Números enteros, funciones holomorfas y mosaicos

Jesús Muciño Raymundo
muciray@matmor.unam.mx

Leidy Johanna González Cely
leidyjohannagonzalezcely@gmail.com

Nanci Pintor Lázaro
naancki@gmail.com

Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM, México

Junio 2016

Pregunta día lunes.

¿Cuál es la forma topológica de un polinomio

$$f : \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_w \; ?$$

$$\text{forma} = \begin{cases} \text{el comportamiento topológico,} \\ \text{su geometría.} \end{cases}$$

Existen números 2–dimensionales $\mathbb{C}$.

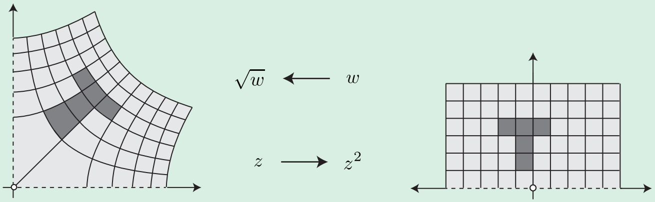
$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbb{C} = \{(a+ib)\} \arrow[dl, leftrightarrow, "T"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "T"] & \\
\mathbb{R}^2 = \{(a,b)\} \arrow[rr, leftrightarrow, "T"'] & & \mathcal{MC} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right\}
\end{tikzcd}
$$

Llamamos a T el traductor.

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{es una biyección} \\
 & \text{es un isomorfismo de } \mathbb{R}\text{–espacios vectoriales} \\
T \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & \text{es una isometría de espacios métricos} \\
 & \text{es un homeomorfismo de espacios topológicos} \\
 & \text{es un isomorfismo de campos algebraicos}
\end{tikzcd}
$$

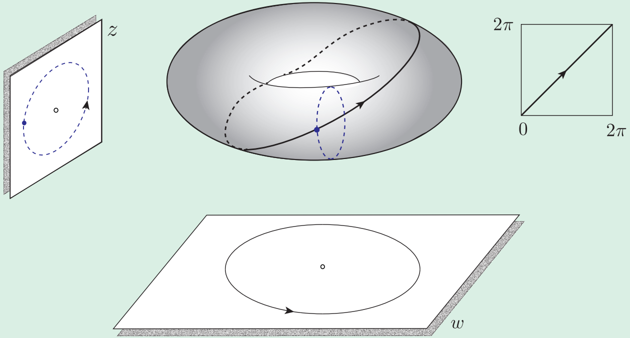
Ejemplo 1.

$$\begin{array}{ccc} z & \longrightarrow & z^2 = w \\ x + iy & \longrightarrow & (x^2 - y^2) + 2ixy \end{array}$$



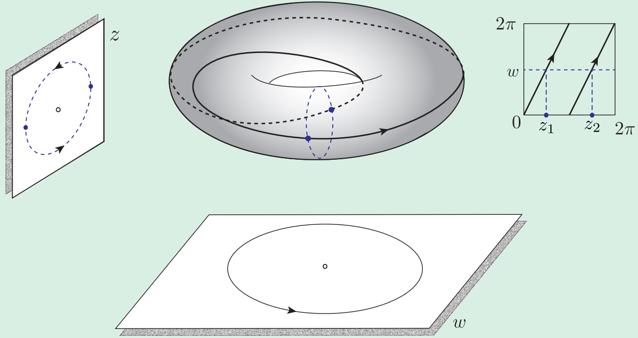
Ejemplo 2.

$$\begin{array}{ccc} z & \longrightarrow & z = w \\ x + iy & \longrightarrow & x + iy \end{array}$$



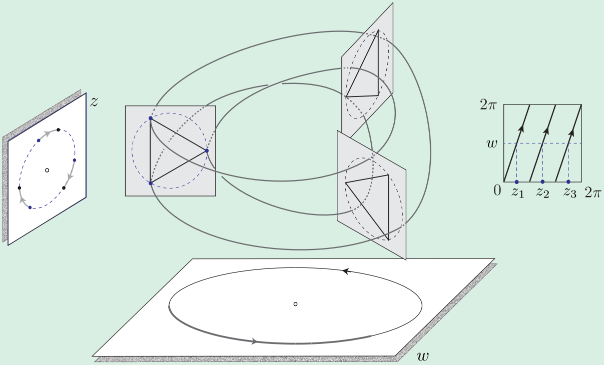
Ejemplo 3.

$$z \longrightarrow z^2 = w$$



Ejemplo 4.

$$\begin{array}{ccc} z & \longrightarrow & z^3 = w \\ x + iy & \longrightarrow & (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) \end{array}$$



Definición. Punto crítico y valor crítico de un polinomio.

Dado un polinomio

$$\begin{aligned} f : \widehat{\mathbb{C}}_z &\longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w \\ z &\longmapsto a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n, \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

- $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}_z$ es un *punto crítico* de f si $f'(z_0) = 0$,
- $w_0 \in \widehat{\mathbb{C}}_w$ es un *valor crítico* de f si $f(z_0) = w_0$.

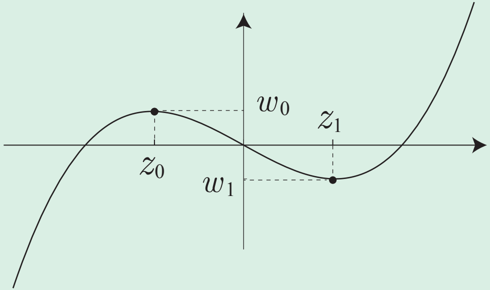


Figure : Puntos críticos z_0, z_1 y valores críticos w_0, w_1 de un polinomio cúbico.

Definición. Trayectoria de Jordan.

Una *trayectoria* $\Gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}$ *de Jordan* es:
cerrada simple y
divide la esfera en dos componentes conexas disjuntas homeomorfas al disco.

Cada componente conexa de $\widehat{\mathbb{C}}_w - \Gamma$ es llamada una región de Jordan.

Algoritmo para la construcción de un

mosaico $\mathfrak{M}$ en $\widehat{\mathbb{C}}_z$

a partir de un polinomio

$$f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$$

de grado $n \geq 2$.

Paso 0. Considerar $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ de grado $n \geq 2$.

Paso 1. Localizar el conjunto de puntos críticos de f

$$\{z_1, z_2, \ldots, z_\ell\} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}_z, \qquad \ell \leq n-1.$$

Paso 2. Calcular el conjunto de valores críticos de f

$$\mathfrak{R}_f = \left\{w_1 = f(z_1),\ w_2 = f(z_2), \ldots,\ w_\ell = f(z_\ell)\right\} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}_w.$$

Paso 3. Seleccionar una trayectoria de Jordan $\Gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_w$ orientada que pase todos los valores críticos de f e infinito

$$w_1, \ldots, w_\ell, \infty$$

siguiendo el orden de las etiquetas establecidas en $\mathfrak{R}_f$.

Paso 4. Elegir colores (azul y rojo) para las dos regiones de Jordan (llamadas teselas) de $\widehat{\mathbb{C}}_w - \Gamma$.

Paso 5. Asignar color a cada punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}_z - f^{-1}(\Gamma)$ mediante las siguientes reglas

- $z \in \widehat{\mathbb{C}}_z$ es azul si $f(z) \in \widehat{\mathbb{C}}_w$ es azul,
- $z \in \widehat{\mathbb{C}}_z$ es rojo si $f(z) \in \widehat{\mathbb{C}}_w$ es rojo.

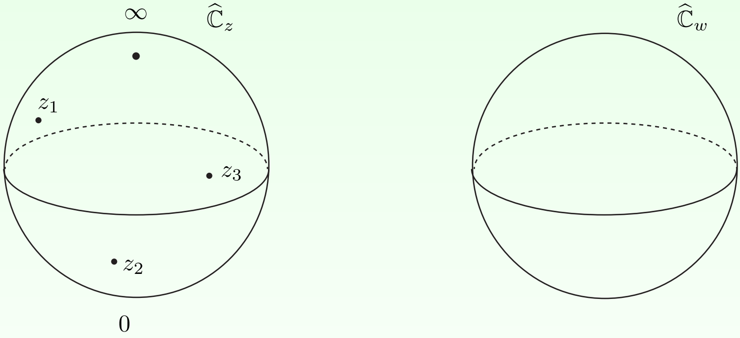


Figure : Puntos críticos.

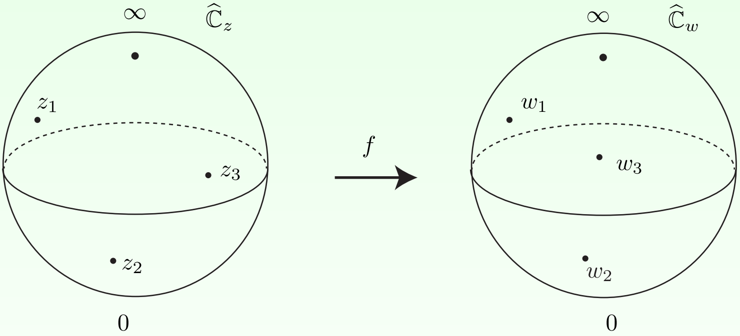


Figure : Valores críticos.

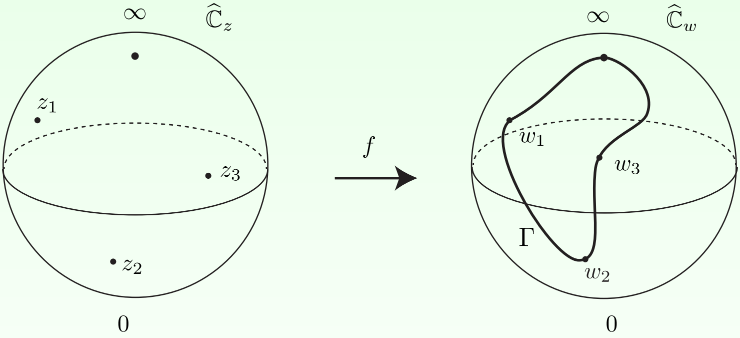


Figure : Elección de una trayectoria de Jordan Γ.

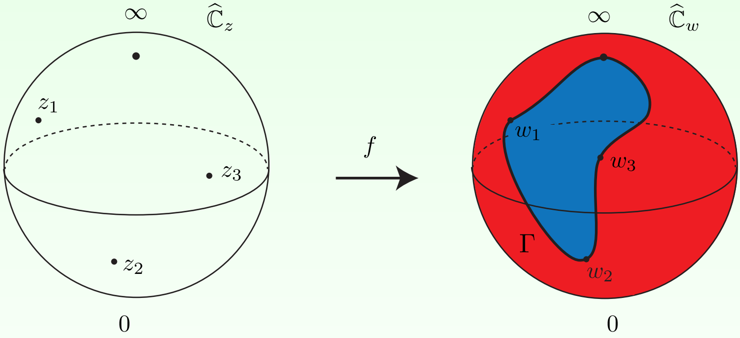


Figure : Elegir colores en el contradominio.

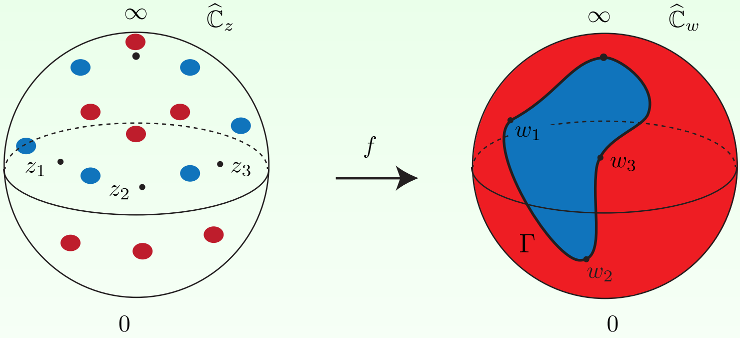


Figure : Elegir colores en el contradominio.

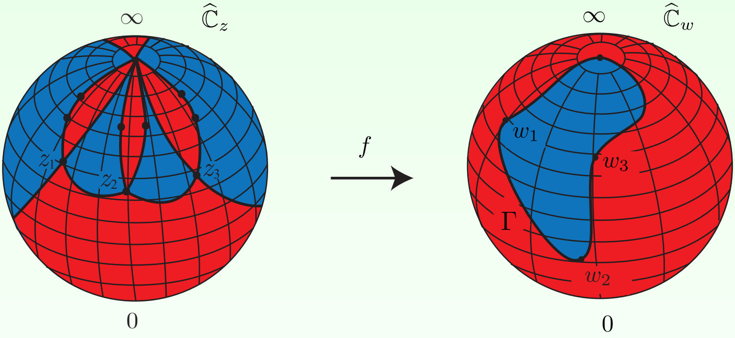


Figure : Asignación de colores en el dominio $\widehat{\mathbb{C}}_z$.

Definición. Mosaico y teselas.

Un *mosaico* $\mathfrak{M}$ en la esfera $\widehat{\mathbb{C}}_z$ es una familia finita de regiones de Jordan

$$\{\tau_j\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$$

que llamaremos *teselas*, tales que

a) toda tesela $\tau_j \in \mathfrak{M}$ es homeomorfa a un disco abierto,
b) $\widehat{\mathbb{C}}_z$ es unión de la cerradura $\overline{\tau_j}$ de todas las teselas,
c) para dos teselas $\tau_j, \tau_k \in \mathfrak{M}$ con $j \neq k$, sus cerraduras cumplen que

$$\overline{\tau_j} \cap \overline{\tau_k} = \begin{cases} \text{un punto} \\ \text{un arco simple} \\ \text{un conjunto de puntos y arcos simples} \\ \text{vacío.} \end{cases}$$

Ejemplo.

Consideremos el polinomio

$$\begin{aligned} f : \widehat{\mathbb{C}}_z &\longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w \\ z &\longmapsto z^2. \end{aligned}$$

El único punto crítico finito de f es $z = 0$, su valor crítico es $f(0) = 0$.

Elegiremos la trayectoria de Jordan $\Gamma \subseteq \widehat{\mathbb{C}}_w$ como el meridiano correspondiente al eje real.
Al calcular $f^{-1}(\Gamma)$ el mosaico determinado por f es:

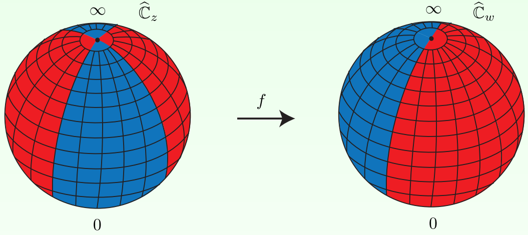


Figure : Mosaico determinado por el polinomio $f(z) = z^2$ de grado 2.

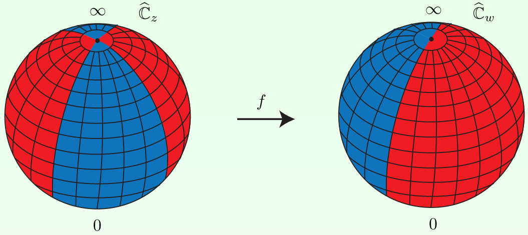
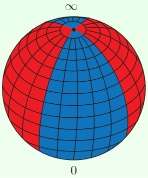


Figure : Mosaico determinado por el polinomio $f(z) = z^2$ de grado 2.

Teorema (Arthur Cayley 1821–1895).

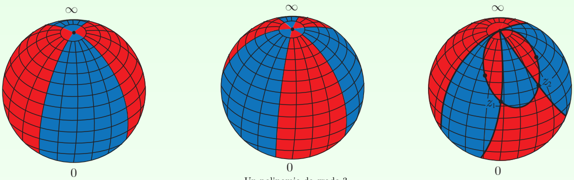
[a] Para todo polinomio f de grado 2, el mosaico determinado por f es como el de la figura,
salvo homeomorfismos que preserven orientación.

[a] Arthur Cayley; *The Newton-Fourier Imaginary Problem.* Amer. J. Math. 2 (1879), no. 1, 97.



Un polinomio de grado 2

Figure : Zoológico de mosaicos.



Un polinomio de grado 2 — Un polinomio de grado 3 — Un polinomio de grado 3

Figure : Zoológico de mosaicos.

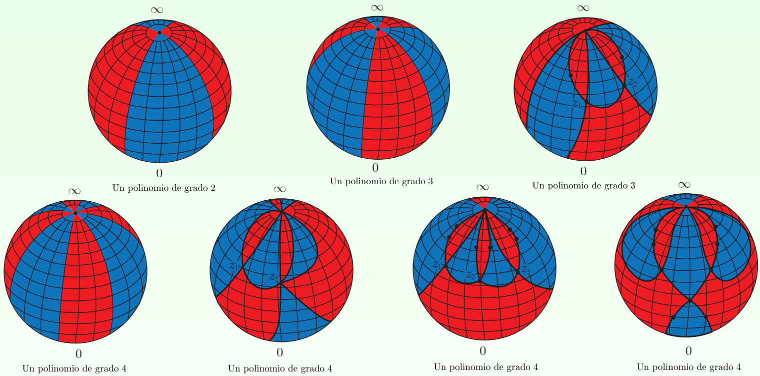


Figure : Zoológico de mosaicos.

Más preguntas.

- ¿De qué elementos depende la construcción de los mosaicos?
-
-
-
-

Más preguntas.

- ¿De qué elementos depende la construcción de los mosaicos?
- ¿Cuántos mosaicos existen a grado fijo?
-
-
-

Más preguntas.

- ¿De qué elementos depende la construcción de los mosaicos?
- ¿Cuántos mosaicos existen a grado fijo?
- ¿Podemos definir alguna relación de equivalencia en el espacio de mosaicos ?
-
-

Más preguntas.

- ¿De qué elementos depende la construcción de los mosaicos?
- ¿Cuántos mosaicos existen a grado fijo?
- ¿Podemos definir alguna relación de equivalencia en el espacio de mosaicos ?
- ¿Hay un número finito o infinito de clases?
-

Más preguntas.

- ¿De qué elementos depende la construcción de los mosaicos?
- ¿Cuántos mosaicos existen a grado fijo?
- ¿Podemos definir alguna relación de equivalencia en el espacio de mosaicos ?
- ¿Hay un número finito o infinito de clases?
- ¿Cuál es la estructura del espacio de mosaicos?

$$\text{Un polinomio en } \widehat{\mathbb{C}}_z \text{ de grado } n$$

$$\Downarrow$$

$$\{ \text{ Todos los polinomios en } \widehat{\mathbb{C}}_z \text{ de grado } n \text{ } \}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\{\text{Todos los polinomios en } \widehat{\mathbb{C}}_z \text{ de grado } n\}}{\sim}$$

$$\text{Un mosaico en } \widehat{\mathbb{C}}_z \text{ para } n \text{ fijo}$$
$$\Downarrow$$
$$\{\text{Todos los mosaicos } \mathfrak{M} \text{ en } \widehat{\mathbb{C}}_z \text{ para un } n \text{ fijo}\}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\{\text{Todos los mosaicos } \mathfrak{M} \text{ en } \widehat{\mathbb{C}}_z \text{ para un } n \text{ fijo }\}}{\sim}$$

- ¿Son “iguales” el espacio cociente de polinomios y el espacio cociente de mosaicos?

Pregunta día lunes.

¿Cuál es la forma topológica de un polinomio

$$f : \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_w \text{ ?}$$