El Teorema de Mohr-Mascheroni
Degustaciones Matemáticas

Norberto Javier Rivas González
Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH
nrivas@unam.edu.mx

Verano 2021

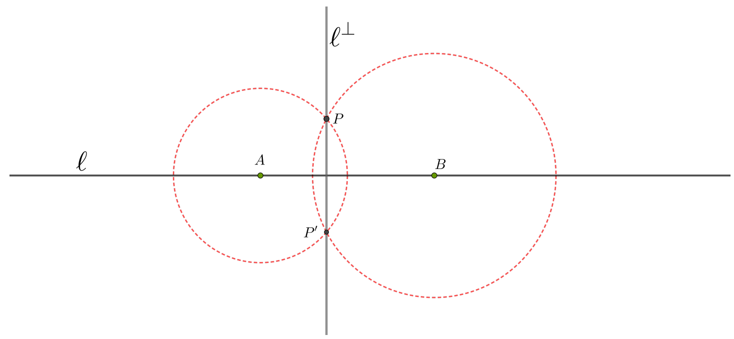
Introducción

La idea formal de construir regiones geométricas utilizando herramientas básicas tales como la regla y el compás se desarrolló, como no, en la antigua Grecia hace más de un par de milenios. Esta teoría tomó forma axiomática, es decir, se postularon ciertas *verdades primarias* (lo que hoy llamamos *axiomas*), a partir de las cuales se infieren todas las demás verdades de la teoría. Los 5 postulados o *construcciones básicas* de la geometría son los siguientes:

- Dados dos puntos se puede trazar un segmento (o recta) que pasa por ellos.
- Dado un punto y un segmento se puede trazar una circunferencia con centro en el punto y radio el segmento.
- Dadas dos rectas no paralelas se puede encontrar su punto de intersección.
- Dada una recta y una circunferencia se pueden encontrar los puntos de intersección, si los hay.
- Dadas dos circunferencias se pueden encontrar los puntos de intersección, si los hay.

Antes de continuar habrá que explicar qué entendemos por *regla* y *compás*. Por la primera, entenderemos un segmento infinito, no graduado y sin grosor (para evitar trivializar la construcción de rectas paralelas); lo segundo es básicamente el objeto botado al fondo de nuestras mochilas en la secundaria, con el que podíamos dibujar bonitas circunferencias, sólo que ahora es tan grande como para hacer círculos de cualquier radio.

Los postulados son así la *esencia* de nuestras herramientas geométricas, con lo cual no hace falta una definición formal de éstas, sin embargo conviene pensarlas como objetos, pues así es más *natural* imaginar una construcción geométrica. Por ejemplo, se puede deducir formalmente de nuestros axiomas que dada una recta ℓ y un punto P fuera de ella, existe una recta $\ell^\perp$ que es perpendicular a ℓ y que pasa por P. Utilizando nuestras herramientas, la prueba sería algo así: Primero elegimos dos puntos dentro de la recta ℓ, digamos A y B; luego ocupamos nuestro compás para trazar una circunferencia con centro en A y que pasa por P, y otra con centro en B y que pasa por P; éstas se intersecarán también en el punto P' y finalmente usamos nuestra regla para unir a P y a P'. El dibujo de la construcción se vería como el siguiente:



Construcción de una recta perpendicular

Aunque la teoría de las construcciones geométricas es muy amplia y emocionante, en parte por famosos problemas como *la duplicación del cubo* o la *trisección del ángulo*, en este escrito no nos vamos a adentrar directamente en ella, lo que haremos es presentar una curiosidad del sistema mismo: ¿Qué pasaría si una de nuestras herramientas falla y se vuelve inútil? Por ejemplo, imaginemos que no pudiéramos utilizar la regla para nuestras construcciones, ¿qué pasaría en ese caso? ¿Habrá alguna retorcida figura que no podamos crear o todo lo que antes podíamos construir seguirá siendo alcanzable? Antes de responder debemos hacer una observación: Es claro que si perdemos la regla no vamos a poder *dibujar* todo lo que antes sí, para empezar no hay manera de hacer una recta utilizando solamente compás; así, parece que el primer postulado será falso. Sin embargo, ocurre que el dibujo de un segmento o recta no es tan necesario. Por ejemplo, podríamos pensar que la construcción de un pentágono acaba cuando hemos dibujado su perímetro, pero ocurre que éste queda totalmente determinado una vez hayamos encontrado sus vértices; esto es, cuando construimos los cinco vértices del pentágono no hay necesidad formal de unirlos mediante un segmento. Así, ya que una recta está determinada por un par de puntos en ella, podemos seguir aceptando el primer postulado en el sentido de que tal recta existe, aunque no seamos capaces de dibujarla.

Regresando a la pregunta, la respuesta es *sí*, sí podemos realizar todas las construcciones utilizando únicamente un compás. Este resultado fue demostrado por Lorenzo Mascheroni a finales del siglo XVIII, aunque después se encontró una prueba diferente hecha por Georg Mohr unos 100 años antes que él. Lo que haremos es presentar las construcciones originales de Mascheroni que demuestran este singular teorema.

La prueba

Observemos que basta mostrar la construcción de los postulados. Ya que cualquier construcción que originalmente podríamos hacer con regla y compás seguirá siendo realizable utilizando únicamente el compás, tan sólo debemos hacer la respectiva construcción en vez de aplicar el postulado. Ya vimos que estrictamente el primer postulado no lo podemos realizar, pero no hay problema en *omitirlo*. El segundo y último postulado se cumplen trivialmente ya que originalmente sólo requerían compás. Por lo tanto, mostraremos que podemos hacer las construcciones del tercer y cuarto postulado.

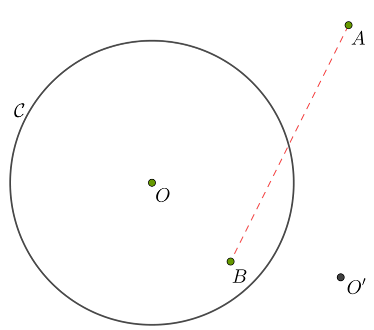
Antes de comenzar las pruebas conviene observar que podemos seguir construyendo rectas perpendiculares a una recta dada, en el sentido de que dado un par de puntos A y B, y un punto P fuera de la recta AB, podemos encontrar un punto P' tal que la recta PP' es perpendicular a AB. La prueba de esto es la misma a la hecha en la intrudicción, lo diferente es que no podemos dibujar la recta al final. Además, el punto P' de la prueba tiene la propiedad de ser el punto *simétrico a P respecto a la recta AB*, eso quiere decir que la recta AB es mediatriz del segmento PP'.

Proposición 1. Dada una circunferencia y una recta determinada por un par de puntos, se pueden construir los puntos de intersección de ambas, si los hay.

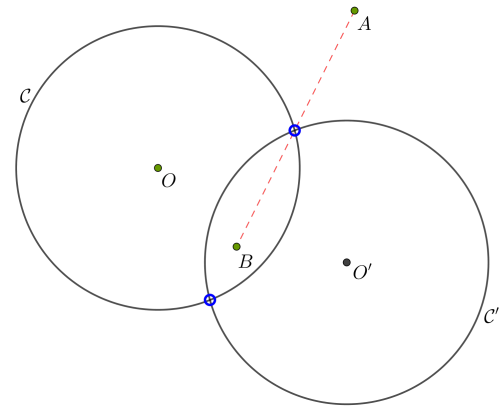
Demostración. Sean A, B un par de puntos y $\mathcal{C}$ una circunferencia con centro en O. Se puede saber si A, B y O son colineales utilizando el compás, basta con hacer la circunferencia con centro en A y que pasa por O, y la circunferencia con centro en B y que también pasa por O, se cumple que O es el único punto de intersección de ambas circunferencias si y sólo si los tres puntos son colineales. Sabiendo que podemos discernir esto, dividiremos la prueba en dos casos.

a) Primer caso. Si A, B y O no son colineales.

`Paso 1.` Obtenemos al punto O', el cual es el simétrico a O respecto a la recta AB.



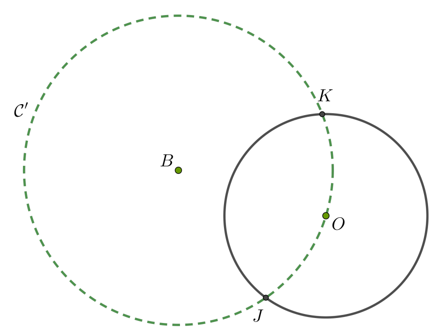
`Paso 2.` Dibujamos la circunferencia $\mathcal{C}'$, la cual tiene centro en O' y el mismo radio que $\mathcal{C}$. Si estas circunferencias se intersecan, entonces lo hacen en los puntos de intersección de la recta AB con $\mathcal{C}$.



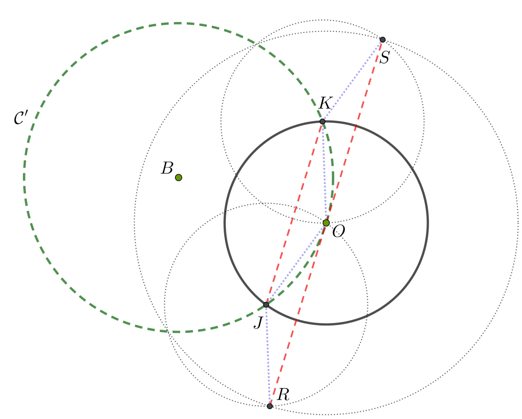
Esta construcción funciona ya que AB es la mediatriz de OO', y así los puntos de intersección (si existen) deben pertenecer a tal mediatriz, por lo tanto son colineales con A y B.

b) Segundo caso. Si A, B y O son colineales. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $A = O$.

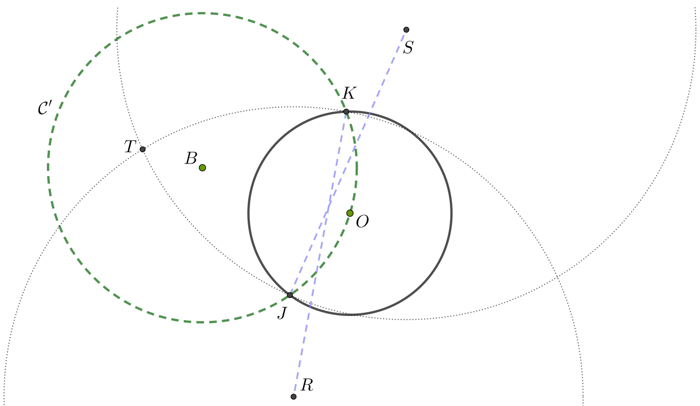
`Paso 1.` Dibujamos la circunferencia $\mathcal{C}'$ con centro en el punto B y radio suficiente para que interseque a la circunferencia $\mathcal{C}$ en dos puntos, digamos J y K.



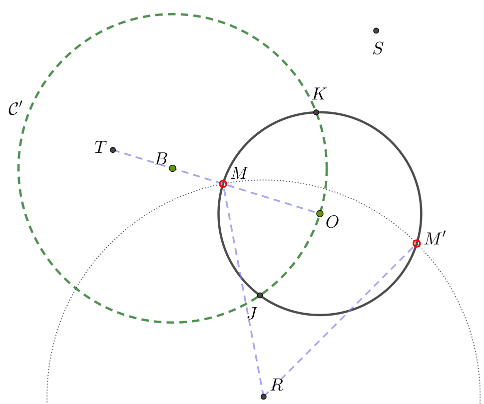
`Paso 2.` Hacemos dos circunferencia con centro en J y K respectivamente, ambas que pasen por O. Luego construimos la circunferencia con centro en O y radio JK. Así obtenemos los puntos de intersección R y S (que no pertenecen a $\mathcal{C}'$). Como los triángulos KSO, OJK y JOR son congruentes, entonces R, S y O son colineales.



`Paso 3.` La circunferencia con centro en R que pasa por K y la circunferencia con centro en S que pasa por J se intersecan, sea T uno de los puntos de intersección.



`Paso 4.` Construimos la circunferencia con centro en R y radio TO, la cual corta a $\mathcal{C}$ en los puntos M y M'.



Finalmente, M y M' son los puntos buscados. Para concluir esto se le pide al lector argumentar, en base a la construcción, las siguientes observaciones.

Ejercicio 2. Demuestra las siguientes afirmaciones (para s un segmento, denotaremos con $|s|$ a su longitud).

I) T, B y O son colineales.
(TIP: muestra que la recta BO es la mediatriz de JK y de RS)

II) $|TO|^2 = |KR|^2 - |OR|^2$.

III) $|KR|^2 - |OR|^2 = |OJ|^2 + |OR|^2$.
(TIP: prueba primero que $KORJ$ es un paralelogramo)

IV) El triángulo MOR es rectángulo.
(TIP: demuestra que $|MR|^2 = |MO|^2 + |OR|^2$)

V) B, M y O son colineales.

VI) B, O y M' son colineales.

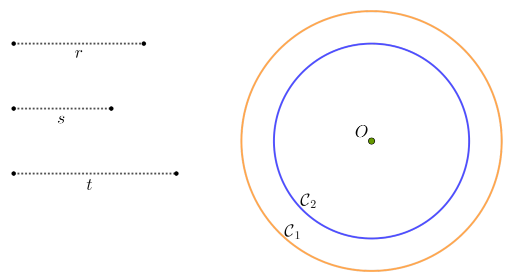
En ambos casos hemos construido los puntos comunes a la circunferencia y la recta, con lo cual concluimos la prueba. ■

Para mostrar la construcción del postulado faltante, primero veremos un resultado que se desprende de la proposición anterior. Para poder enunciarlo debemos dar una definición previa. Dados r, s y t tres segmentos, diremos que un segmento x es *su cuarta proporcional* si cumple con $\frac{|r|}{|s|} = \frac{|t|}{|x|}$.

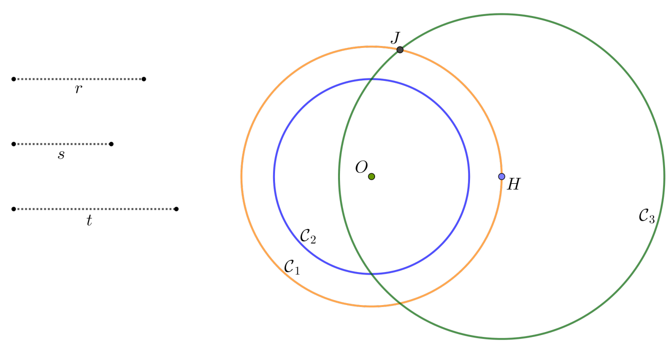
Corolario 3. Se puede construir la cuarta proporcional de tres segmentos dados.

Demostración. Sean r, s y t tres segmentos. Si $|r| = |s|$, entonces $x = t$ es el segmento buscado. Supondremos que $|r| \neq |s|$.

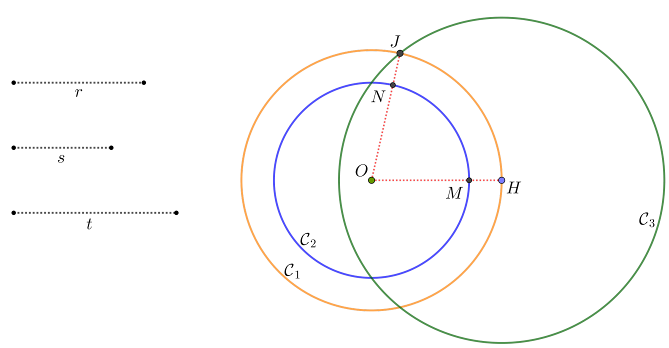
`Paso 1.` Dibujamos dos circunferencias concéntricas (es decir, tales que sus centros son el mismo punto O), una de radio $|r|$ (la llamaremos $\mathcal{C}_1$) y otra de radio $|s|$ (la llamaremos $\mathcal{C}_2$).



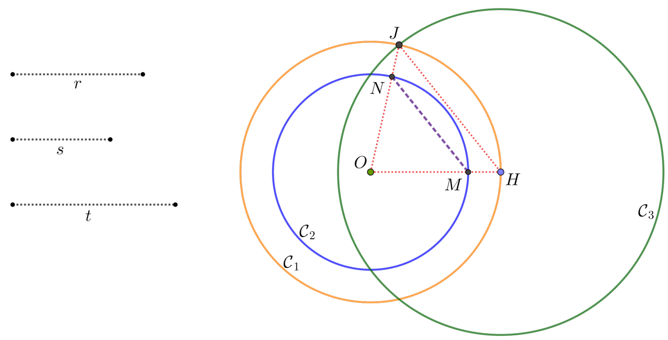
`Paso 2.` Sea H un punto de $\mathcal{C}_1$. Dibujamos a $\mathcal{C}_3$ con centro en H y radio $|t|$, sea J un punto en la intersección de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_3$.



`Paso 3.` Por la proposición anterior podemos hallar el punto N, la intersección de $\mathcal{C}_2$ y el segmento JO. De igual manera, encontramos a M, la intersección entre $\mathcal{C}_2$ y HO.



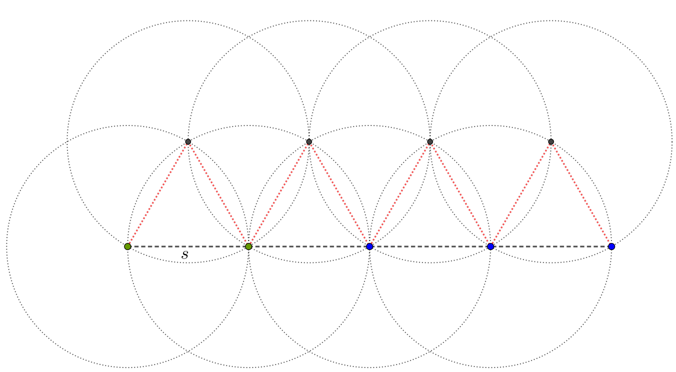
`Paso 4.` Finalmente, como los triángulos JOH y NOM son semejantes, se tiene que $\frac{|JO|}{|NO|} = \frac{|JH|}{|NM|}$, entonces si definimos a x como el segmento NM podemos concluir que $\frac{|r|}{|s|} = \frac{|t|}{|x|}$.



Parece que la prueba está completa pero hay un par de detalle por considerar. El primero es que en los dibujos de la construcción asumimos implícitamente que $|r| > |s|$, esto no es problema ya que en el caso $|r| < |s|$ la misma construcción funciona, la diferencia es que al final el triángulo JOH estará contenido en el triángulo NOM.

El otro detalle es más importante y ocurre en el Paso 2: Cuando hacemos la circunferencia $\mathcal{C}_3$, ¿cómo sabemos que interseca a $\mathcal{C}_1$? Ocurre que el punto de intersección J existe si y sólo si $|r| \geq \frac{|t|}{2}$. Entonces, si este no fuera el caso, lo que hacemos es encontramos un número natural n tal que $|n \cdot r| \geq \frac{|t|}{2}$ (donde $n \cdot t$ es un segmento formado por n segmentos de tamaño $|t|$ consecutivos, llamado *múltiplo entero* de t), y luego aplicamos el resultado para los segmentos $n \cdot r$, $n \cdot s$ y t. Note que la cuarta proporcional de r, s y t es también la cuarta proporcional de $n \cdot r$, $n \cdot s$ y t.

Finalmente, para obtener un múltiplo entero de un segmento dado, basta constuir una sucesión de triángulos equiláteros adyacentes, cuyos lados son congruentes al segmento dado. La construcción se vería algo así:



Construcción de $4 \cdot s$

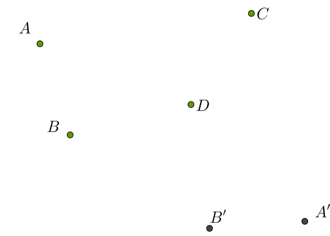
Con esto se prueba el corolario. ■

Estamos listos para terminar la prueba, recuerde que sólo falta construir el tercer postulado utilizando nuestro compás.

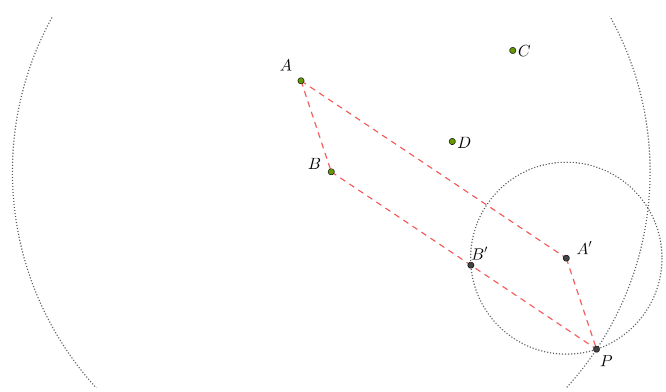
Proposición 4. Sean A, B, C y D puntos tales que AB no es paralelo a CD. Se puede construir el punto de intersección entre las rectas AB y CD.

Demostración. Si A es colineal con C y D, entonces A es la intersección de ambas rectas (lo análogo ocurre con el punto B). Por lo tanto podemos suponer que esto no se cumple.

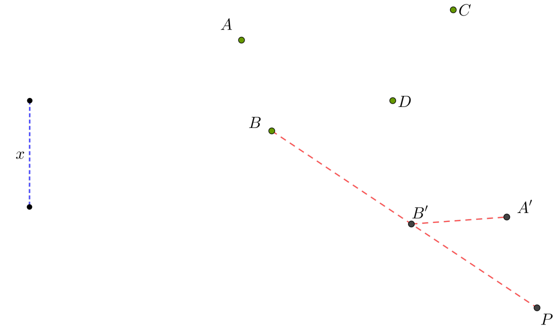
`Paso 1.` Primero obtenemos a los puntos A' y B', los cuales son, respectivamente, los simétricos a los puntos A y B respecto a la recta CD.



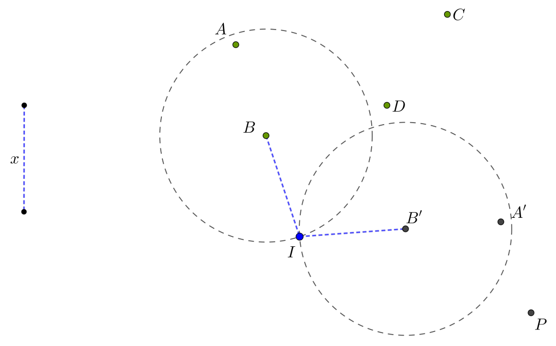
`Paso 2.` Hallamos el punto P tal que $AA'PB$ sea un paralelogramo. Para ello trazamos una circunferencia con centro en A' y radio AB, y otra con centro en B y radio AA'. De los puntos en su intersección, uno de ellos siempre será colineal con B y B' (de nuevo, es un buen ejercicio para el lector el argumentar este hecho). Este punto cumplirá lo pedido.



`Paso 3.` Gracias al corolario anterior, podemos construir el segmento x, el cual es la cuarta proporcional de los segmentos $B'P$, $B'A'$ y $B'B$.

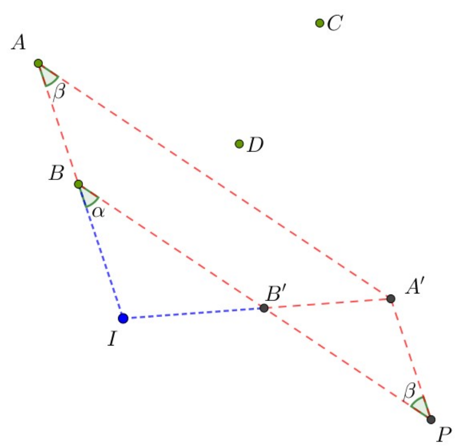


`Paso 4.` Construimos un par de circunferencias, ambas con radio $|x|$ y centros en B y B', respectivamente. Sabemos que $\frac{|B'P|}{|B'A'|} = \frac{|B'B|}{|x|}$ y como además $2|B'A'| \geq |B'P|$ (por ser $B'A'P$ un triángulo isósceles), entonces $|x| \geq \frac{|B'B|}{2}$, con lo cual este par de circunferencias siempre se intersecan.



Si demostramos que uno de los puntos de intersección es colineal con A y B habremos terminado. Pues ambos pertenecen a la recta CD, ya que CD es mediatriz de BB'. Comencemos observando que el paralelogramo $AA'PB$ es degenerado (esto es, que sus cuatro vértices son colineales) si y sólo si $|x| = \frac{|B'B|}{2}$ si y sólo si A, B, A', B' y P son colineales. Con lo cual, si $AA'PB$ es degenerado las circunferencias del Paso 4 se intersecan en un sólo punto, digamos I, así I pertenece al segmento BB', por tanto A, B e I son colineales.

La recta BP divide al plano en dos semiplanos. Consideremos el otro caso, como $AA'PB$ no es degenerado, el punto A' está en uno de los semiplanos; como en este caso las circunferencias del Paso 4 se intersecan en dos puntos ambos fuera de la recta BP, uno de ellos no está en el mismo semiplano que A', elegimos este punto y lo llamamos I. La situación entonces es la siguiente.



Como $AA'PB$ es paralelogramo, entonces $\beta = \sphericalangle BAA' = \sphericalangle A'PB'$. Como los triángulos BIB' y $PA'B'$ son semejantes (puesto que sus lados correspondientes comparten la misma razón, al cual es $\frac{|x|}{|B'A'|}$), entonces el ángulo $\alpha = \sphericalangle IBB'$ es igual al ángulo β. Finalmente, ya que BP y AA' son paralelas, entonces B pertenece a la recta AI, por lo tanto A, B e I son colineales. Y así terminamos la prueba. ∎

Epílogo

Ahora nos preguntamos: *¿qué pasa si prescindimos del compás? ¿podemos construirlo todo usando la regla?*. La respuesta es **no** (la respuesta detallada se puede consultar en [1]). Sin embargo, algunos años después de la prueba de Mascheroni, Jean-Victor Poncelet conjeturo que si previamente existía una circunferencia y su centro ya dibujados en el plano, entonces una regla sí que sería suficiente para realizar todas las construcciones. Esto fue demostrado en 1833 por Jakob Steiner (una prueba de esto se puede encontrar en [2]). Incluso la doble-regla (es decir, dos líneas paralelas a distancia fija que son *movibles*; algo así como la regla de verdad que podemos conseguir en una papelería, sólo que de tamaño infinito) es suficiente para realizar todas las construcciones (ver [4]).

Por último, hay que mencionar que los geómetras griegos entendían al compás algo diferente a cómo lo hemos presentado aquí. Para ellos esta herramienta era *colapsable*: si lo despegaban del plano éste se cerraba, en otras palabras, el compás no podía trasladar segmentos de un lugar a otro. Con esto tampoco tenemos problema porque el compás no-colapsable se puede obtener como una construcción de regla y compás colpasable, más aún, se puede obtener utilizando solamente éste último.

Referencias

[1] V. J. Baston, F. A. Bostock, *On The Impossibility Of Ruler-Only Constructions*, Proc. Amer. Math. Soc. 110, 1990, no. 4, 1017–1025.

[2] M. Ben-Ari, *Surprising Geometric Constructions*, notas disponibles en https://www.weizmann.ac.il/sci-tea/benari/mathematics.

[3] N. Hungerbuhler, *A Short Elementary Proof of the Mohr-Mascheroni Theorem*, The American Mathematical Monthly , Octubre 1994, Vol. 101, No. 8, 784-787.

[4] G. E. Martin, *Geometric Constructions*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York, 1998.