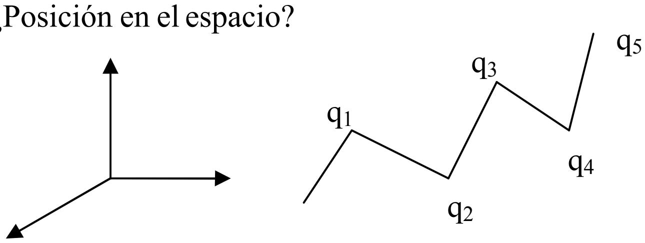
Cinemática directa

2.1 Introducción

Para obtener un modelo geométrico de un robot nos interesa conocer cada uno de los puntos de las articulaciones puesto que los elementos rígidos quedan definidos como rectas entre puntos de articulación (o cualquier otra forma rígida).
Al problema de relacionar las variables generalizadas de la estructura con su posición en el espacio se denomina problema *Cinemático Directo*

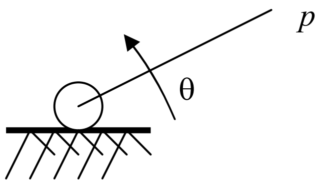
$(q_1, \ldots, q_n) \rightarrow$ ¿Posición en el espacio?



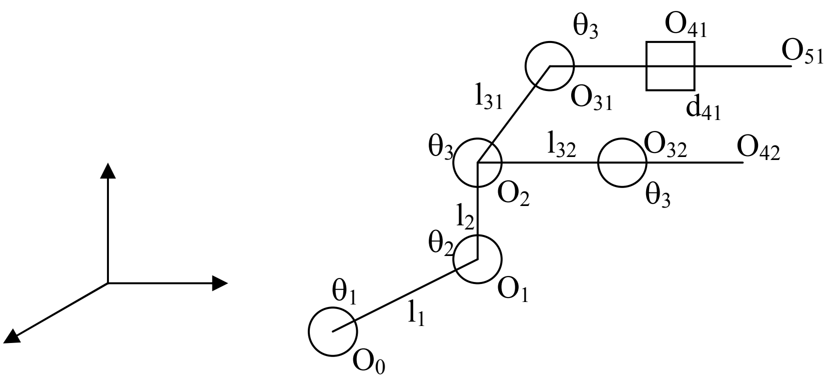
La Cinemática directa consiste en obtener la posición en el espacio de la estructura a partir de los valores de las variables generalizadas.

Ejemplo.-

Un problema cinemático directo podría ser calcular el punto p en función del ángulo θ :



Tendremos que numerar tanto las articulaciones como los links para poder identificarlos y poder expresar que un link rota o se traslada respecto al anterior. En general tendremos situaciones como la siguiente:

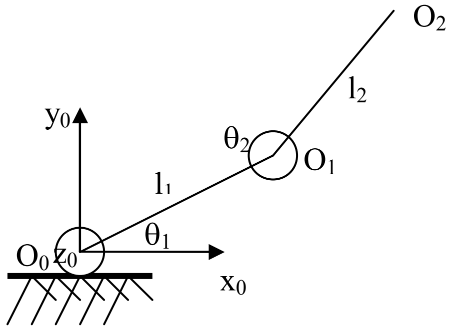


El problema cinemático directo será

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_{31}, d_{41}, \theta_{32}) \underset{?}{\rightarrow} (O_0, O_1, O_2, O_{31}, O_{41}, O_{51}, O_{32}, O_{42})$$

2.1 Cinemática directa de un manipulador planar

El problema consiste en
$(\theta_1, \theta_2) \rightarrow (O_0, O_1, O_2)$

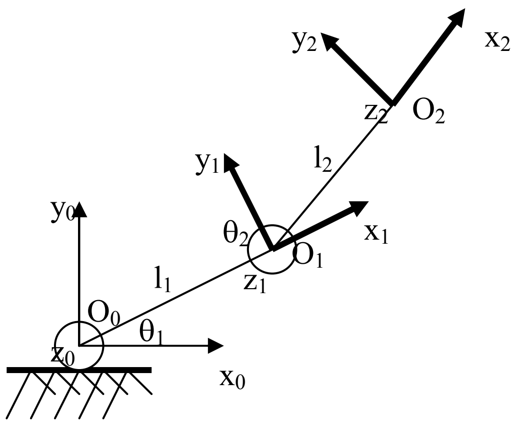


El primer sistema de coordenadas se coloca en el primer punto del robot de tal forma que el eje de giro coincida con el eje *z*.

En primer lugar hay que dar la posición de O_0 en el SR_0 (Sistema de Referencia 0).

$$O_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_0$$

A continuación se coloca el SR_1 en el punto O_1 como si estuviera rígidamente pegado al elemento l_1 y con la dirección x_1 en la dirección del link l_1.
θ_1 vendrá definido como el ángulo que forman x_0 y x_1.



Cuando gira θ_1 el SR_1 gira también de forma rígida y lo mismo ocurre con θ_2.

El punto O_1 en el SR_1 será:

$$\left(O_1\right)_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Asimismo } \left(O_2\right)_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ y en general } \left(O_i\right)_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se podrá aplicar la trasformación de coordenadas ya vista para calcular O_1 y O_2 en el SR_0:

$$\left(O_1\right)_0 = {}^0T_1 \left(O_1\right)_0$$

$$\left(O_2\right)_0 = {}^2T_1 \, {}^1T_2 \left(O_2\right)_2$$

2.3 Procedimiento general del cálculo de la cinemática directa

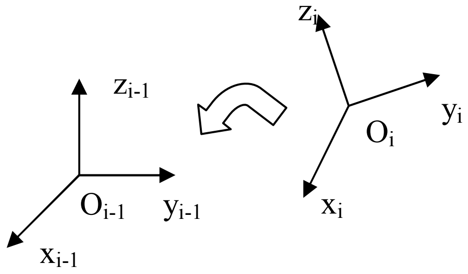
Se parte de una estructura con *n* articulaciones, por lo tanto se tendrán *n* links.

Los pasos que habría que seguir para el cálculo de la cinemática directa serían:

1) Fijar un SR que no se mueva: (O_0, x_0, y_0, z_0)
2) Numerar las articulaciones y los links. En el caso de que hayan bifurcaciones será necesario el uso de un segundo índice.
3) Colocar un SR en cada uno de los puntos O de la estructura. Existen *n+1* puntos numerados de la forma $(O_0, \ldots, O_n)$. El punto O_n corresponde con el extremo de la estructura.
   El $SR_i = (O_i, x_i, y_i, z_i)$ corresponde a la articulación *i+1* y está fijo al link *i*.
4) Los SR deberán ser de tipo *dextrógiro*.
5) Colocación de los ejes en los distintos SR.
   a. Para articulaciones de revolución:
      El eje *z* debe coincidir con el eje de giro. El eje *x* y el eje *y* se pueden elegir arbitrariamente siempre que cumplan la condición dada en el punto 4.
   b. Para articulaciones prismáticas:
      Hay libertad para elegir el sistema de ejes, aunque se recomienda mantener la misma orientación que el SR anterior.

   NOTA:
   Para aquellas articulaciones que no sean la inicial es recomendable mantener la misma orientación que tiene el sistema colocado en la articulación anterior, siempre que los sistemas sean compatibles Denavit – Hartenberg (D-H).
6) Los sistemas deben ser compatible Denavit – Hartenberg con el sistema anterior, para que la matriz de cambio del SR_i al SR_{i-1} tenga la siguiente expresión:

$$^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \cdot \sin\theta_i & \sin\alpha_i \cdot \sin\theta_i & a_i \cdot \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cdot \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cdot \cos\theta_i & a_i \cdot \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



donde se definen los parámetros D-H: $\begin{cases} (\theta_i, \alpha_i) \Rightarrow \text{Ángulos} \\ (a_i, d_i) \Rightarrow \text{Distacias} \end{cases}$

2.3.1.1 Sistema compatible D-H

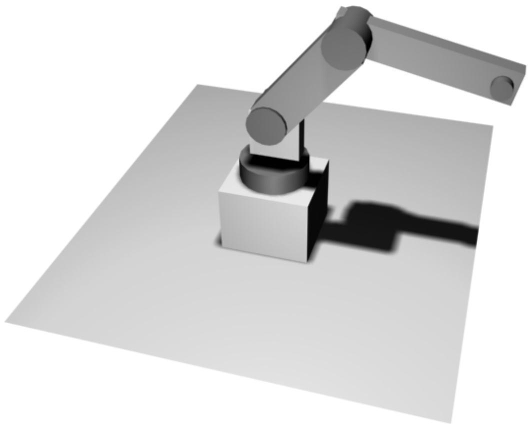
Se dice que un SR_i es compatible D-H con un SR_{i-1} si podemos calcular los parámetros D-H.
Los cuatro parámetros D-H se calculan según la siguiente tabla:

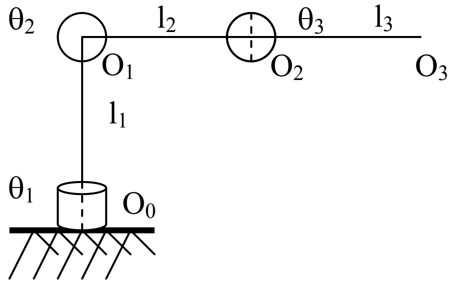
	A	B	C
d_i	O_{i-1}	$z_{i-1} \wedge x_i$	z_{i-1}
θ_I	x_{i-1}	x_i	z_{i-1}
a_i	$z_{i-1} \wedge x_i$	O_i	x_i
α_I	z_{i-1}	z_i	x_i

donde a ^ b indica el punto resultante del corte de *a* con *b*, y deberá tenerse en cuenta que:
-Cada *distancia* se mide como la distancia desde A hasta B. Si el sentido desde A hasta B coincide con el sentido de C entonces se toma positiva. En caso contrario la distancia es negativa.
-Cada *ángulo* se mide como el ángulo que forman la dirección de A con la dirección de B. Si el eje de giro dextrógiro de este ángulo coincide con el sentido de C entonces se toma positivo. En caso contrario el ángulo será negativo.
Para que puedan calcularse los parámetros D-H será necesario que z_{i-1} y x_i se corten en un solo punto, que z_{i-1} sea perpendicular a x_{i-1} y a x_i, y que x_i sea perpendicular a z_i.

2.4 Cinemática directa de un manipulador antropomórfico

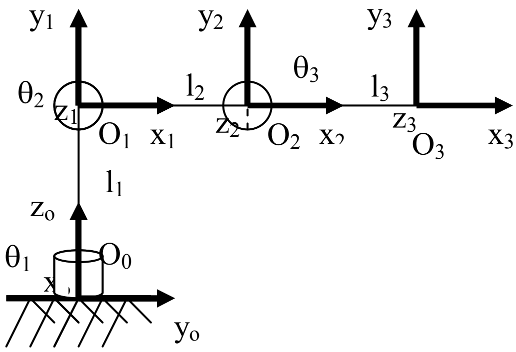
Considérese la siguiente estructura





El problema cinemático directo es

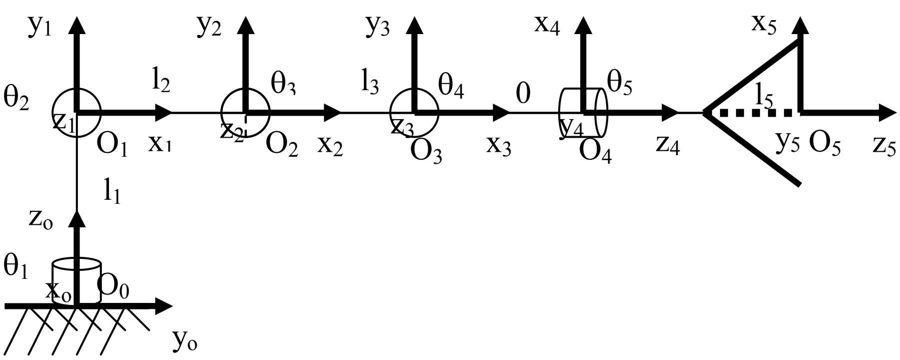
$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \rightarrow (O_0)_0, (O_1)_0, (O_2)_0, (O_3)_0$$



La tabla de los parámetros D-H será

	Articulación		
	1	2	3
d	l_1	0	0
θ	vble.	vble.	vble.
a	0	l_2	l_3
α	Π/2	0	0

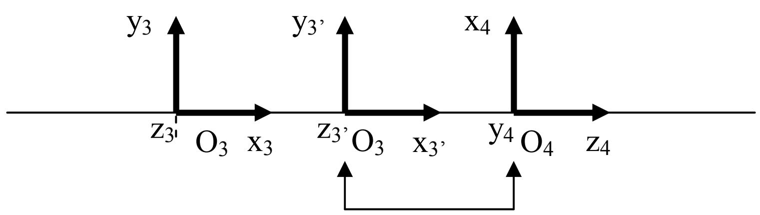
Si se añade una muñeca con dos grados de libertad (elevación y giro) y un efector final que sea una pinza



y los parámetros D-H serán

	Articulación				
	1	2	3	4	5
d	l_1	0	0	0	l_5
θ	vble.	vble.	vble.	vble.	vble.
a	0	l_2	l_3	0	0
α	Π/2	0	0	Π/2	0

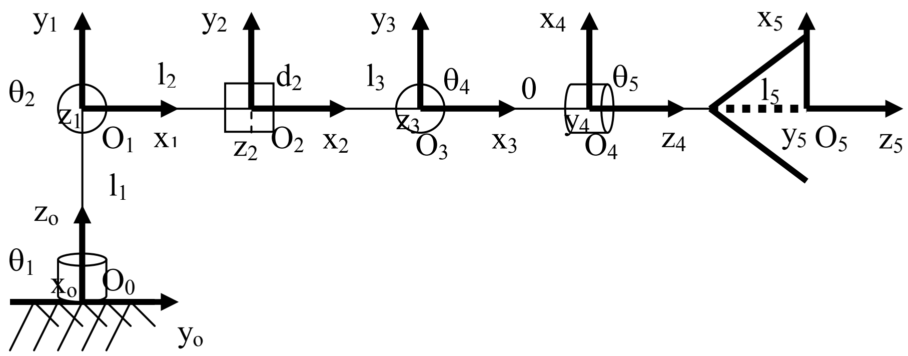
Si la distancia entre O_3 y O_4 fuera distinta de cero, se tendría que colocar un sistema de ejes intermedio para resolver el problema. Este SR se puede colocar en O_3 ó en O_4.
En este caso el nuevo sistema será $SR_{3'}$. Si se colocara en O_4, los puntos $O_{3'}$ y O_4 coincidirán.



Una vez hecho esto se pueden realizar los cálculos de D-H igual que antes (los cuatro parámetros para el SR adicional serán constantes), pero con una articulación más que en realidad es ficticia porque no se añade ningún punto O.

2.5 Cinemática directa de un manipulador cilíndrico

Un manipulador cilíndrico será de la siguiente forma:

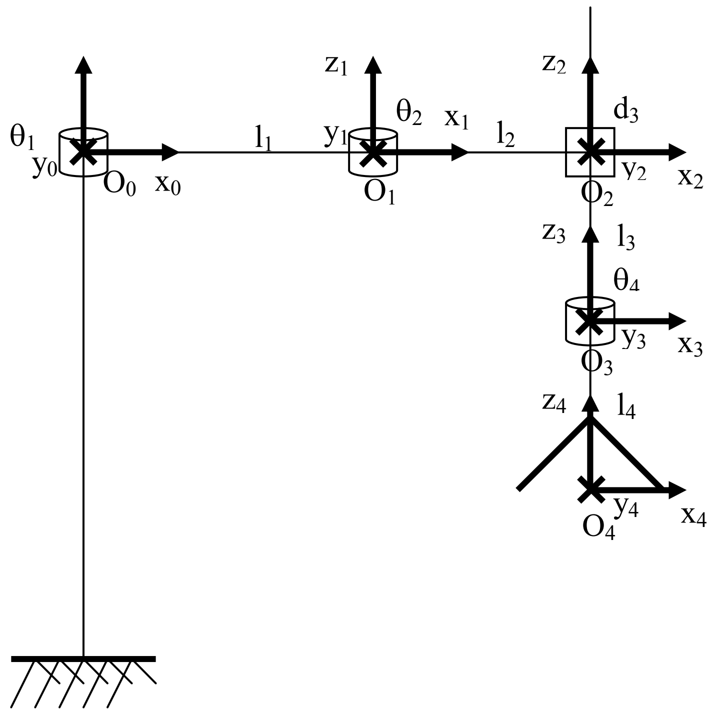


y los parámetros D-H

	1	2	3	4	5
d	l_1	0	0	0	l_5
θ	vble.	vble.	0	vble.	vble.
a	0	l_2	vble.	0	0
α	Π/2	0	0	Π/2	0

2.6 Cinemática directa de un manipulador SCARA

La representación de un SCARA con una pinza con posibilidad de cambiar su dirección de cierre es:

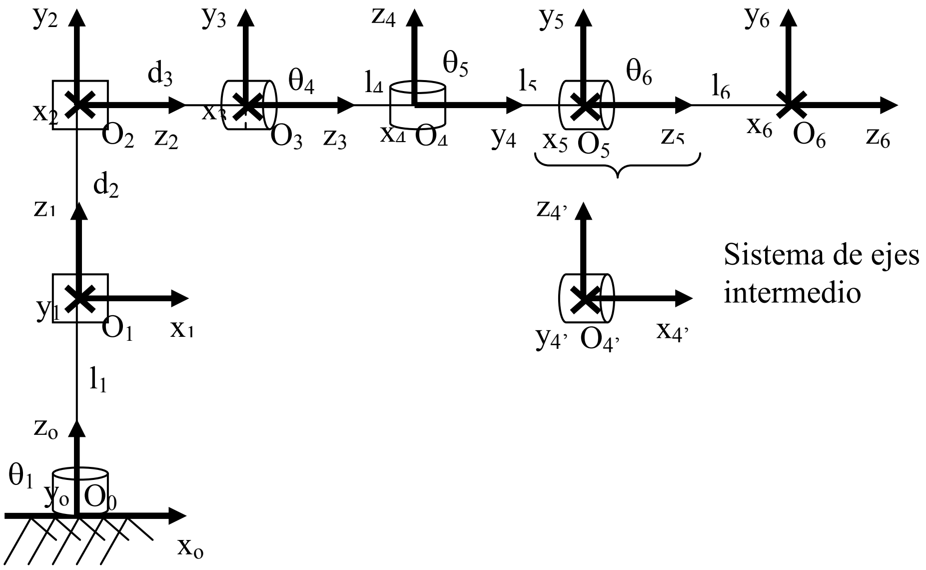


y los correspondientes parámetros D-H

	Articulación			
	1	2	3	4
d	0	0	vble.	$-l_4$
θ	vble.	vble.	0	vble.
a	l_1	l_2	0	0
α	0	0	0	0

2.7 Cinemática directa de otros manipuladores

Considérese como otro ejemplo la siguiente estructura



Como se puede apreciar en este caso ha sido necesario introducir un sistema de ejes intermedios.

Los parámetros D-H asociados serán

	Articulación						
	1	2	3	4	4’	5	6
D	l_1	vble.	vble.	l_4	0	0	l_6
θ	vble.	Π/2	0	vble.	vble.	Π/2	vble.
A	0	0	0	0	l_5	0	0
α	0	Π/2	0	Π/2	0	Π/2	0