

Números enteros, funciones holomorfas y mosaicos

Jesús Muciño Raymundo
muciray@matmor.unam.mx

Leidy Johanna González Cely
leidyjohannagonzalezcely@gmail.com

Nanci Pintor Lázaro
naancki@gmail.com

Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM, México

Junio 2016

Pregunta día lunes.

¿Cuál es la forma topológica de un polinomio

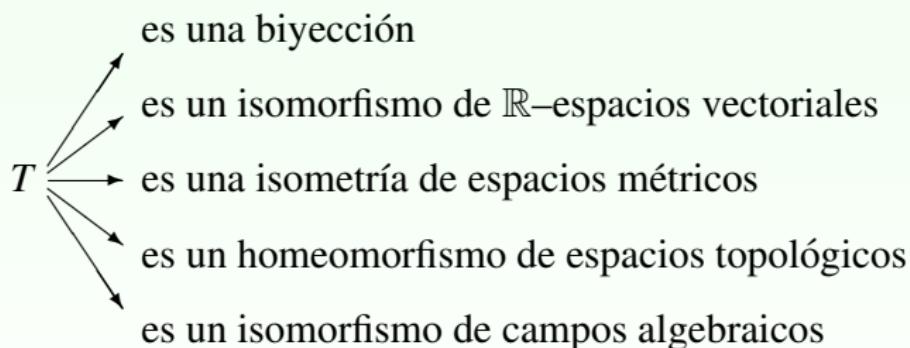
$$f : \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_w ?$$

forma = { el comportamiento topológico,
 su geometría.

Existen números 2-dimensionales
 \mathbb{C} .

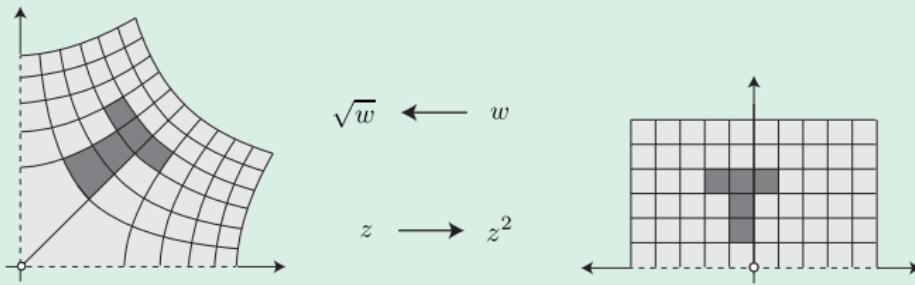
$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{C} = \{(a + ib)\} & \\
 T \nearrow & & \searrow T \\
 \mathbb{R}^2 = \{(a, b)\} & \longleftrightarrow & \mathcal{MC} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right\}
 \end{array}$$

Llamamos a T el traductor.



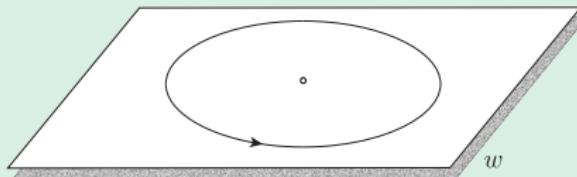
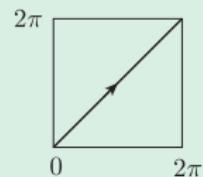
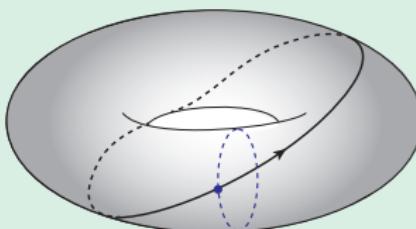
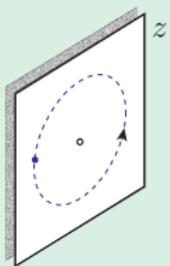
Ejemplo 1.

$$\begin{aligned} z &\longrightarrow z^2 = w \\ x + iy &\longrightarrow (x^2 - y^2) + 2ixy \end{aligned}$$



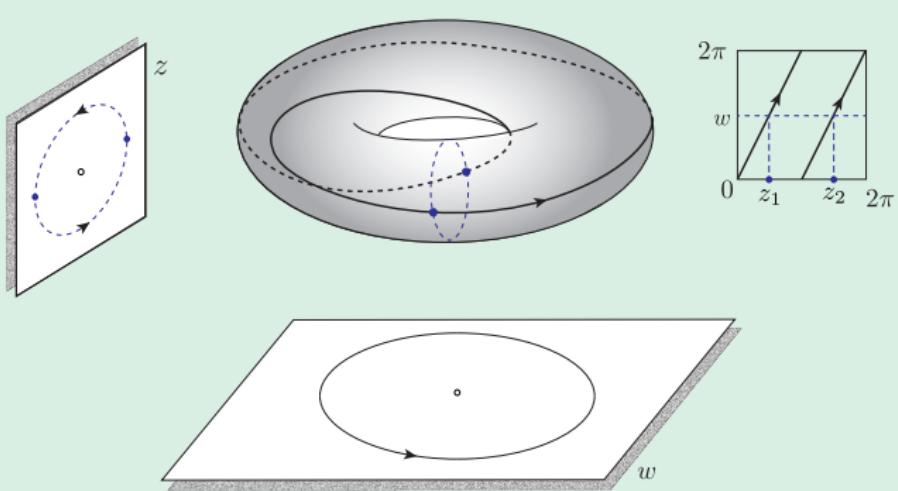
Ejemplo 2.

$$\begin{array}{ccc} z & \longrightarrow & z = w \\ x + iy & \longrightarrow & x + iy \end{array}$$



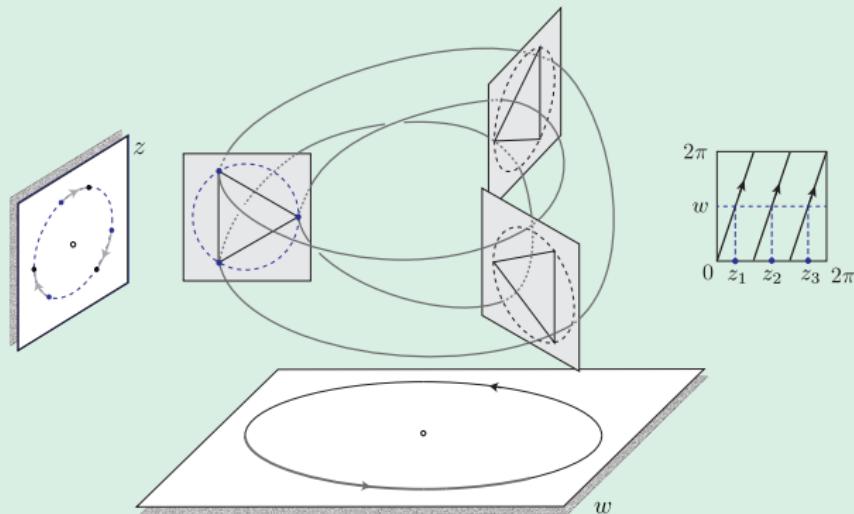
Ejemplo 3.

$$z \longrightarrow z^2 = w$$



Ejemplo 4.

$$\begin{aligned} z &\longrightarrow z^3 = w \\ x + iy &\longrightarrow (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) \end{aligned}$$



Definición. Punto crítico y valor crítico de un polinomio.

Dado un polinomio

$$f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$$

$$z \longmapsto a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n, \quad n \geq 2$$

- $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}_z$ es un *punto crítico* de f si $f'(z_0) = 0$,
- $w_0 \in \widehat{\mathbb{C}}_w$ es un *valor crítico* de f si $f(z_0) = w_0$.

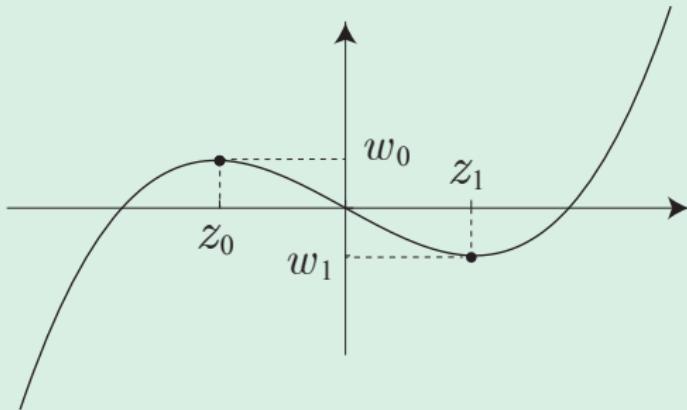


Figure : Puntos críticos z_0, z_1 y valores críticos w_0, w_1 de un polinomio cúbico.

Definición. Trayectoria de Jordan.

Una *trayectoria* $\Gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}$ de *Jordan* es:

cerrada simple y

divide la esfera en dos componentes conexas disjuntas homeomorfas al disco.

Cada componente conexa de $\widehat{\mathbb{C}}_w - \Gamma$ es llamada una *región de Jordan*.

**Algoritmo para la construcción de un
mosaico \mathfrak{M} en $\widehat{\mathbb{C}}_z$
a partir de un polinomio**

$$f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$$

de grado $n \geq 2$.

Paso 0. Considerar $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ de grado $n \geq 2$.

Paso 1. Localizar el conjunto de puntos críticos de f

$$\{z_1, z_2, \dots, z_\ell\} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}_z, \quad \ell \leq n - 1.$$

Paso 2. Calcular el conjunto de valores críticos de f

$$\mathfrak{R}_f = \left\{ w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2), \dots, w_\ell = f(z_\ell) \right\} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}_w.$$

Paso 3. Seleccionar una trayectoria de Jordan $\Gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_w$ orientada que pase todos los valores críticos de f e infinito

$$w_1, \dots, w_\ell, \infty$$

siguiendo el orden de las etiquetas establecidas en \mathfrak{R}_f .

Paso 4. Elegir colores (azul y rojo) para las dos regiones de Jordan (llamadas teselas) de $\widehat{\mathbb{C}}_w - \Gamma$.

Paso 5. Asignar color a cada punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}_z - f^{-1}(\Gamma)$ mediante las siguientes reglas

- $z \in \widehat{\mathbb{C}}_z$ es azul si $f(z) \in \widehat{\mathbb{C}}_w$ es azul,
- $z \in \widehat{\mathbb{C}}_z$ es rojo si $f(z) \in \widehat{\mathbb{C}}_w$ es rojo.

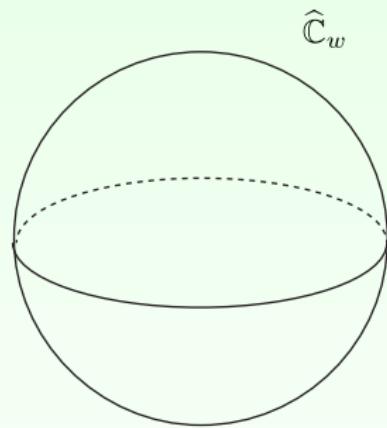
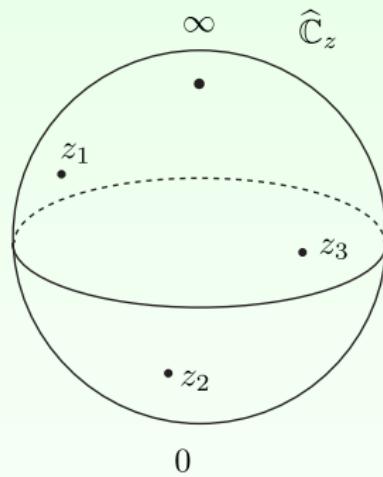


Figure : Puntos críticos.

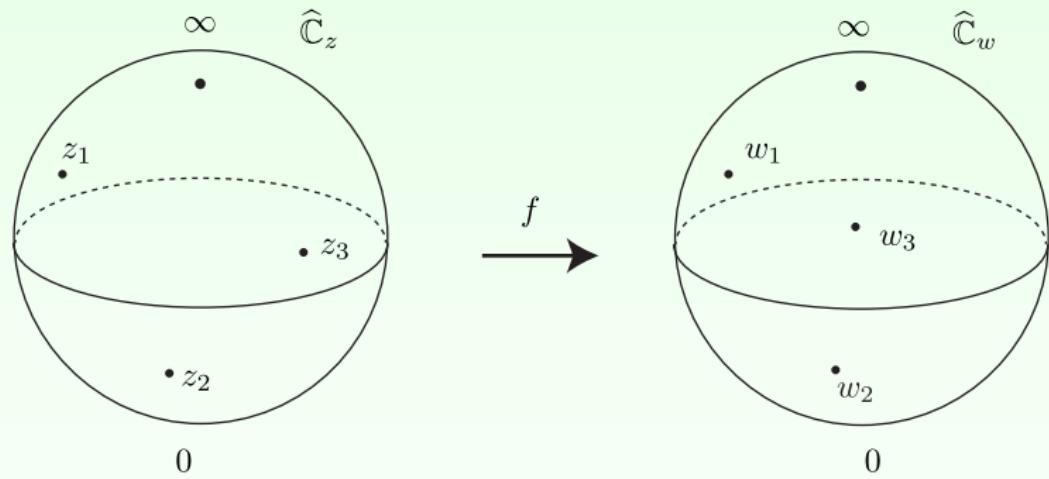


Figure : Valores críticos.

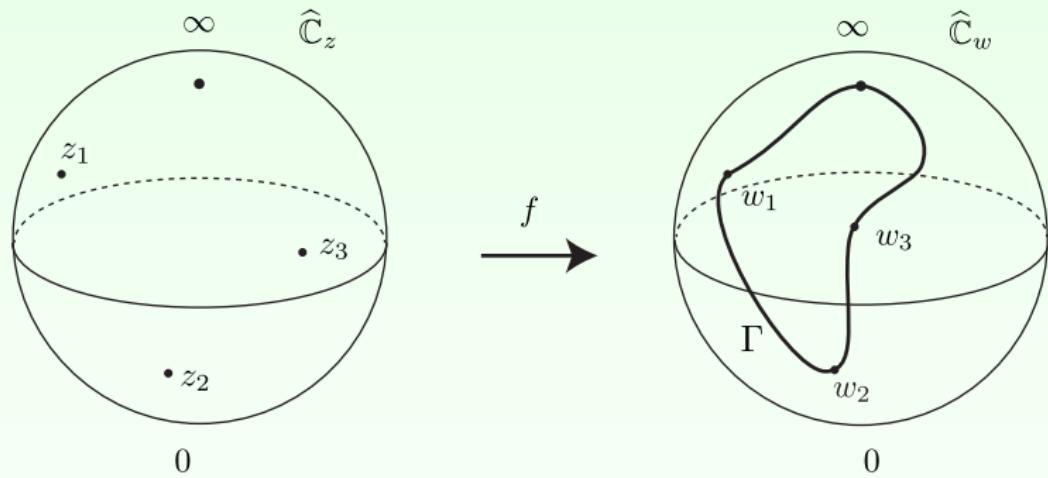


Figure : Elección de una trayectoria de Jordan Γ .

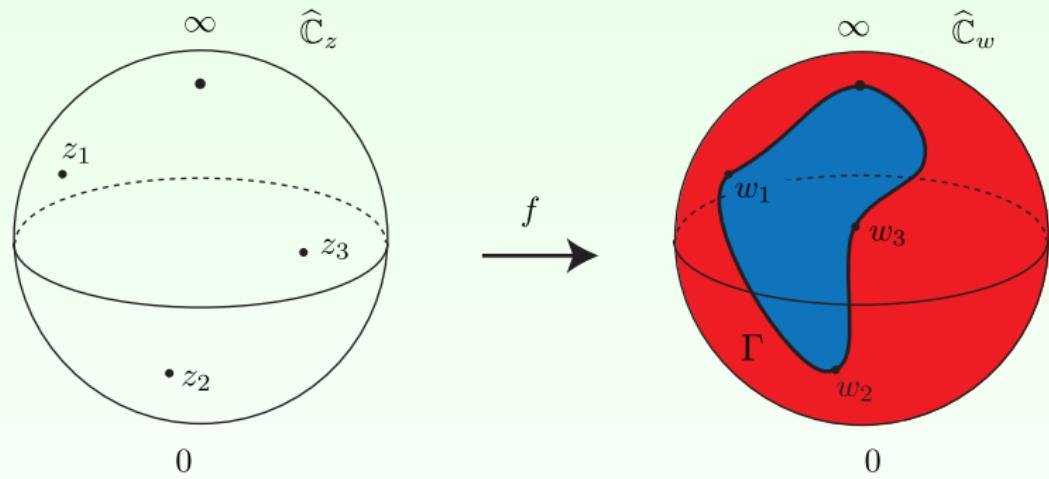


Figure : Elegir colores en el contradominio.

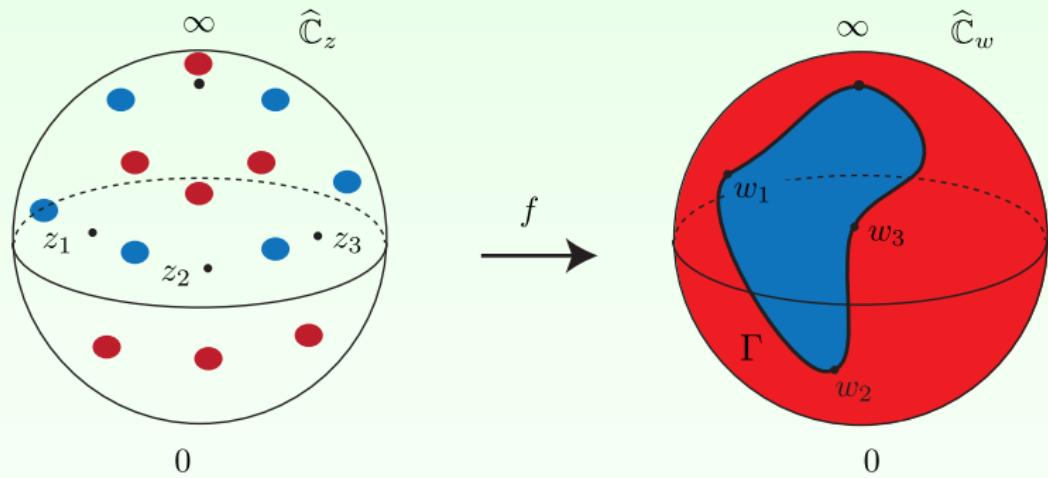


Figure : Elegir colores en el contradominio.

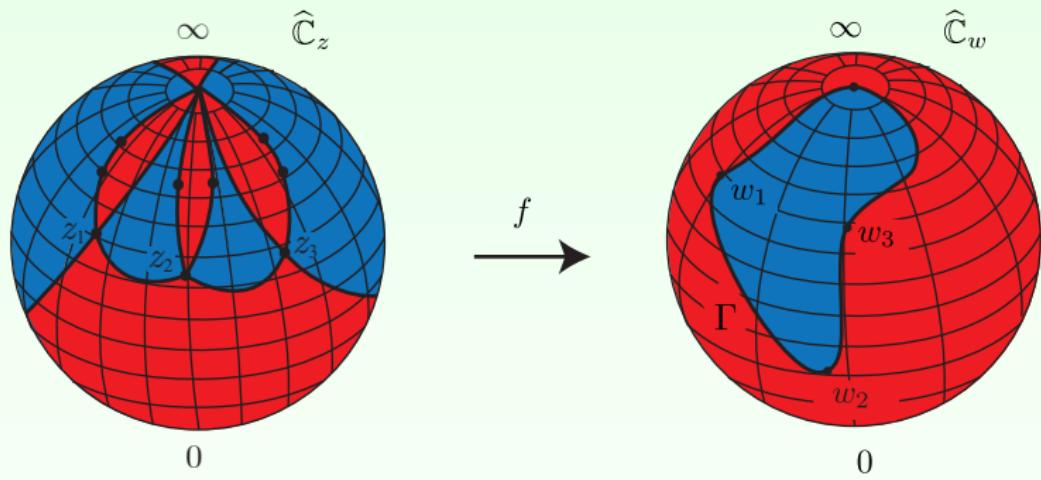


Figure : Asignación de colores en el dominio $\widehat{\mathbb{C}}_z$.

Definición. Mosaico y teselas.

Un *mosaico* \mathfrak{M} en la esfera $\widehat{\mathbb{C}}_z$ es una familia finita de regiones de Jordan

$$\{\tau_j\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$$

que llamaremos *teselas*, tales que

- a) toda tesela $\tau_j \in \mathfrak{M}$ es homeomorfa a un disco abierto,
- b) $\widehat{\mathbb{C}}_z$ es unión de la cerradura $\overline{\tau_j}$ de todas las teselas,
- c) para dos teselas $\tau_j, \tau_k \in \mathfrak{M}$ con $j \neq k$, sus cerraduras cumplen que

$$\overline{\tau_j} \cap \overline{\tau_k} = \begin{cases} \text{un punto} \\ \text{un arco simple} \\ \text{un conjunto de puntos y arcos simples} \\ \text{vacío.} \end{cases}$$

Ejemplo.

Consideremos el polinomio

$$\begin{aligned}f : \widehat{\mathbb{C}}_z &\longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w \\z &\longmapsto z^2.\end{aligned}$$

El único punto crítico finito de f es $z = 0$, su valor crítico es $f(0) = 0$.

Elegiremos la trayectoria de Jordan $\Gamma \subseteq \widehat{\mathbb{C}}_w$ como el meridiano correspondiente al eje real.

Al calcular $f^{-1}(\Gamma)$ el mosaico determinado por f es:

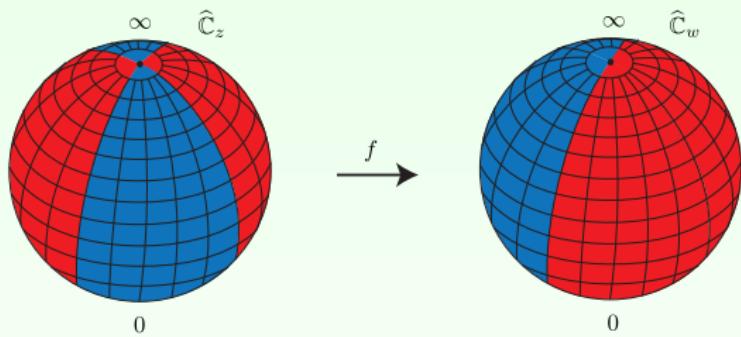


Figure : Mosaico determinado por el polinomio $f(z) = z^2$ de grado 2.

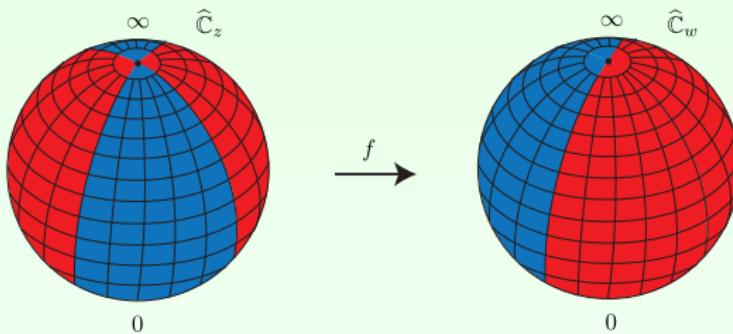


Figure : Mosaico determinado por el polinomio $f(z) = z^2$ de grado 2.

Teorema (Arthur Cayley 1821–1895).

^a Para todo polinomio f de grado 2, el mosaico determinado por f es como el de la figura,
salvo homeomorfismos que preserven orientación.

^aArthur Cayley; *The Newton-Fourier Imaginary Problem*. Amer. J. Math. 2 (1879), no. 1, 97.

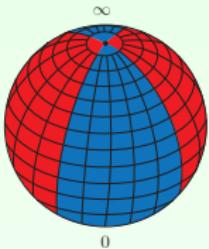


Figure : Zoológico de mosaicos.

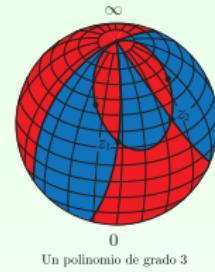
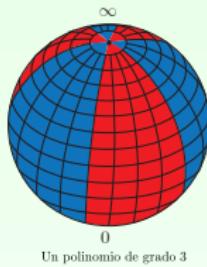
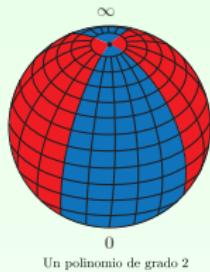


Figure : Zoológico de mosaicos.

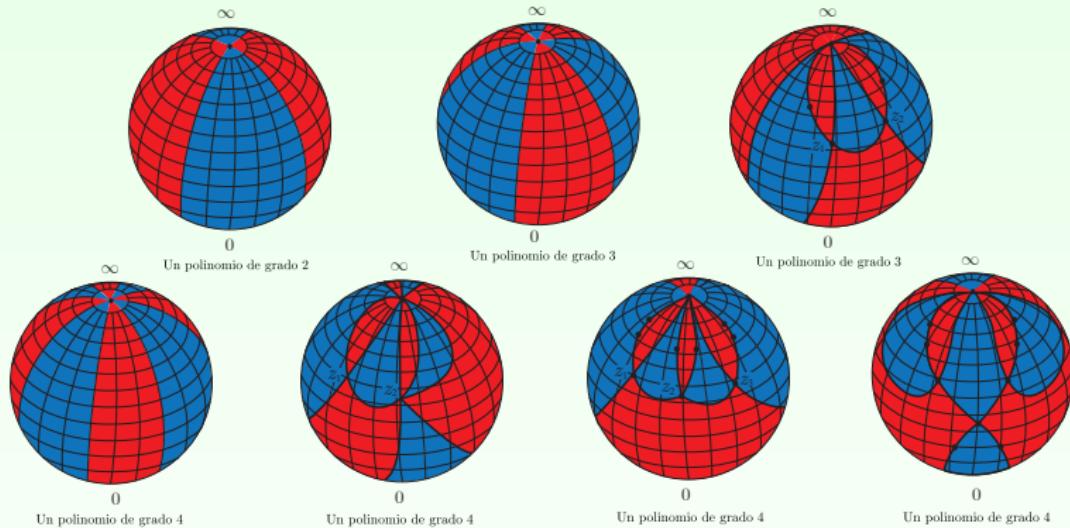


Figure : Zoológico de mosaicos.

Más preguntas.

- ¿De qué elementos depende la construcción de los mosaicos?

-
-
-
-

Más preguntas.

- ¿De qué elementos depende la construcción de los mosaicos?
- ¿Cuántos mosaicos existen a grado fijo?
-
-
-

Más preguntas.

- ¿De qué elementos depende la construcción de los mosaicos?
- ¿Cuántos mosaicos existen a grado fijo?
- ¿Podemos definir alguna relación de equivalencia en el espacio de mosaicos ?
-
-

Más preguntas.

- ¿De qué elementos depende la construcción de los mosaicos?
- ¿Cuántos mosaicos existen a grado fijo?
- ¿Podemos definir alguna relación de equivalencia en el espacio de mosaicos ?
- ¿Hay un número finito o infinito de clases?
-

Más preguntas.

- ¿De qué elementos depende la construcción de los mosaicos?
- ¿Cuántos mosaicos existen a grado fijo?
- ¿Podemos definir alguna relación de equivalencia en el espacio de mosaicos ?
- ¿Hay un número finito o infinito de clases?
- ¿Cuál es la estructura del espacio de mosaicos?

Un polinomio en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ de grado n



{ Todos los polinomios en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ de grado n }



{Todos los polinomios en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ de grado n }



Un mosaico en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ para n fijo



{Todos los mosaicos \mathfrak{M} en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ para un n fijo}



{Todos los mosaicos \mathfrak{M} en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ para un n fijo }



- ¿Son “iguales” el espacio cociente de polinomios y el espacio cociente de mosaicos?

Pregunta día lunes.

¿Cuál es la forma topológica de un polinomio

$$f : \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_w ?$$

Pregunta día martes.

¿Qué características debe tener un mosaico \mathfrak{M} en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}_z$ para ser determinado por un polinomio

$$f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w ?$$

Recordando el algoritmo para construir mosaicos.

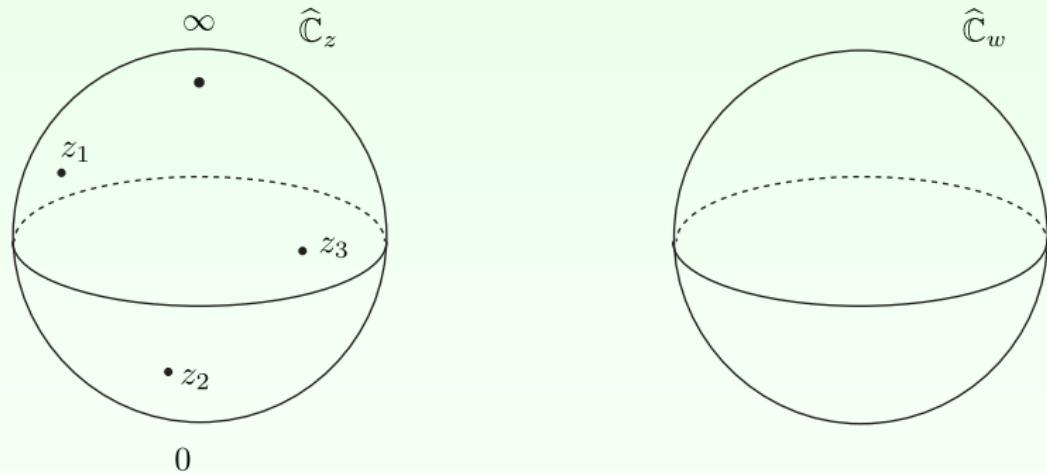


Figure : Puntos críticos.

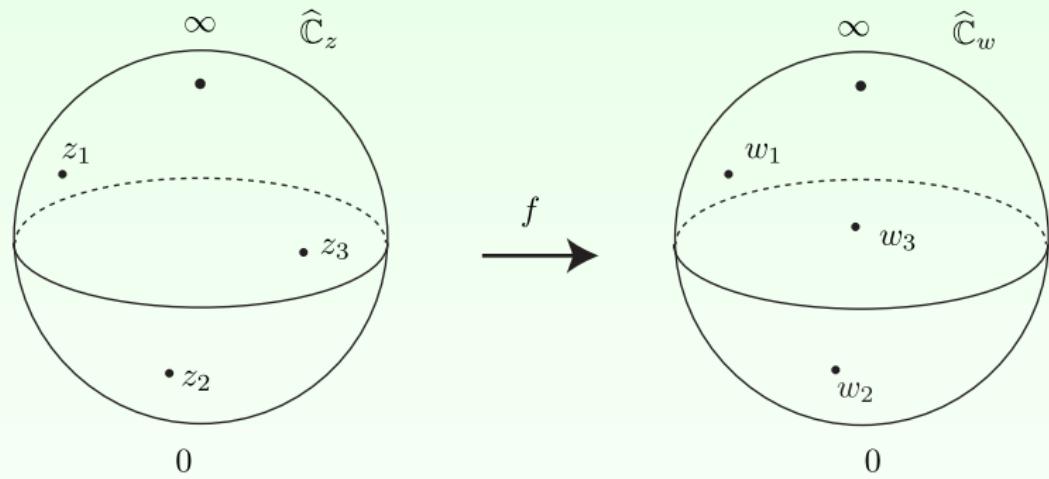


Figure : Valores críticos.

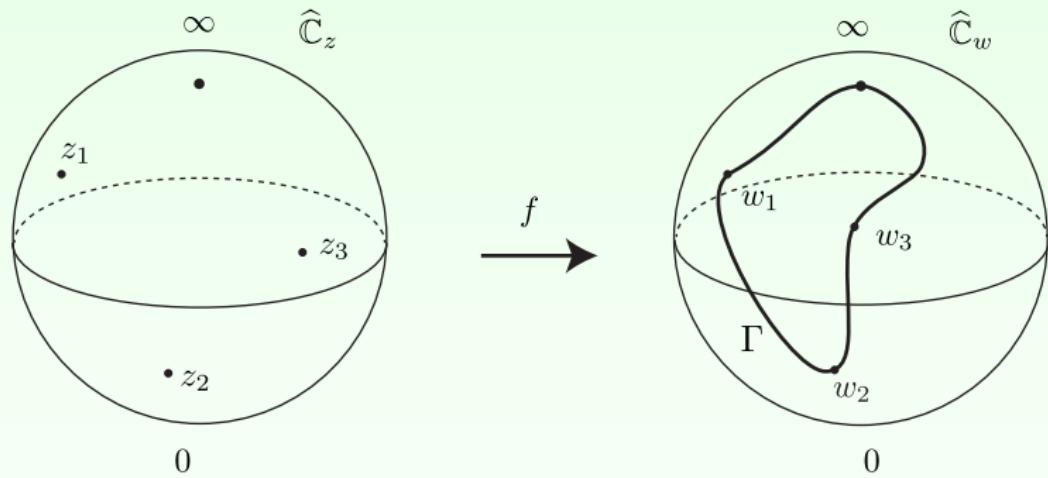


Figure : Elección de una trayectoria de Jordan Γ .

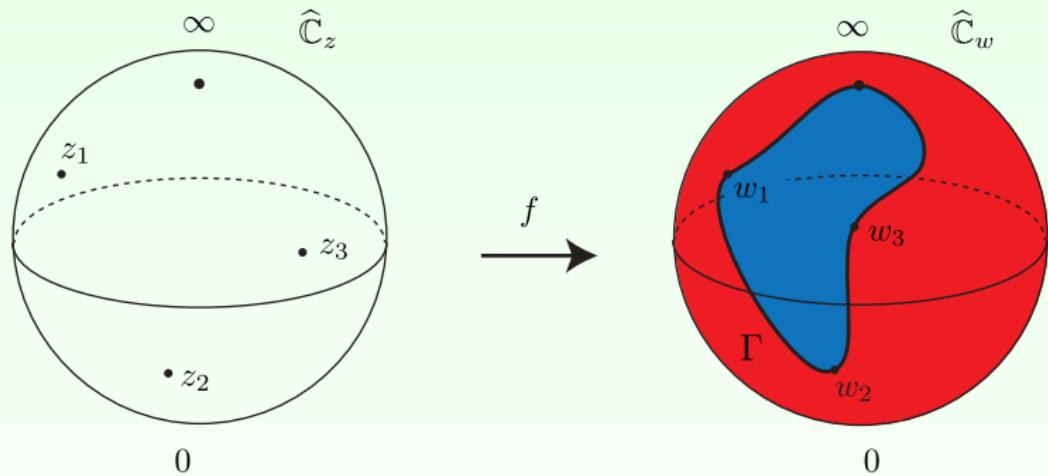


Figure : Elegir colores en el contradominio.

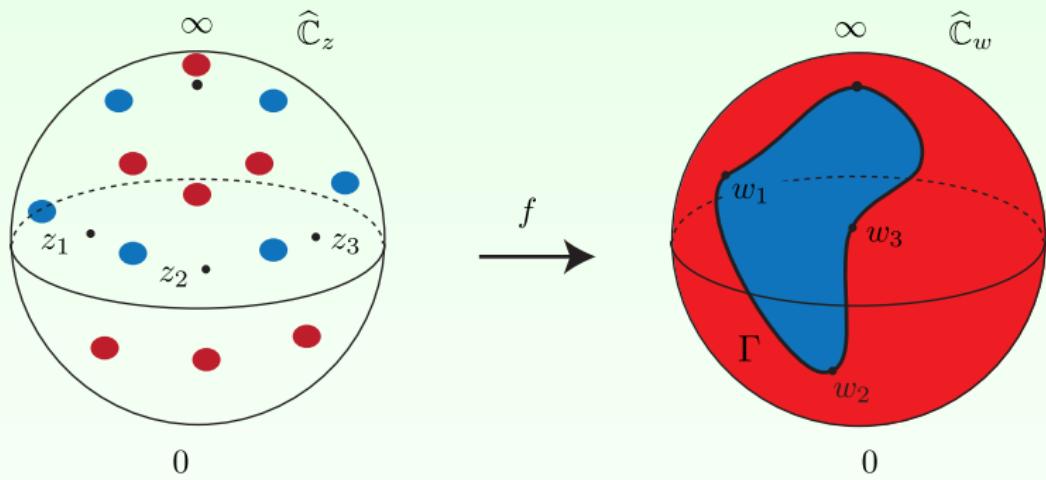


Figure : Elegir colores en el contradominio.

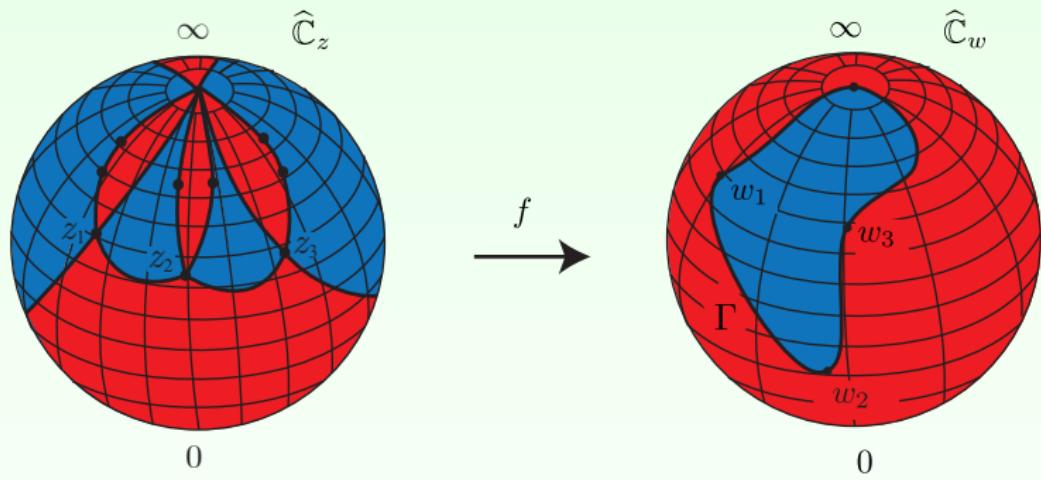


Figure : Asignación de colores en el dominio $\widehat{\mathbb{C}}_z$.

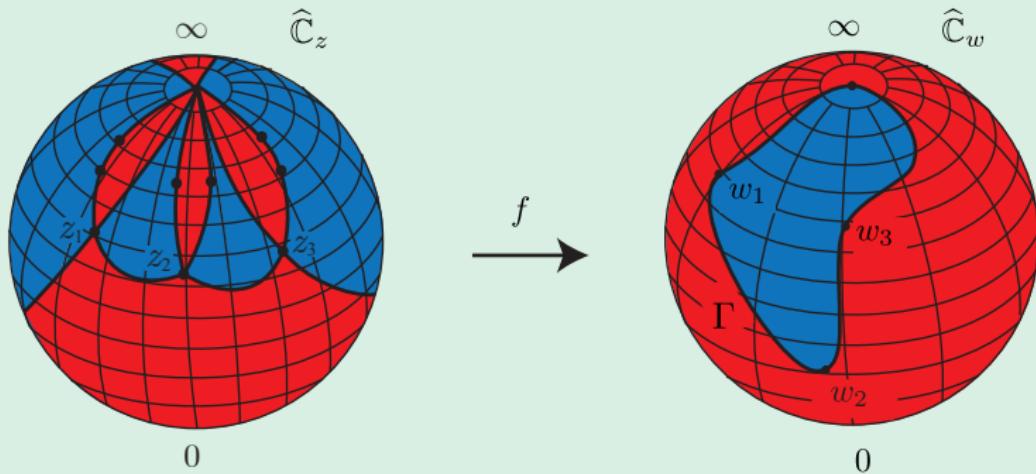
Definición. Gráfica.

Una gráfica \mathcal{G} es un par ordenado $\mathcal{G} = (V, E)$, donde:

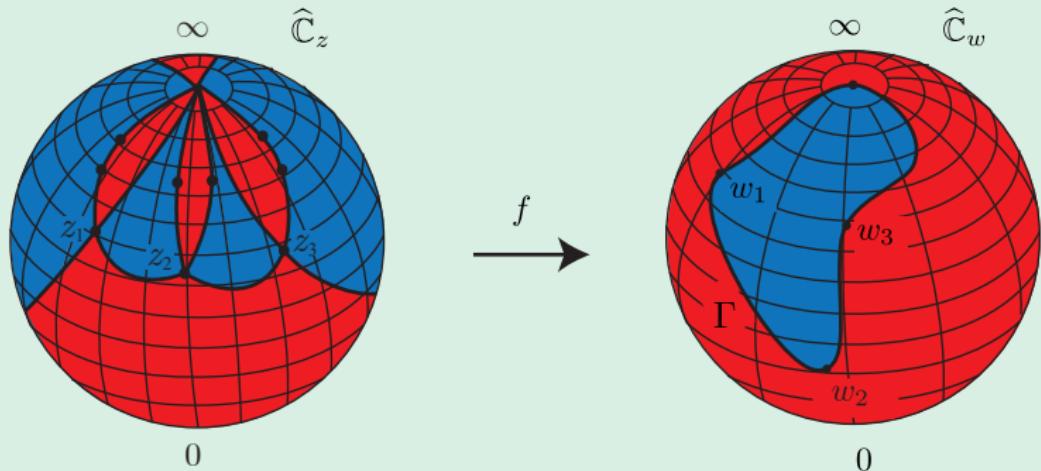
- V es el conjunto de vértices y
- E es el conjunto de aristas entre parejas de vértices.

La *valencia* de un vértice es el número de aristas incidentes en el vértice.

Observaciones.

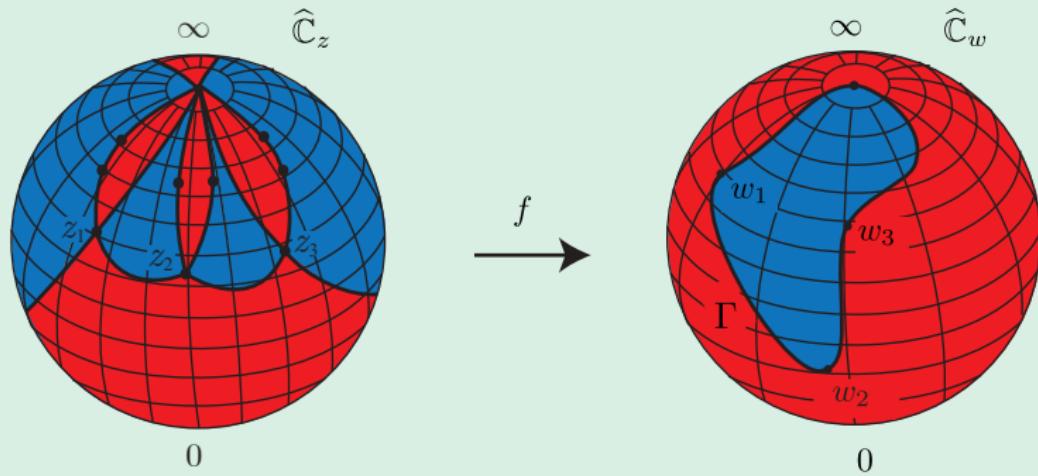


Observaciones.



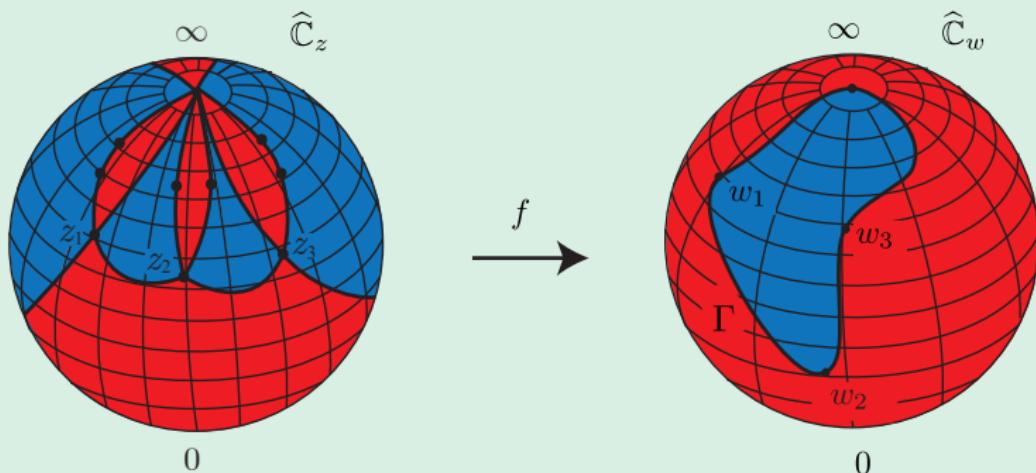
- La trayectoria de Jordan Γ es una gráfica orientada en $\widehat{\mathbb{C}}_w$ con el conjunto de vértices $V_\Gamma = \mathfrak{R}_f$, donde cada vértice $w_i \in V_\Gamma$ tiene valencia 2 y el conjunto de aristas E es igual a los arcos de Γ que unen w_i con w_{i+1} .

Observaciones.



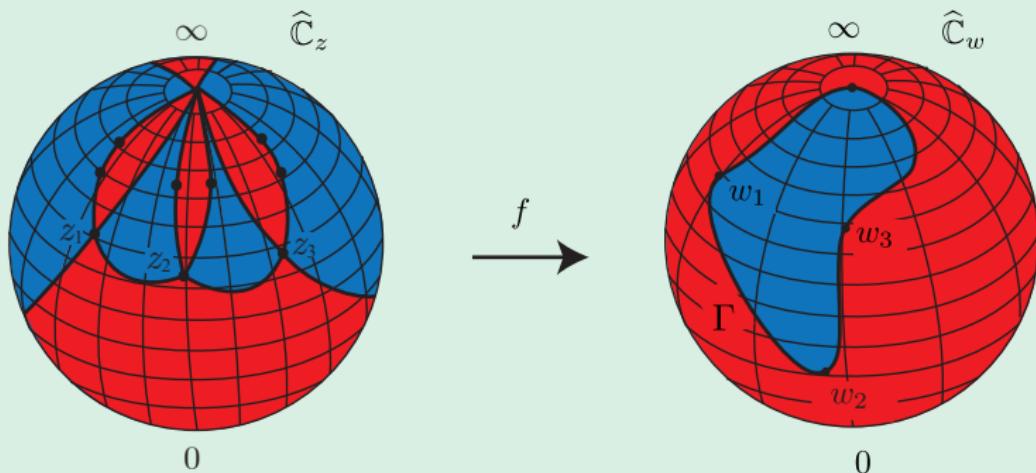
- $f^{-1}(\Gamma) \subset \widehat{\mathbb{C}}_z$ es una gráfica orientada en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ con el conjunto de vértices $V_{f^{-1}(\Gamma)} = f^{-1}(\mathfrak{R}_f)$ y el conjunto de aristas $E_{f^{-1}(\Gamma)} = f^{-1}(E)$.

Observaciones.



- Los vértices en $V_{f^{-1}(\Gamma)}$ siempre tienen valencia par.

Observaciones.



- Los vértices en $V_{f^{-1}(\Gamma)}$ con valencia mayor o igual a 4 corresponden a puntos críticos de f .

Existen otros vértices en $V_{f^{-1}(\Gamma)}$ que tienen valencia 2.

Todas las teselas en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ tienen un vértice (∞) en común.

Definición (multiplicidad de un punto crítico).

Dado un polinomio

$$f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$$

$$z \longmapsto a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n, \quad n \geq 2,$$

la multiplicidad ν_i de un punto crítico $z_i \in \widehat{\mathbb{C}}_z$ de f es:

analíticamente \longrightarrow el número de derivadas consecutivas de f que se anulan en z_i .

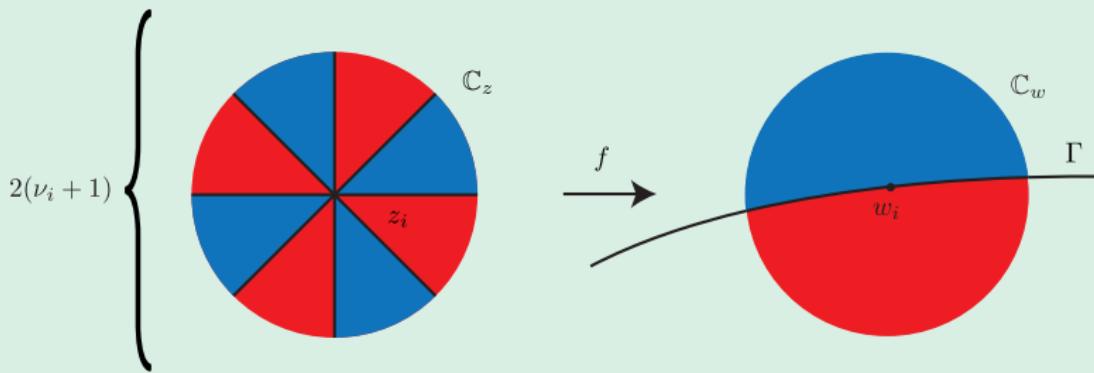
$$\begin{aligned} f'(z_i) = f''(z_i) = \dots = f^{\nu_i}(z_i) &= 0, \\ f^{\nu_i+1}(z_i) &\neq 0 \end{aligned}$$

geométricamente \longrightarrow el número de giros menos uno de f en z_i (local).

Donde el número de giros es el número de veces que el círculo unitario cubre al círculo unitario bajo f .



Observaciones

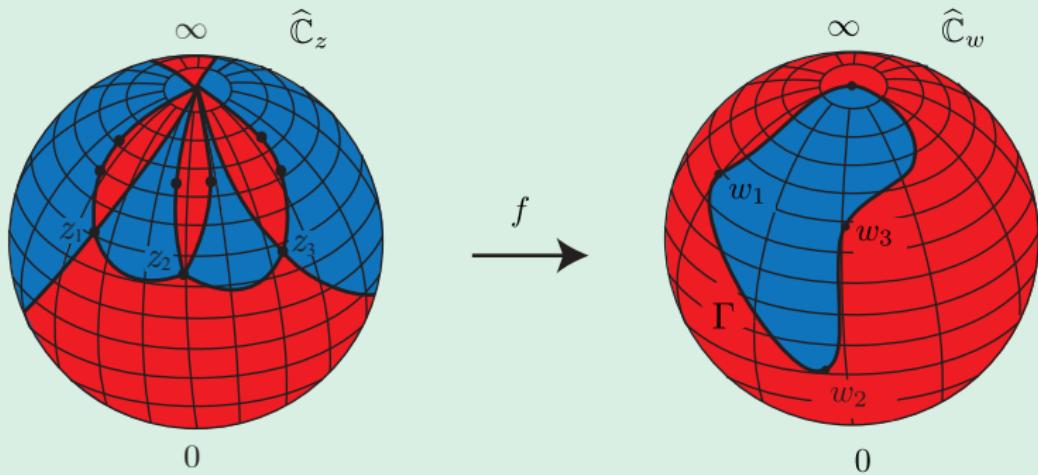


- La imagen inversa $f^{-1}(\Gamma)$ presenta el siguiente fenómeno local:
si se considera un trozo de Γ que pasa por un valor crítico w_i ,
entonces la valencia del punto crítico z_i es $2(\nu_i + 1)$, donde ν_i es la
multiplicidad del punto crítico z_i .

Definición (multiplicidad de un punto crítico z_i).

	analítica	geométrica	lenguaje mosaicos
multiplicidad del punto z_i	número de derivadas consecutivas que se anulan en z_i	número de giros de f en z_i	valencia del vértice z_i
(z_i, ν_i)	ν_i	$\nu_i + 1$	$2(\nu_i + 1)$

Observaciones



- $\widehat{\mathbb{C}}_z - f^{-1}(\Gamma)$ determina $2n$ teselas en $\widehat{\mathbb{C}}_z$, donde hay n de cada color.
¿Cuál es la interpretación analítica de n ?

Resultado del algoritmo.

un polinomio

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$



un mosaico

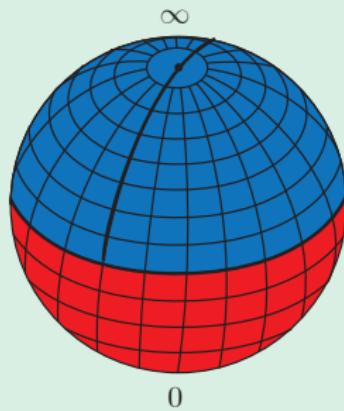
\mathfrak{M}

Pregunta.

¿Todos los mosaicos en la esfera $\widehat{\mathbb{C}_z}$ provienen de un polinomio?

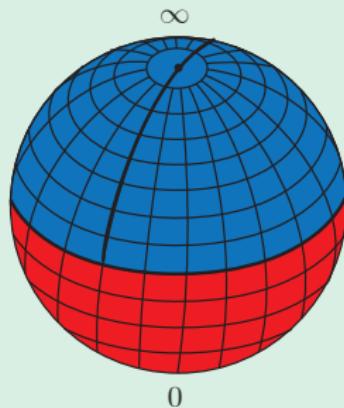
Pregunta.

¿Todos los mosaicos en la esfera $\widehat{\mathbb{C}}_z$ provienen de un polinomio?



Pregunta.

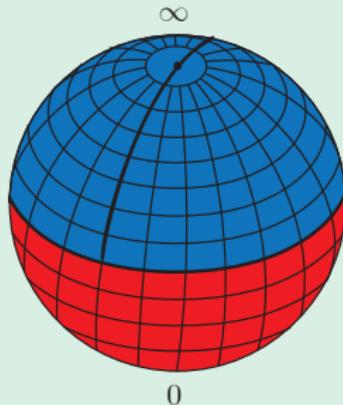
¿Todos los mosaicos en la esfera $\widehat{\mathbb{C}}_z$ provienen de un polinomio?



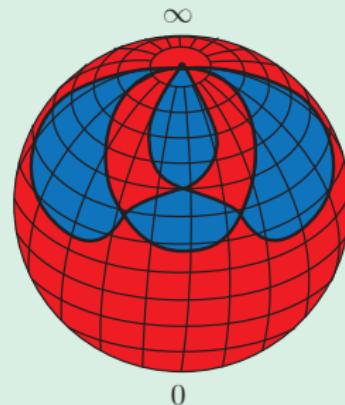
Alternancia en colores

Pregunta.

¿Todos los mosaicos en la esfera $\widehat{\mathbb{C}}_z$ provienen de un polinomio?

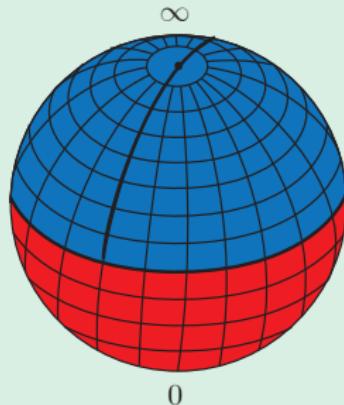


Alternancia en colores

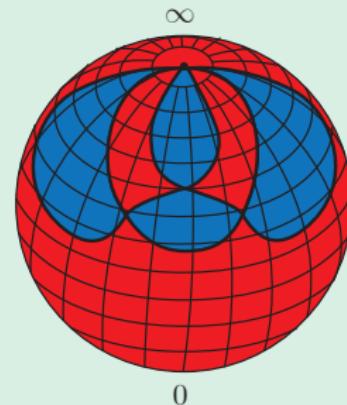


Pregunta.

¿Todos los mosaicos en la esfera $\widehat{\mathbb{C}}_z$ provienen de un polinomio?



Alternancia en colores



n teselas rojas

n teselas azules

Todas las teselas tienen un vértice en común

Condiciones necesarias que deben cumplir nuestros mosaicos.

- ① El número de teselas es par.
- ② Alternancia en los colores de las teselas.
- ③ Todas las teselas se intersectan en un mismo vértice (∞).

Pregunta.

¿Depende el mosaico M de la cantidad de puntos críticos de f y sus respectivas multiplicidades?

Observación.

El número de mosaicos distintos topológicamente para el espacio de polinomios de grado n está acotado inferiormente con las particiones del número $n - 1$.

Recordemos: Una partición de un número entero positivo n es una secuencia de números enteros positivos n_1, n_2, \dots, n_ℓ tal que

$$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_\ell \quad \text{y} \quad n_1 + n_2 + \dots + n_\ell = n.$$

Definición.

El *discriminante* de un polinomio $f(z) = a_0 + \dots + a_n z^n$ es

$$D(f) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{1}{a_n} R(f, f')$$

donde $R(f, f')$ se conoce como la resultante de f y f' .

El polinomio f tiene raíces múltiples si y sólo si el discriminante es cero.

Matriz resultante $R(f, f')$.

$$\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\ na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \cdots & 1a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \cdots & 1a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \cdots & 1a_1 \end{pmatrix}$$

Discriminante para polinomios de grado $n = 2, 3.$

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$$



$$D(f) = a_1^2 - 4a_2a_0.$$

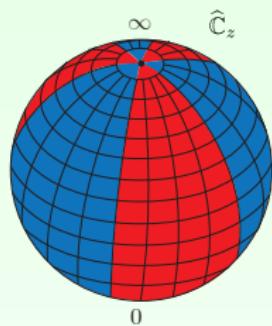
$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$$



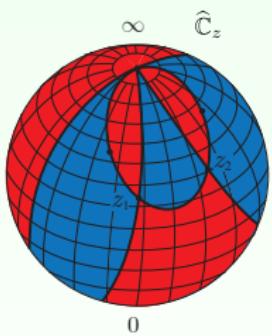
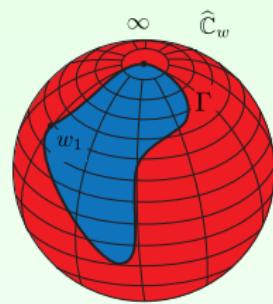
$$D(f) = a_2^2 a_1^2 - 4a_3 a_1^3 - 4a_2^3 a_0 - 27a_3^2 a_0^2 + 18a_3 a_2 a_1 a_0.$$

¿Por qué me interesa el discriminante^a?

^aGabriel Katz; *How to solve algebraic equations, or a remarkable geometry of discriminant varieties.* Expo. Math. 21 (2003), 219–261.



f grado 3
1 punto crítico multiplicidad 2



f grado 3
2 puntos críticos simples

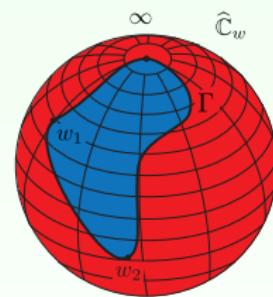


Figure : Dos mosaicos de grado 3 que no son equivalentes topológicamente.

Definición. Equivalencia topológica entre mosaicos.

Dos mosaicos $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ determinados por f, g respectivamente son *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo que preserva orientación

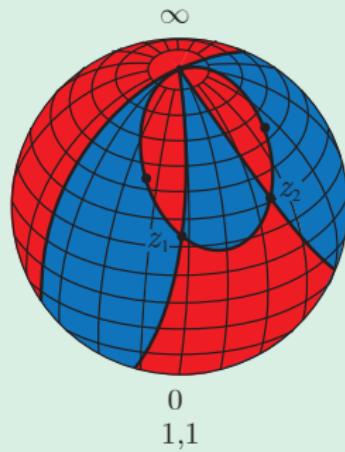
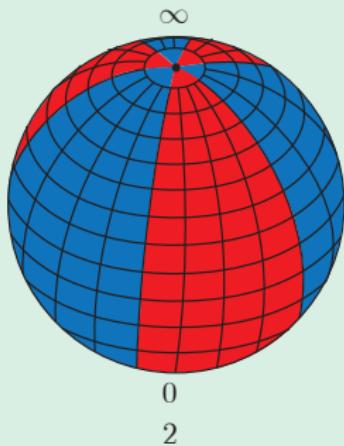
$$\psi : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_z$$

tal que el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{C}}_z & \xrightarrow{\psi} & \widehat{\mathbb{C}}_z \\ f \searrow & & \swarrow g \\ & \widehat{\mathbb{C}}_w & \end{array}$$

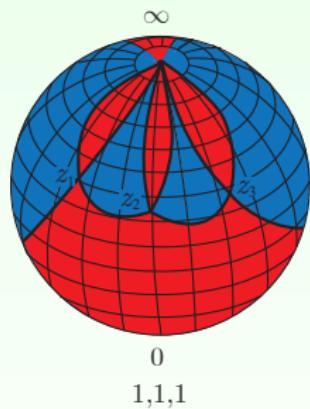
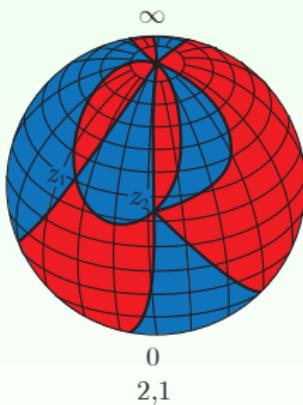
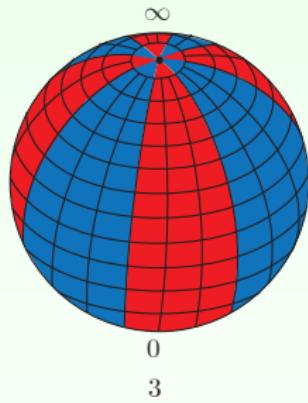
Lema, a la Cayley.

Hay 2 mosaicos topológicamente distintos para polinomios de grado 3.

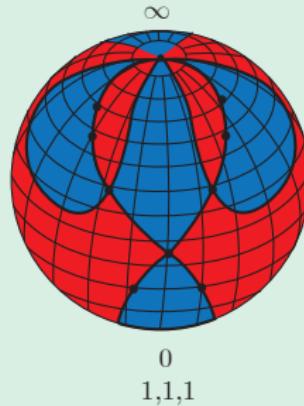
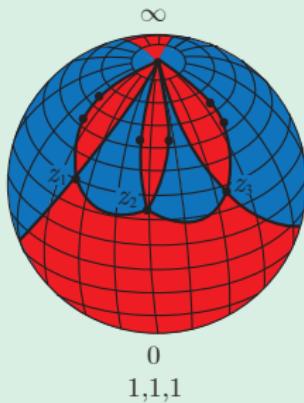


Pregunta, a la Cayley.

¿Hay exactamente 3 mosaicos topológicamente distintos para polinomios de grado 4?



La respuesta es NO.



Resumen hasta el momento.

- Dado un polinomio f de grado $n \geq 2$, éste determina un mosaico en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ que **depende** de la elección de la trayectoria de Jordan Γ .

Resumen hasta el momento.

- Dado un polinomio f de grado $n \geq 2$, éste determina un mosaico en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ que **depende** de la elección de la trayectoria de Jordan Γ .
- El número de mosaicos distintos topológicamente para un polinomio de grado $n \geq 2$ está acotado inferiormente con las particiones del número $n - 1$.

Resumen hasta el momento.

- Dado un polinomio f de grado $n \geq 2$, éste determina un mosaico en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ que **depende** de la elección de la trayectoria de Jordan Γ .
- El número de mosaicos distintos topológicamente para un polinomio de grado $n \geq 2$ está acotado inferiormente con las particiones del número $n - 1$.
- Si el número de valores críticos del polinomio f es mayor o igual a tres, hay más de un mosaico correspondiente a una misma partición.

Problemas para no dormir.

- ¿Cómo depende un mosaico \mathfrak{M} en $\widehat{\mathbb{C}}_z$, proveniente de un polinomio f , de la elección de la trayectoria de Jordan Γ ?
- ¿Cómo demostrar que si el número de valores críticos del polinomio f es mayor o igual a tres, hay más de un mosaico correspondiente a una misma partición?
- ¿Dada una colección de puntos críticos y sus respectivas multiplicidades

$$(z_1, \nu_1), (z_2, \nu_2), \dots, (z_k, \nu_k),$$

existe un mosaico \mathfrak{M} en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ que provenga de un polinomio f con estos puntos críticos y estas multiplicidades?

Pregunta día martes.

¿Qué características debe tener un mosaico \mathfrak{M} en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ para ser determinado por un polinomio

$$f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w ?$$

Pregunta día miércoles.

¿Qué significa que una función meromorfa

$$f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$$

está localmente controlada por un número entero y
globalmente determinada por una colección finita
de números enteros?

- ¿Dada una colección de puntos críticos y sus respectivas multiplicidades

$$(z_1, \nu_1), (z_2, \nu_2), \dots, (z_k, \nu_k),$$

existe un mosaico \mathfrak{M} en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ que provenga de un polinomio f con estos puntos críticos y estas multiplicidades?

$$f'(z) = \prod_{i=1}^k (z - z_i)^{\nu_i}$$

↓ operador integración

$$f(z) = \int \prod_{i=1}^k (z - z_i)^{\nu_i} dz + c$$

↓ aplicar el algoritmo

mosaico \mathfrak{M} proveniente de f .

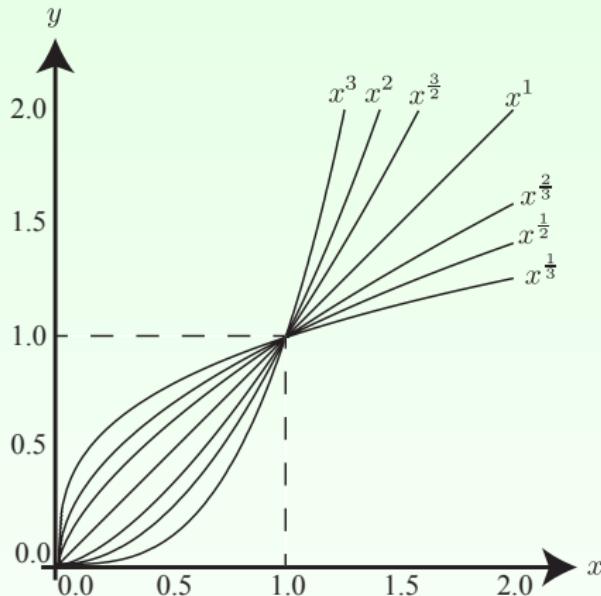


Figure : Una familia de funciones C^∞ , parametrizadas por $\nu \in \mathbb{R}^+$

1

¹Richard Courant, Fritz John; *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático Vol. I*. Limusa, México (1979).

Consideramos

$$(u(x, y), v(x, y)) : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

¿Qué significa (u, v) holomorfa?

El límite
 $f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$
 existe.

$u + iv$ cumple
 Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

f se expresa como
 una serie convergente

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

(u, v) es de clase C^1 real
 y Df es \mathbb{C} -lineal.

Para toda $\gamma \subset D(z_0 r)$ cerrada

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

$f(z_0)$ se expresa como

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\tau)}{\tau - z_0} d\tau$$

$\gamma \subset D(z_0, r)$ encierra a z_0
 con sentido positivo.

Fácil $\longleftrightarrow \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Difícil $\longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(z) : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto u(z) + \sqrt{-1}v(z) \\ = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots \end{array} \right.$

la serie es convergente.

La idea de “formas normales”.

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \{\text{objetos } \mathcal{O}\} \\ G &= \text{un grupo } g : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'.\end{aligned}$$

Existe (por teoría de conjuntos) el espacio cociente

$$\begin{aligned}\pi : \mathcal{M} &\longrightarrow \frac{\mathcal{M}}{G} \\ \mathcal{O} &\longmapsto [\mathcal{O}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &\longleftarrow \frac{\mathcal{M}}{G} : \mathcal{FN} \\ \mathcal{O}_{\mathcal{FM}} &\longleftarrow [\mathcal{O}].\end{aligned}$$

¡Eso me suena al curso de **Abel Castorena**!

Ejemplo 1.

$\mathcal{M} = \{\text{triángulos rectángulos}\}$

$G = \text{traslaciones y homotecias.}$

$$\mathcal{M}/G = \dots$$

Ejemplo 2.

$\mathcal{M} = \{\text{cónicas en } \mathbb{R}^2\}$

$G = \text{traslaciones y homotecias.}$

$$\mathcal{M}/G = \dots$$

Ejemplo 3. Ecuaciones de difusión acopladas (¡Victor Breña !).

$$U_t = D_1 U_{xx} + AU\left(1 - \frac{V}{k}\right) - BUV \}$$

$$V_t = \underbrace{DU_{xx}}_{\text{difusión}} - \underbrace{DV + CUV}_{\text{ley de acción de masas}}.$$

difusión ley de acción de masas

Ejemplo 4.

Problema en bruto.

¿Cuántas funciones lineales $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ hay?

- muchas,
- \mathbb{R}^4 ,
- un espacio vectorial de dimensión 4,

⋮

Problema (geometría–álgebra).

Consideramos los cambios de coordenadas lineales

$$GL(2, \mathbb{R}) = \{B : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid \text{invertible}\}.$$

Definición. Equivalencia de funciones lineales.

Dos aplicaciones lineales A_1, A_2 son *iguales esencialmente* si existe un cambio de coordenadas lineal $B \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que

$$A_2 = BA_1B^{-1},$$

i.e. el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A_1} & \mathbb{R}^2 \\ B^{-1} \uparrow & & \downarrow B \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A_2} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

comuta.



¿Cuántas aplicaciones lineales

$$A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

iguales esencialmente hay?

Dos respuestas ...

Respuesta 1 (topología–álgebra–geometría).

Hay 7 familias, ellas forman un plano

$$\mathbb{R}^2 = \{(traza, det)\},$$

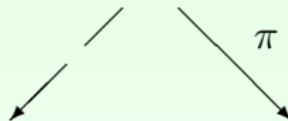
con una parábola

$$\{(traza)^2 - 4(det) = 0\}$$

donde la descripción es no Hausdorff.



$$\mathbb{R}^4 = \{(a, b, c, d)\}$$



$$\mathbb{R}^2 = \{[\lambda_1, \lambda_2]\} \longrightarrow \longrightarrow \mathbb{R}^2 = \{(\text{traza}, \det)\}$$

$$\frac{\left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}}{BAB^{-1}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} & \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} & \lambda \in \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} & \alpha + \sqrt{-1}\beta \in \mathbb{C} - \mathbb{R}. \end{cases}$$

	Rango	Traza vs. determinante	Valores propios	Vectores propios	Forma canónica BAB^{-1}
i)	2	$det > 0$ $(tr)^2 - 4det = 0$	$\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$	<i>todo</i> $v \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
ii)	2	$det \neq 0$ $(tr)^2 - 4det > 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$v, w \in \mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
iii)	1	$det > 0$ $(tr)^2 - 4det = 0$	$\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$	$v \in \mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\}$	$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
iv)	2	$det > 0$ $(tr)^2 - 4det < 0$	$\alpha + \sqrt{-1}\beta,$ $\alpha - \sqrt{-1}\beta \in \mathbb{C},$ $\beta \neq 0$	<i>ningún</i> $v \in \mathbb{R}^2 - \{0\},$ $w, \bar{w} \in \mathbb{C}^2 - \mathbb{R}^2$	$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

	Rango	Traza vs. determinante	Valores propios	Vectores propios	Forma canónica BAB^{-1}
v)	1	$\det = 0$ $tr \neq 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$ $\lambda_1 \neq 0$ $\lambda_2 = 0$	$v \in \mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
vi)	1	$\det = 0$ $tr = 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$ $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$	<i>ningún</i> $v \in \mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
vii)	0	$\det = 0$ $tr = 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$ $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$	<i>todo</i> $v \in \mathbb{R}^2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

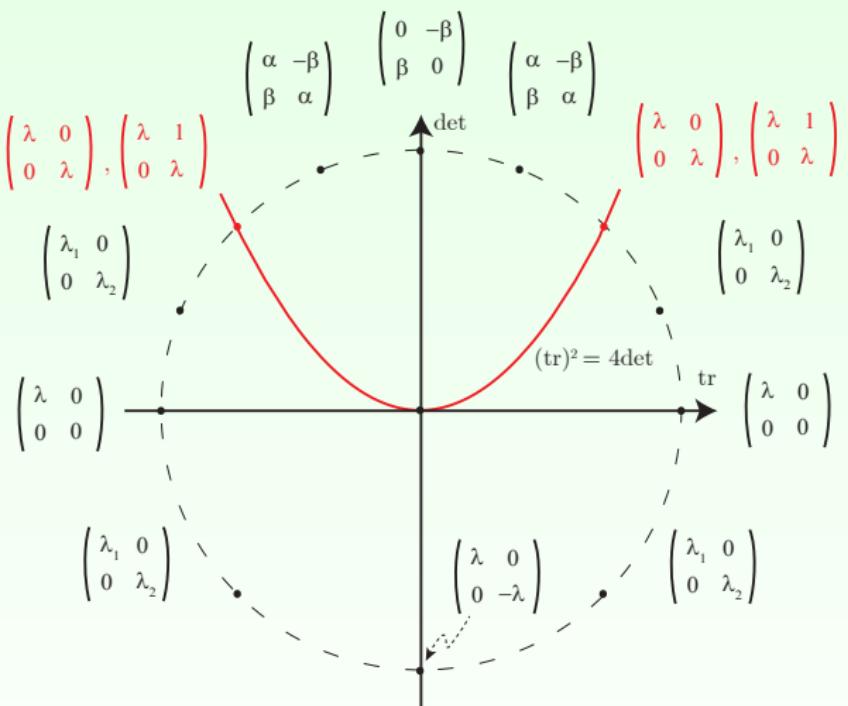


Figure : Formas normales de Jordan dependiendo de los valores de la traza y el determinante.

Respuesta 2, platicada . . .

Una función lineal $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
está esencialmente determinada por dos números;

sus valores propios $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

o

$(traza, det) \in \mathbb{R}^2,$

si bien hay unos pocos casos donde un solo número basta.

Ejemplo 5. El nuestro.

Problema en bruto.

¿Cuántas funciones holomorfas (meromorfas)

$$f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

hay?

- una infinidad,
- \mathbb{R}^∞ ,
- ¿es un espacio vectorial. . .?

⋮

Problema (análisis–geometría–álgebra).

Consideramos los *cambios de coordenadas holomorfos* (biholomorfismos locales)

$$Bihol_{loc}(\mathbb{C}) = \{ h : \Omega_1 \subset \mathbb{C} \longrightarrow \Omega_2 \subset \mathbb{C} \mid \text{holomorfa e invertible} \},$$

ellos son de la forma

$$h(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad a_1 \neq 0,$$

donde la serie es convergente.

Definición. Equivalencia de funciones holomorfas.

Dos funciones holomorfas

$$\begin{aligned}f_1 : \Omega_1 \subset \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}, \\f_2 : \Omega_2 \subset \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}\end{aligned}$$

son *iguales esencialmente* si

existen dos cambios de coordenadas holomorfos $h_1, h_2 \in \text{Bihol}_{loc}(\mathbb{C})$
tales que

$$f_2 = h_2 f_1 h_1,$$

i.e. el diagrama

$$\begin{array}{ccc}\Omega_1 \subset \mathbb{C} & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{C} \\ h_1 \uparrow & & \downarrow h_2 \\ \Omega_2 \subset \mathbb{C} & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{C}\end{array}$$

commuta.



Respuesta.

2

Teorema. Ver Reinhold Remmert pág. 284.

Una función holomorfa o meromorfa

$$\begin{aligned} f : \Omega_1 \subset \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ z &\longmapsto \frac{a_\nu}{z^{|\nu|}} + \dots + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \end{aligned}$$

es igual esencialmente a

$$\begin{aligned} z^\nu : D(0, \epsilon) \subset \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ z &\longmapsto z^\nu \end{aligned} .$$

Donde $\nu \in \mathbb{Z}$ es la potencia a la izquierda en $f(z)$.

²Reinhold Remmert; *Theory of Complex Functions*, Springer–Verlag, New York (1991), p. 285.

Análisis.

Teorema. Ver Reinhold Remmert pág. 284.

Una función holomorfa o meromorfa

$$\begin{aligned} f : \Omega_1 \subset \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ z &\longmapsto \frac{a_{|\nu|}}{z^{|\nu|}} + \dots + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \end{aligned}$$

es igual esencialmente a

$$\begin{aligned} z^\nu : D(0, \epsilon) \subset \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ z &\longmapsto z^\nu \end{aligned} .$$

Donde $\nu \in \mathbb{Z}$ es la potencia a la izquierda en $f(z)$.

Una función meromorfa (local) esta esencialmente determinada por un número.

Topología.

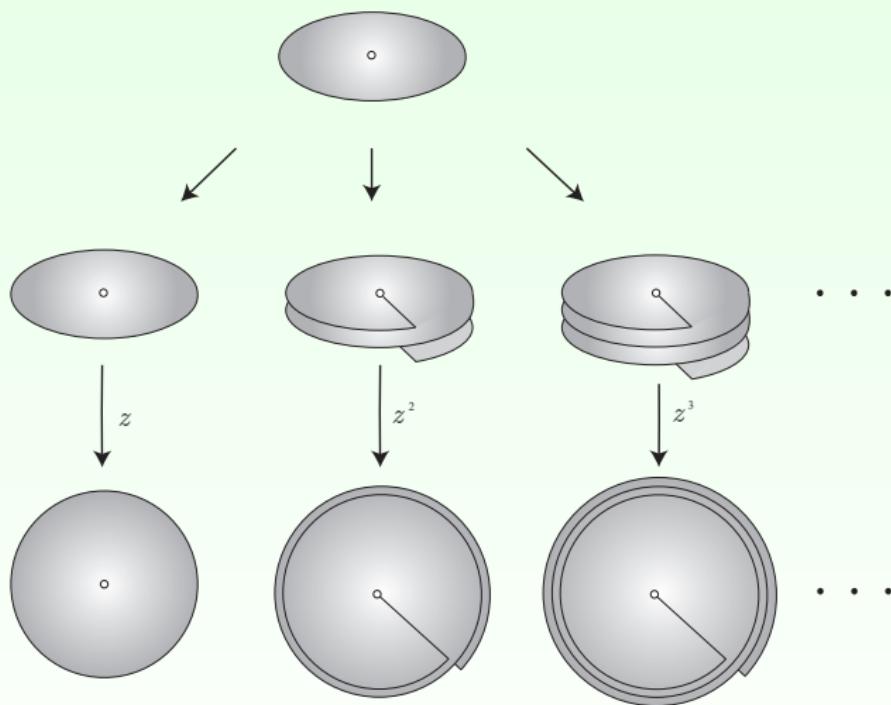
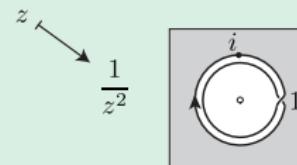
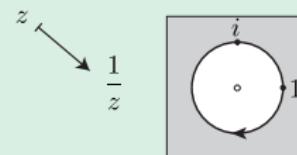
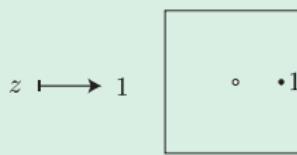
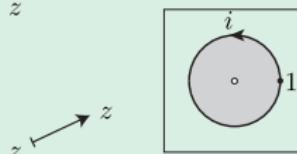
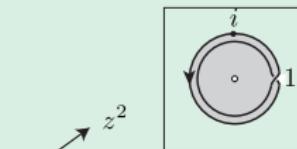
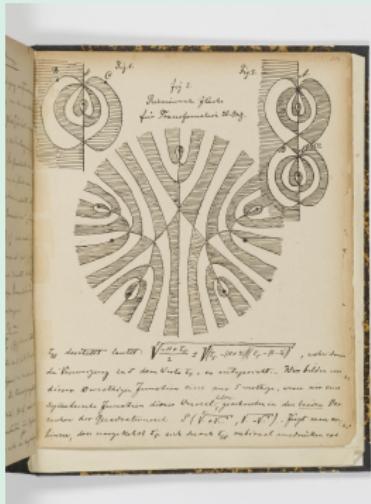


Figure : El valor absoluto de ν es el giro local de la función.



Historia del problema.

- Los protocolos de Felix Klein (1849–1925).



Eugene Chislenko, Yuri Tschinkel: *The Felix Klein Protocols*.
Notices of the AMS 54, No. 8, 960–970 (2007).