número dos mesmos. No entanto, as heurísticas desenvolvidas ajustam-se a qualquer que seja o número de povoamentos.

Refira-se que, quando tentámos resolver a nossa instância, utilizando ambas as Heurísticas em R, este demorou algum tempo a determinar a solução na melhorativa (mais especificamente, no passo 3). Há pequenas diferenças na definição das listas entre o código em R e a descrição dos algoritmos de forma a facilitar a programação dos mesmos.

Por fim, consideramos também importante referir que, após um aumento do tempo máximo sem melhoramento nas opções do Solver, alcançámos uma solução com 4 povoamentos, tendo o mesmo valor que o minorante. Assim, pode concluir-se que corresponde ao valor ótimo do problema.