TRABAJO CMON

Trabajo 3

Realizado por: J. Constantino Benjumea Bellot, Rocío Cuevas Prieto, Miguel García Moreno y Eva González Estrada.

1. Se considera el problema estacionario

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x), & x \in \Omega \\ u = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un abierto poligonal, $c \in L^\infty(\Omega)$ es ≥ 0 c.p.d., $f \in L^2(\Omega)$ y g es la traza de una función $\bar{u} \in H^1(\Omega)$. Hallar la formulación débil del problema. Justificar la existencia y unicidad de solución.

Solución: La EDP presentada es una forma general de una ecuación de Poisson con un término de reacción, que se utiliza en diversas áreas de la física y otras ciencias para modelar fenómenos donde hay difusión y reacción. Vamos a desglosarla y entender su interpretación física.

La ecuación:

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x), & x \in \Omega \\ u = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

es una ecuación elíptica que modela el equilibrio estacionario de un proceso de difusión con reacción en un dominio Ω, con condiciones de frontera $g(x)$. La interpretación específica depende del contexto físico, pero generalmente involucra la difusión de una cantidad u y su modificación por una reacción descrita por $c(x)$, junto con la influencia de una fuente externa $f(x)$.

Interpretación de los términos

1. $-\Delta u$:

- Δ es el operador laplaciano, que en dos dimensiones se define como $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$.
- Este término representa la difusión o dispersión de la cantidad u. En el contexto del calor, por ejemplo, $-\Delta u$ representa la dispersión del calor desde regiones más calientes a regiones más frías.

2. $c(x)u$:

- $c(x)$ es una función que depende de la posición x.

- Este término representa una reacción o absorción. En un modelo de difusión-reacción, $c(x)u$ podría representar la tasa a la que una sustancia se convierte en otra, o cómo una cantidad u se está generando o absorbiendo en el medio.

3. $f(x)$:

- $f(x)$ es una función fuente o término forzante.
- Representa la fuente externa que añade o sustrae u al sistema. En el contexto de la transferencia de calor, $f(x)$ podría representar una fuente de calor externa.

4. Ω:

- Es el dominio del espacio en el cual estamos considerando la ecuación.
- Podría ser una superficie en dos dimensiones.

5. $u = g(x)$ en $\partial\Omega$:

- Esta es la condición de frontera o borde.
- $g(x)$ es una función que especifica los valores de u en el borde del dominio Ω. En problemas físicos, esto podría representar la temperatura en la superficie de un objeto, la concentración de una sustancia en los límites de un área, etc.

Ejemplos de aplicación:

Difusión de calor

En el contexto de la difusión del calor, la ecuación podría interpretarse de la siguiente manera:

- $u(x)$ es la temperatura en el punto x.
- $-\Delta u$ es la tasa a la que el calor se difunde desde un punto a sus alrededores.
- $c(x)u$ podría representar una pérdida o generación de calor debido a algún efecto interno, como una reacción química que absorbe o genera calor.

- $f(x)$ es una fuente de calor externa, como un calentador o una corriente eléctrica que está aplicando calor en x.
- La condición de frontera $u = g(x)$ en $\partial\Omega$ establece la temperatura en el límite del dominio, que podría ser, por ejemplo, las paredes de un objeto que están mantenidas a una temperatura fija.

Reacción-Difusión

En modelos de reacción-difusión, esta ecuación podría representar la concentración de una sustancia:

- $u(x)$ es la concentración de una sustancia en el punto x.
- $-\Delta u$ representa la difusión de la sustancia, es decir, cómo se dispersa la sustancia en el medio.
- $c(x)u$ podría representar una reacción química que consume o produce la sustancia a una tasa proporcional a la concentración.
- $f(x)$ es una fuente externa que añade o quita la sustancia en el punto x.

Estudiemos ahora la solución a nuestro problema.
Al ser $x \in \Omega, x = (x_1, x_2)$ con $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, denotamos $dx := dx_1 dx_2$.
El espacio natural para buscar la solución del problema (1) es el espacio de Sóbolev

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) / v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \right\}.$$

Para obtener la formulación variacional de (1), multiplicamos en la ecuación ambos miembros por una función $v \in H_0^1(\Omega)$ e integramos en Ω :

$$\int_\Omega (-\Delta u) v dx + \int_\Omega cuv\, dx = \int_\Omega fv\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Integrando ahora por partes en el primer miembro, obtenemos $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma + \int_\Omega cuv\, dx = \int_\Omega fv\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$ de donde, teniendo en cuenta que v vale cero sobre $\partial\Omega$, se obtiene:

$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega cuv \, dx = \int_\Omega fv \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

La formulación variacional de (1) es, por tanto

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{PV}$$

con $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega cuv \, dx$ y $L(v) = \int_\Omega fv \, dx$.

Para demostrar la existencia y unicidad de solución, se hará uso del teorema de Lax-Milgram. Se necesita probar que $a(u,v)$ es bilineal, continua y coerciva, y que $L(v)$ es lineal y continua.

- $a(\cdot,\cdot)$ bilineal: Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

  $a(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \int_\Omega \nabla(\alpha u_1 + \beta u_2) \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega c(\alpha u_1 + \beta u_2) v \, dx =$

  $= \int_\Omega \nabla(\alpha u_1) \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega \nabla(\beta u_2) \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega c(\alpha u_1) v \, dx + \int_\Omega c(\beta u_2) v \, dx =$

  Reordenando los términos:

  $= \int_\Omega \nabla(\alpha u_1) \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega c(\alpha u_1) v \, dx + \int_\Omega \nabla(\beta u_2) \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega c(\beta u_2) v \, dx = = \alpha a(u_1, v) + \beta a(u_1, v)$

  Por ser la función $a(u,v)$ simétrica ($a(u,v) = a(v,u)$), queda probada la bilinealidad.

- $a(\cdot,\cdot)$ continua:

  $|a(u,v)| \leq \int_\Omega |\nabla u| \cdot |\nabla v| dx + \int_\Omega |c||u||v| dx \leq$

  Utilizando la desigualdad de Hölder:

  $\leq ||\nabla u||_{L^2(\Omega)} ||\nabla v||_{L^2(\Omega)} + ||c||_{L^2(\Omega)} ||u||_{L^2(\Omega)} ||v||_{L^2(\Omega)}$

  Aplicando la desigualdad de Poincaré:

  $\leq ||u||_{H_0^1(\Omega)} ||v||_{H_0^1(\Omega)} + ||c||_{L^2(\Omega)} D^2 ||\nabla u||_{L^2(\Omega)} ||\nabla v||_{L^2(\Omega)} =$

  Por la definición de la norma en $H_0^1(\Omega)$:

  $= (1 + ||c||_{L^2(\Omega)} D^2) ||u||_{H_0^1(\Omega)} ||v||_{H_0^1(\Omega)}$

- $a(\cdot,\cdot)$ coercitiva:

  $a(v,v) = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega cvv \, dx = \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + \int_\Omega c|v|^2 \, dx \geq$

$\geq \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx = ||\nabla v||_{L^2(\Omega)} \geq K||v||_{L^2(\Omega)}$

donde en la última desigualdad, se ha utilizado de nuevo la desigualdad de Poincaré.

- $L(\cdot)$ lineal:

  $L(\alpha v_1 + \beta v_2) = \int_\Omega f(\alpha v_1 + \beta v_2) \, dx = \int_\Omega f(\alpha v_1) \, dx + \int_\Omega f(\beta v_2) \, dx =$

  $= \alpha \int_\Omega f(v_1) \, dx + \beta \int_\Omega f(v_2) \, dx = \alpha L(v_1) + \beta L(v_2)$

- $L(\cdot)$ continua:

  $|L(v)| \leq | \int_\Omega fV \, dx| = ||f||_{L^2(\Omega)} ||v||_{L^2(\Omega)} \leq ||f||_{L^2(\Omega)} K ||\nabla v||_{L^2(\Omega)} =$

  $= K||f||_{L^2(\Omega)} ||v||_{H_0^1(\Omega)}$

  donde K es de nuevo la constante de la desigualdad de Poincaré.

Además el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert completo, por tanto, hemos probado que se verifican todas las hipótesis del teorema de Lax-Milgram, por lo que la solución u del problema (1) existe y es única.

2. Aproximar (1) **en el sentido de los elementos finitos P_1-Lagrange, justificar la existencia y unicidad de solución del problema aproximado y enunciar un resultado de convergencia.**

Solución:

Vamos a utilizar una aproximación mediante elementos finitos P_1-Lagrange. Por simplicidad, supongamos que $\partial\Omega$ es una poligonal cerrada. Consideramos un mallado de $\bar{\Omega}$ mediante triángulos: $\mathcal{T}_h = \{T_r\}_{r=1}^R$, verificando $\bar{\Omega} = \bigcup_{r=1}^R T_r$, con $\overset{\circ}{T}_r \neq \varnothing, r = 1, \ldots, R$ y tales que para todo $r \neq s$

$$T_r \cap T_s = \begin{cases} \text{un lado común a ambos triángulos o} \\ \text{un vértice común a ambos triángulos o} \\ \varnothing \end{cases}$$

Consideramos

$$W_h = \left\{ v_h \left| v_h \in C^0(\bar{\Omega}), \quad v_h\right|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\} \subset H^1(\Omega)$$

siendo W_h un subespacio de dimensión finita de $H^1(\Omega)$ con $\dim W_h = M$, donde M es el número de vértices de $\mathcal{T}_h$. Consideramos también

$$V_h = \{ v_h \,|v_h \in W_h, \quad v_h|_{\partial\Omega} = 0 \} \subset H_0^1(\Omega)$$

siendo V_h un subespacio de dimensión finita de $H_0^1(\Omega)$, con $\dim V_h = M_0$, siendo M_0 el número de vértices de $\mathcal{T}_h$ que no están sobre $\partial\Omega$. El problema aproximado de (PV) es

$$\begin{cases} \text{Hallar } u_h \in V_h \text{ tal que} \\ \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx + \int_\Omega c u_h \cdot v_h dx = \int_\Omega f v_h dx \quad \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

siendo V_h un subespacio de dimensión finita de $H_0^1(\Omega)$, con $\dim V_h = M_0$, siendo M_0 el número de vértices de $\mathcal{T}_h$ que no están sobre $\partial\Omega$.

Sean $\{a_i\}_{i\in I}$ los vertices de $\mathcal{T}_h$ y sean $\{a_i\}_{i\in I_0}$ $(I_0 \subset I)$ los vertices de $\mathcal{T}_h$ que no están sobre $\partial\Omega$, siendo $\operatorname{card}(I) = M$ y $\operatorname{card}(I_0) = M_0$

Una función $v_h \in W_h$ queda unívocamente determinada por sus valores en los vértices de la triangulación, i.e. por el conjunto de valores $\{v_h(a_i)\}_{i\in I}$. Análogamente, una función $v_h \in V_h$ está unívocamente determinada por el conjunto de valores $\{v_h(a_i)\}_{i\in I_0}$

La base canónica de W_h está constituida por las funciones $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ definidas por

$$\varphi_i \in W_h \quad \forall i = 1, \ldots, M, \quad \varphi_i(a_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \ldots, M.$$

La función φ_i está asociada al vértice a_i de $\mathcal{T}_h$ y solo es distinta de cero en los triángulos que contienen a dicho vértice. A su vez, la base de V_h está constituida por el subconjunto de la base de W_h, $\{\varphi_i\}_{i\in I_0}$. Luego,

$$v_h \in W_h \Longleftrightarrow v_h = \sum_{i\in I} v_h(a_i)\varphi_i$$
$$v_h \in V_h \Longleftrightarrow v_h = \sum_{i\in I_0} v_h(a_i)\varphi_i$$

Puesto que $\{\varphi_i\}_{i\in I_0}$ es una base de V_h el problema anterior se puede escribir

$$\begin{cases} \text{Hallar } u_h \in V_h \text{ tal que} \\ \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla\varphi_i dx + \int_\Omega c u_h \varphi_i dx = \int_\Omega f\varphi_i dx \quad \forall i \in I_0. \end{cases} \tag{2}$$

Ahora bien, u_h se puede expresar también en función de la base de V_h :

$$u_h \in V_h \quad \Longleftrightarrow \quad u_h = \sum_{j\in I_0} u_h(a_j)\varphi_j$$

de donde para obtener u_h solo hay que calcular los coeficientes $u_h(a_j)$ para $j \in I_0$. Sustituyendo u_h en las ecuaciones (2), el problema que tenemos que resolver se escribe:

$$\begin{cases} \text{Hallar } u_h(a_j)_{j\in I_0} \text{ tales que} \\ \sum_{j\in I_0} u_h(a_j)\left(\int_\Omega \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i dx + \int_\Omega c\varphi_j\varphi_i dx\right) = \int_\Omega f\varphi_i dx \quad \forall i \in I_0. \end{cases} \tag{3}$$

Utilizando la siguiente notación

$$\begin{cases} u_j = u_h\left(a_j\right) \\ a_{ij} = \displaystyle\int_\Omega \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i dx + \int_\Omega c\varphi_j\varphi_i dx \\ s_i = \displaystyle\int_\Omega f\varphi_i dx \end{cases}$$

el problema (2) se puede reescribir de la forma más compacta

$$\begin{cases} \text{ Hallar } \left(u_j\right)_{j\in I_0} \text{ tales que} \\ \sum_{j\in I_0} a_{ij}u_j = s_i \quad \forall i \in I_0, \end{cases}$$

es decir el problema (3) se reduce a la resolución de un sistema lineal de M_0 ecuaciones.

Para justificar la existencia y unicidad de solución del problema aproximado, usaremos el siguiente resultado:

Sea V un espacio de Hilbert real y V_h un subespacio de dimensión finita. Sea $a(u, v)$ una forma bilineal continua y coercitiva sobre V, y $L(v)$ una forma continua sobre V. Entonces, el problema aproximado tiene solución única. Además, esta solución se puede obtener resolviendo un sistema lineal con una matriz definida positiva. (Numerical analysis and optimization, Gregoire Allaire)

El resultado de convergencia es el siguiente:

Usamos las hipótesis del lema anterior. Suponemos que existe un subespacio $X \subset V$ que es denso en V y una aplicación r_h de X a V_h (llamada operador de interpolación) tal que

$$\text{lím}_{h\to 0} \|v - r_h(v)\| = 0 \quad \forall v \in X.$$

Entonces el método de aproximación variacional interna converge, es decir,

$$\text{lím}_{h\to 0} \|u - u_h\| = 0$$

(Numerical analysis and optimization, Gregoire Allaire)

4. Se considera también el problema de evolución análogo

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + c(x)u = f(x), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u = g(x), & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

donde $T = 1$ y

$$u_0(x) \equiv 10^3 \exp\left(-\frac{|x - x_0|^2}{\sigma}\right), \quad x_0 = (0{,}5, 2), \quad \sigma = 0{,}05.$$

Determinar la formulación débil. Aproximar el problema en tiempo (esquema de Gear con paso constante) y después en espacio (de nuevo elementos finitos P_1-Lagrange).

Solución: Veamos la interpretación física del problema.

Esta es una formulación de una EDP conocida como la ecuación de reacción-difusión en un dominio espacial Ω y en un intervalo de tiempo $(0, T)$.

En la ecuación siguiente:

$$u_t - \Delta u + cu = f(x), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T)$$

- u_t representa la derivada parcial de u con respecto al tiempo t.
- Δu es el operador laplaciano de u, que mide la variación espacial de u. En este contexto, Δ se refiere a la divergencia de un gradiente, y se utiliza para medir la segunda derivada espacial de u. Es decir, $\Delta u = \nabla^2 u$.
- c es una función que puede depender de la posición x en el dominio Ω. Representa una tasa de reacción local.
- $f(x)$ es una función que representa una fuente o sumidero de la sustancia u en el dominio Ω.

Las condiciones de contorno:

$$u = g(x), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)$$

establecen la condición de que u tome un valor específico $g(x)$ en la frontera del dominio Ω en todo momento t.

La condición inicial:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega$$

establece la condición inicial para u en el tiempo $t = 0$. Aquí, $u_0(x)$ es una función que especifica la distribución inicial de la sustancia u en el dominio Ω.
La función $u_0(x)$ se define explícitamente como una gaussiana centrada en x_0 con una desviación estándar σ, que determina la amplitud y la extensión espacial de la distribución inicial de u.

En este caso nos proponemos resolver la ecuación de reacción difusión. Particularmente puesto que la condición de contorno es $u = g(x)$ sobre $\partial\Omega \times (0,T)$, el espacio natural donde buscar la solución débil del problema es $\tilde{u} + H_0^1(\Omega)$, donde H_0^1 es el espacio de Sobolev dado por $H_0^1 = \{u \in L^2(\Omega) : \exists \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ en sentido débil}, u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0\}$, y $\tilde{u}|_{\partial\Omega\times(0,T)} = g(x)$. Discretizamos en tiempo con esquema Gear de paso constante, esto es, que aproxima u_t como sigue:

$$u_t \approx \frac{3u^n(x) - 4u^{n-1}(x) + u^{n-2}(x)}{\Delta t}$$

con $\Delta t = \frac{T}{N}, N \geq 50$ y $u^n(x) := u\left(x, t_n\right)$, donde $t_n = n \cdot \Delta t$.

Primero, dado que necesitamos el valor de $u^0(x)$ y $u^1(x)$ para poder inicializar la aproximación, debemos hallar $u^1(x)$ aproximándolo por un esquema de Euler implícito. Para ello resolvemos el problema:

$$\begin{cases} \text{Hallar } u^1 \in \tilde{u} + H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ \displaystyle\int_\Omega \left(\frac{u^1 - u^0}{\Delta t} \right) \cdot v + c \cdot u \cdot v - \Delta u \cdot v \; dx = \int_\Omega f \cdot v dx. \\ u^0(x) = u_0(x), \; \forall v \in \tilde{u} + H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Lo cual, tras integrar por partes y simplificar, queda como sigue:

$$\begin{cases} \text{Hallar } u^1 \in \tilde{u} + H_0^1(\Omega) \text{ tal que se verifica que} \\ \displaystyle\int_\Omega \frac{u^1}{\Delta t} \cdot v \; dx + \int_\Omega \nabla u^1 \nabla v \; dx + \int_\Omega c \cdot u^n \cdot v \; dx = \int_\Omega f \cdot v - \frac{u^{n-1} \cdot v}{\Delta t} \; dx \\ u^0(x) = u_0(x), \quad \forall v \in \tilde{u} + H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Tras haber hallado u^1 podemos resolver el problema para $n \geq 2$. El problema a resolver es

$$\begin{cases} \text{Hallar } u^n \in \tilde{u} + H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ \displaystyle\int_\Omega \frac{3u^n}{2\Delta t} \cdot v \; dx + \int_\Omega \nabla u^n \cdot \nabla v \; dx + \int_\Omega c \cdot u^n \cdot v \; dx = \\ \displaystyle\int_\Omega f(x) - v \; dx + \int_\Omega \frac{2u^{n-1}}{\Delta t} v \; dx - \int_\Omega \frac{u^{n-2} \cdot v}{2\Delta t} \; dx \\ \forall v \in \tilde{u} + H_0^1(\Omega), \; u^1(x) = u_1, \; u^0(x) = u_0(x). \end{cases}$$

Este problema lo resolveremos en Freefem a través de una aproximación en espacio, además de la del tiempo, en el espacio de los polinomios $\mathbb{P} - 1$ Lagrange. Consideramos con tal propósito un espacio W_h tal que:

$$W_h = \{v_h \mid v_h \in C^0(\bar{\Omega}), \; v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \; \forall T \in \mathcal{T}_h\} \subset H^1(\Omega)$$

con $dim(W_h) = M$, con M el número de vértices de $\mathcal{T}_h$. También consideramos el subespacio de W_h dado por:

$$V_h = \{v_h \mid v_h \in W_h, \; v_h|_{\partial\Omega} = 0\} \subset H_0^1(\Omega)$$

Con estos conjuntos el problema aproximado queda con el siguiente esquema

$$
\begin{cases}
\text{Hallar } u_h^n \in \tilde{u_h} + V_h \text{ tal que} \\
\displaystyle\int_\Omega \frac{3u_h^n}{2\Delta t} \cdot v_h \, dx + \int_\Omega \nabla u_h^n \cdot \nabla v_h \, dx + \int_\Omega c \cdot u_h^n \cdot v_h \, dx = \\
\displaystyle\int_\Omega f(x) - v_h \, dx + \int_\Omega \frac{2u_h^{n-1}}{\Delta t} v_h \, dx - \int_\Omega \frac{u_h^{n-2} \cdot v_h}{2\Delta t} \, dx \\
\forall v \in \tilde{u_h} + V_h, \; u^1(x) = u_1, \; u^0(x) = u_0(x).
\end{cases}
$$

donde $\tilde{u_h} \in W_h$ tal que $\tilde{u_h}(a_i) = \tilde{u}(a_i)$ para todo vértice $a_i \in \partial\Omega$