Números enteros, funciones holomorfas y mosaicos

Jesús Muciño Raymundo
muciray@matmor.unam.mx

Leidy Johanna González Cely
leidyjohannagonzalezcely@gmail.com

Nanci Pintor Lázaro
naancki@gmail.com

Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM, México

Junio 2016

Pregunta día lunes.

¿Cuál es la forma topológica de un polinomio

$$f : \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_w \, ?$$

$$\text{forma} = \begin{cases} \text{el comportamiento topológico,} \\ \text{su geometría.} \end{cases}$$

Existen números 2–dimensionales
$\mathbb{C}$.

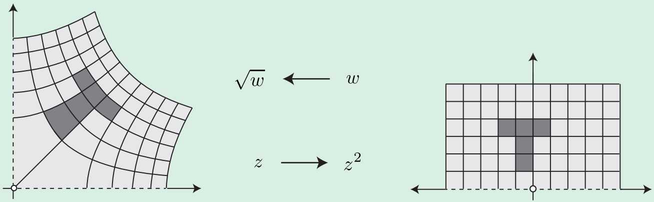
$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbb{C} = \{(a+ib)\} \arrow[dl, leftrightarrow, "T"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "T"] & \\
\mathbb{R}^2 = \{(a,b)\} \arrow[rr, leftrightarrow, "T"'] & & \mathcal{MC} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right\}
\end{tikzcd}
$$

Llamamos a T el traductor.

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & \text{es una biyección} \\
 & \text{es un isomorfismo de } \mathbb{R}\text{–espacios vectoriales} \\
T \arrow[ur] \arrow[uur] \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & \text{es una isometría de espacios métricos} \\
 & \text{es un homeomorfismo de espacios topológicos} \\
 & \text{es un isomorfismo de campos algebraicos}
\end{tikzcd}
$$

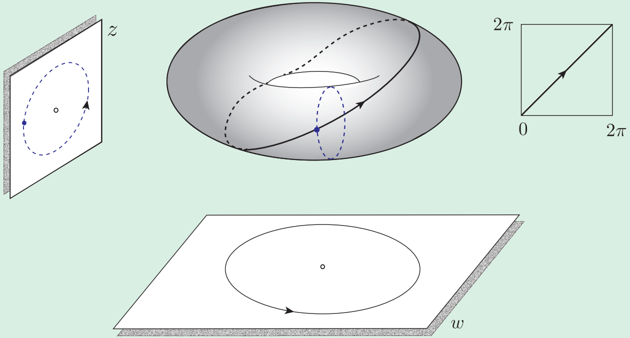
Ejemplo 1.

$$\begin{array}{ccc} z & \longrightarrow & z^2 = w \\ x + iy & \longrightarrow & (x^2 - y^2) + 2ixy \end{array}$$



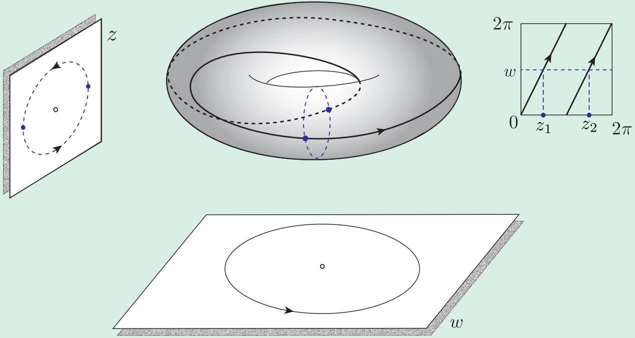
Ejemplo 2.

$$
\begin{array}{ccc}
z & \longrightarrow & z = w \\
x + iy & \longrightarrow & x + iy
\end{array}
$$



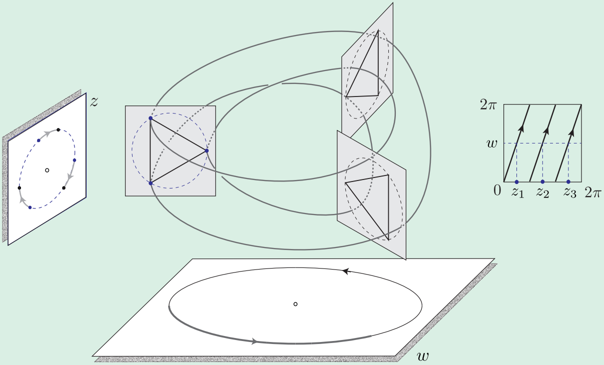
Ejemplo 3.

$$z \longrightarrow z^2 = w$$



Ejemplo 4.

$$\begin{array}{rcl} z & \longrightarrow & z^3 = w \\ x + iy & \longrightarrow & (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) \end{array}$$



Definición. Punto crítico y valor crítico de un polinomio.

Dado un polinomio

$$\begin{aligned} f : \widehat{\mathbb{C}}_z &\longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w \\ z &\longmapsto a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n, \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

- $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}_z$ es un *punto crítico* de f si $f'(z_0) = 0$,
- $w_0 \in \widehat{\mathbb{C}}_w$ es un *valor crítico* de f si $f(z_0) = w_0$.

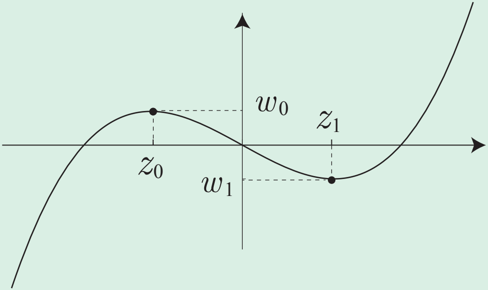


Figure : Puntos críticos z_0, z_1 y valores críticos w_0, w_1 de un polinomio cúbico.

Definición. Trayectoria de Jordan.

Una *trayectoria* $\Gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}$ *de Jordan* es:
cerrada simple y
divide la esfera en dos componentes conexas disjuntas homeomorfas al disco.

Cada componente conexa de $\widehat{\mathbb{C}}_w - \Gamma$ es llamada una región de Jordan.

Algoritmo para la construcción de un

mosaico $\mathfrak{M}$ en $\widehat{\mathbb{C}}_z$

a partir de un polinomio

$$f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$$

de grado $n \geq 2$.

Paso 0. Considerar $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ de grado $n \geq 2$.

Paso 1. Localizar el conjunto de puntos críticos de f

$$\{z_1, z_2, \ldots, z_\ell\} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}_z, \qquad \ell \leq n-1.$$

Paso 2. Calcular el conjunto de valores críticos de f

$$\mathfrak{R}_f = \Big\{ w_1 = f(z_1),\ w_2 = f(z_2), \ldots,\ w_\ell = f(z_\ell) \Big\} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}_w.$$

Paso 3. Seleccionar una trayectoria de Jordan $\Gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_w$ orientada que pase todos los valores críticos de f e infinito

$$w_1, \ldots, w_\ell, \infty$$

siguiendo el orden de las etiquetas establecidas en $\mathfrak{R}_f$.

Paso 4. Elegir colores (azul y rojo) para las dos regiones de Jordan (llamadas teselas) de $\widehat{\mathbb{C}}_w - \Gamma$.

Paso 5. Asignar color a cada punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}_z - f^{-1}(\Gamma)$ mediante las siguientes reglas

- $z \in \widehat{\mathbb{C}}_z$ es azul si $f(z) \in \widehat{\mathbb{C}}_w$ es azul,
- $z \in \widehat{\mathbb{C}}_z$ es rojo si $f(z) \in \widehat{\mathbb{C}}_w$ es rojo.

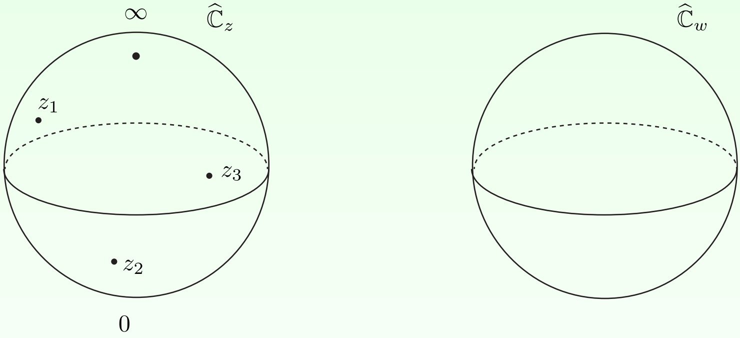


Figure : Puntos críticos.

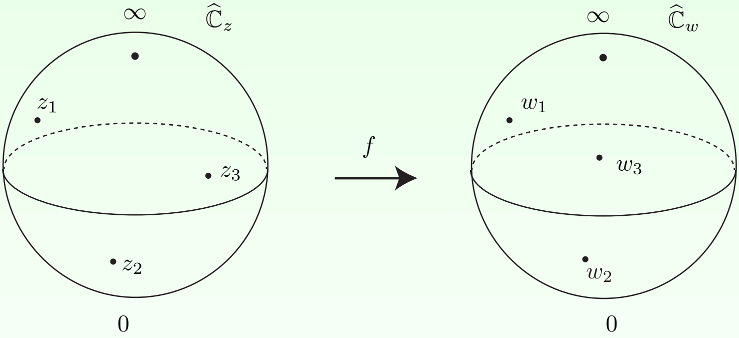


Figure : Valores críticos.

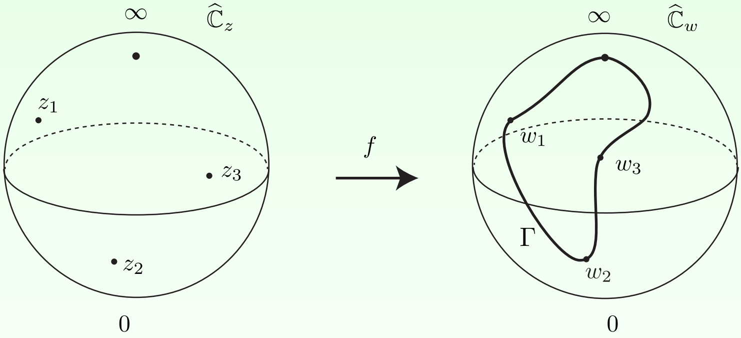


Figure : Elección de una trayectoria de Jordan Γ.

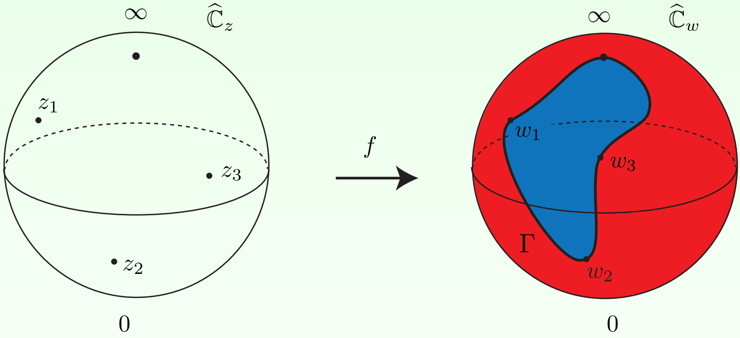


Figure : Elegir colores en el contradominio.

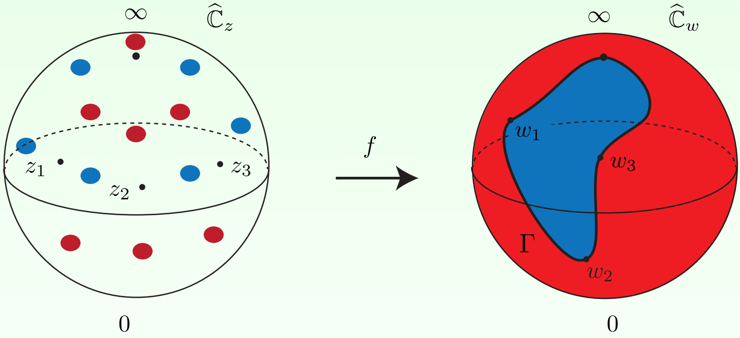


Figure : Elegir colores en el contradominio.

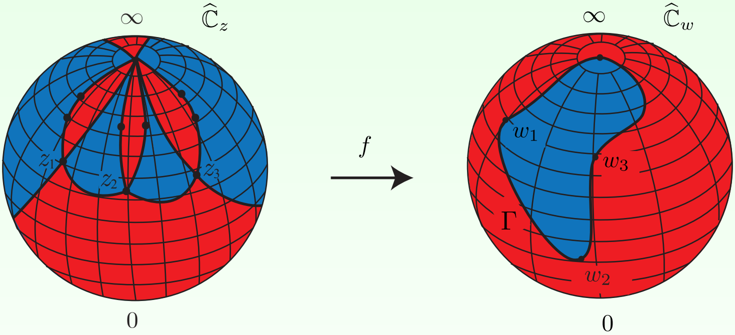


Figure : Asignación de colores en el dominio $\widehat{\mathbb{C}}_z$.

Definición. Mosaico y teselas.

Un *mosaico* $\mathfrak{M}$ en la esfera $\widehat{\mathbb{C}}_z$ es una familia finita de regiones de Jordan

$$\{\tau_j\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$$

que llamaremos *teselas*, tales que

a) toda tesela $\tau_j \in \mathfrak{M}$ es homeomorfa a un disco abierto,

b) $\widehat{\mathbb{C}}_z$ es unión de la cerradura $\overline{\tau_j}$ de todas las teselas,

c) para dos teselas $\tau_j, \tau_k \in \mathfrak{M}$ con $j \neq k$, sus cerraduras cumplen que

$$\overline{\tau_j} \cap \overline{\tau_k} = \begin{cases} \text{un punto} \\ \text{un arco simple} \\ \text{un conjunto de puntos y arcos simples} \\ \text{vacío.} \end{cases}$$

Ejemplo.

Consideremos el polinomio

$$\begin{aligned} f : \widehat{\mathbb{C}}_z &\longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w \\ z &\longmapsto z^2. \end{aligned}$$

El único punto crítico finito de f es $z = 0$, su valor crítico es $f(0) = 0$.

Elegiremos la trayectoria de Jordan $\Gamma \subseteq \widehat{\mathbb{C}}_w$ como el meridiano correspondiente al eje real.
Al calcular $f^{-1}(\Gamma)$ el mosaico determinado por f es:

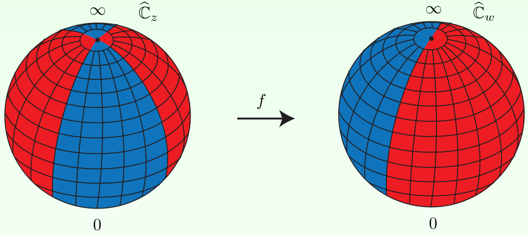


Figure : Mosaico determinado por el polinomio $f(z) = z^2$ de grado 2.

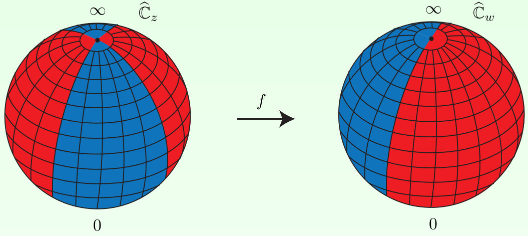


Figure : Mosaico determinado por el polinomio $f(z) = z^2$ de grado 2.

Teorema (Arthur Cayley 1821–1895).

[a] Para todo polinomio f de grado 2, el mosaico determinado por f es como el de la figura,
salvo homeomorfismos que preserven orientación.

[a] Arthur Cayley; *The Newton-Fourier Imaginary Problem.* Amer. J. Math. 2 (1879), no. 1, 97.

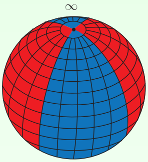
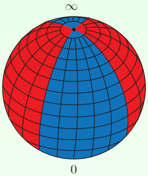
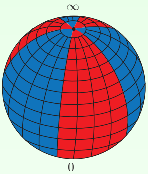


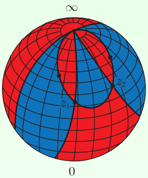
Figure : Zoológico de mosaicos.



Un polinomio de grado 2



Un polinomio de grado 3



Un polinomio de grado 3

Figure : Zoológico de mosaicos.

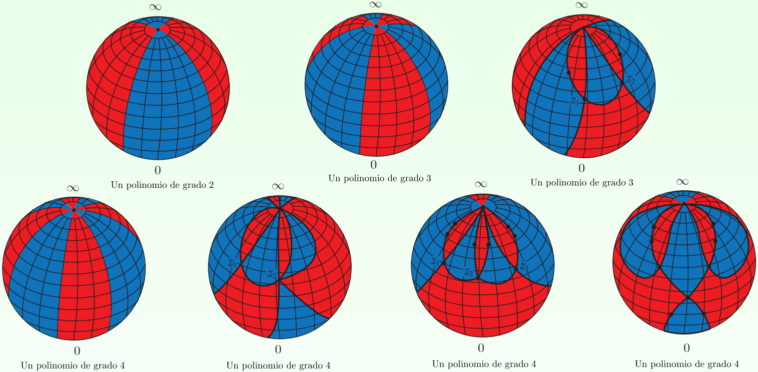


Figure : Zoológico de mosaicos.

Más preguntas.

- ¿De qué elementos depende la construcción de los mosaicos?
-
-
-
-

Más preguntas.

- ¿De qué elementos depende la construcción de los mosaicos?
- ¿Cuántos mosaicos existen a grado fijo?
-
-
-

Más preguntas.

- ¿De qué elementos depende la construcción de los mosaicos?
- ¿Cuántos mosaicos existen a grado fijo?
- ¿Podemos definir alguna relación de equivalencia en el espacio de mosaicos ?
-
-

Más preguntas.

- ¿De qué elementos depende la construcción de los mosaicos?
- ¿Cuántos mosaicos existen a grado fijo?
- ¿Podemos definir alguna relación de equivalencia en el espacio de mosaicos ?
- ¿Hay un número finito o infinito de clases?
-

Más preguntas.

- ¿De qué elementos depende la construcción de los mosaicos?
- ¿Cuántos mosaicos existen a grado fijo?
- ¿Podemos definir alguna relación de equivalencia en el espacio de mosaicos ?
- ¿Hay un número finito o infinito de clases?
- ¿Cuál es la estructura del espacio de mosaicos?

$$
\begin{gathered}
\text{Un polinomio en } \widehat{\mathbb{C}}_z \text{ de grado } n \\
\Downarrow \\
\{ \text{ Todos los polinomios en } \widehat{\mathbb{C}}_z \text{ de grado } n \text{ } \} \\
\Downarrow \\
\frac{\{\text{Todos los polinomios en } \widehat{\mathbb{C}}_z \text{ de grado } n\}}{\sim}
\end{gathered}
$$

$$\text{Un mosaico en } \widehat{\mathbb{C}}_z \text{ para } n \text{ fijo}$$
$$\Downarrow$$
$$\{\text{Todos los mosaicos } \mathfrak{M} \text{ en } \widehat{\mathbb{C}}_z \text{ para un } n \text{ fijo}\}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\{\text{Todos los mosaicos } \mathfrak{M} \text{ en } \widehat{\mathbb{C}}_z \text{ para un } n \text{ fijo }\}}{\sim}$$

- ¿Son “iguales” el espacio cociente de polinomios y el espacio cociente de mosaicos?

Pregunta día lunes.

¿Cuál es la forma topológica de un polinomio

$$f : \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_w \ ?$$

Pregunta día martes.

¿Qué características debe tener un mosaico $\mathfrak{M}$ en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}_z$ para ser determinado por un polinomio

$$f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w?$$

Recordando el algoritmo para construir mosaicos.

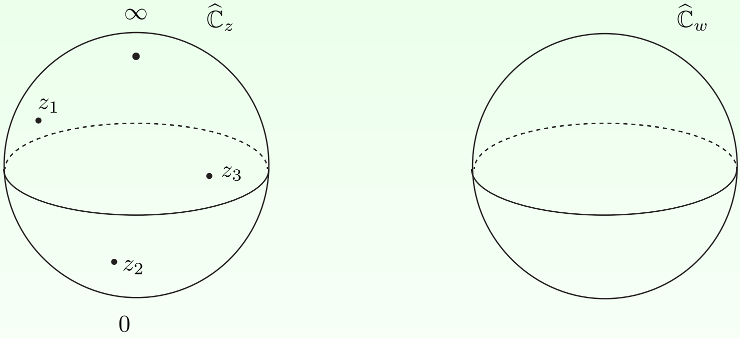


Figure : Puntos críticos.

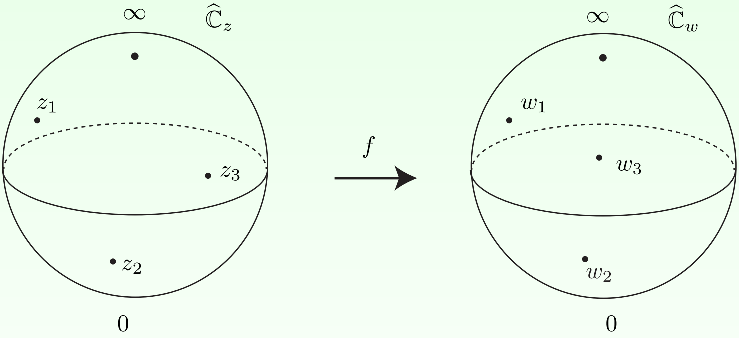


Figure : Valores críticos.

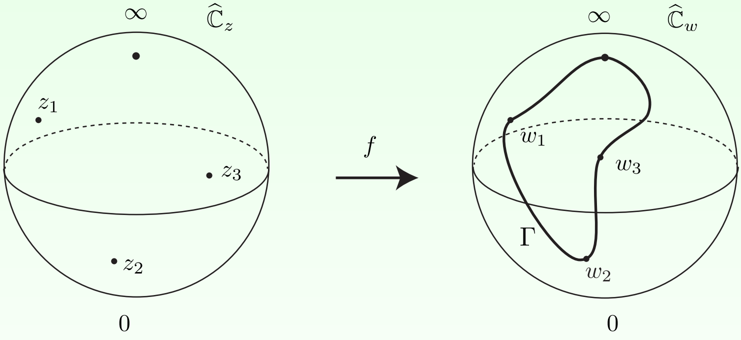


Figure : Elección de una trayectoria de Jordan Γ.

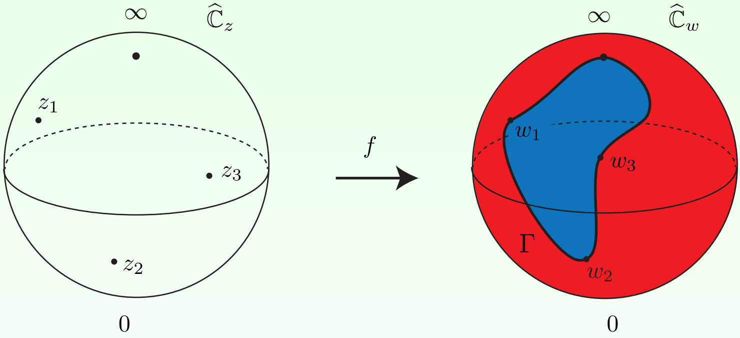


Figure : Elegir colores en el contradominio.

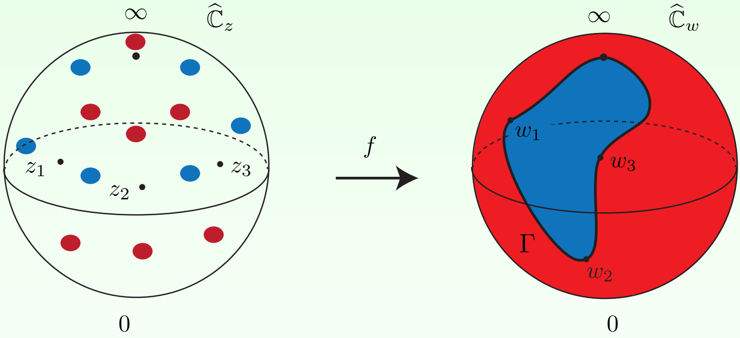


Figure : Elegir colores en el contradominio.

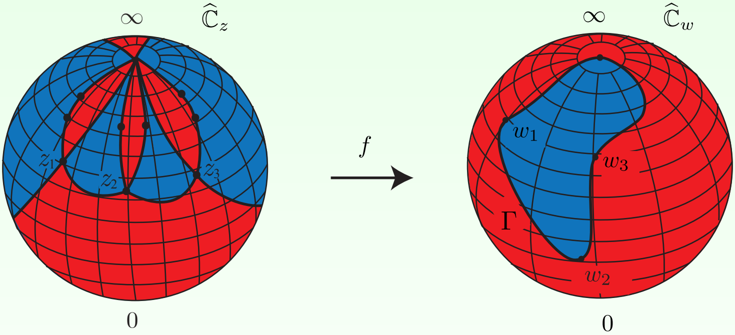


Figure : Asignación de colores en el dominio $\widehat{\mathbb{C}}_z$.

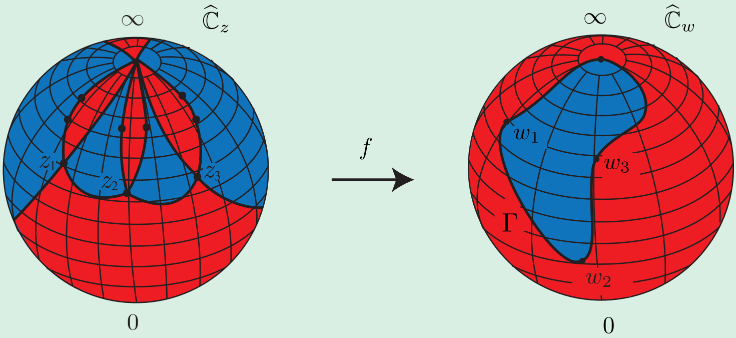
Definición. Gráfica.

Una *gráfica* $\mathcal{G}$ es un par ordenado $\mathcal{G} = (V, E)$, donde:

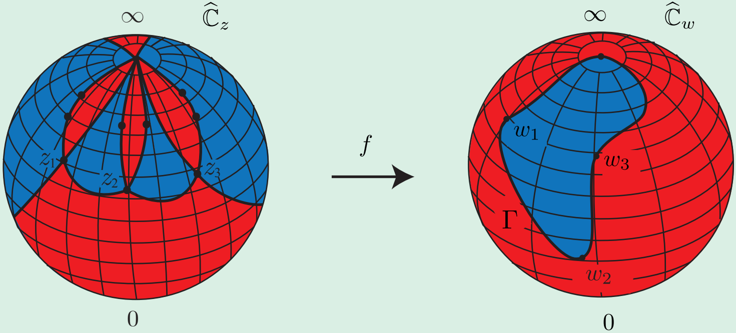
- V es el conjunto de vértices y
- E es el conjunto de aristas entre parejas de vértices.

La *valencia* de un vértice es el número de aristas incidentes en el vértice.

Observaciones.

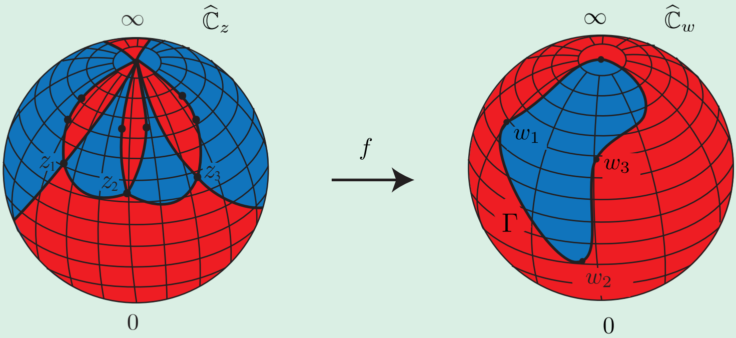


Observaciones.



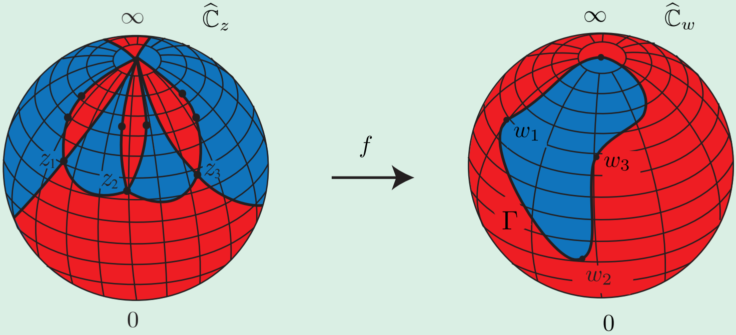
• La trayectoria de Jordan Γ es una gráfica orientada en $\widehat{\mathbb{C}}_w$ con el conjunto de vértices $V_\Gamma = \mathfrak{R}_f$,
donde cada vértice $w_i \in V_\Gamma$ tiene valencia 2 y
el conjunto de aristas E es igual a los arcos de Γ que unen w_i con w_{i+1}.

Observaciones.



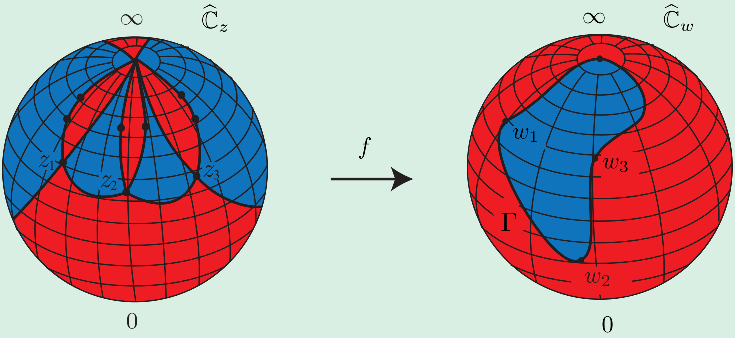
• $f^{-1}(\Gamma) \subset \widehat{\mathbb{C}}_z$ es una gráfica orientada en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ con el conjunto de vértices $V_{f^{-1}(\Gamma)} = f^{-1}(\mathfrak{R}_f)$ y el conjunto de aristas $E_{f^{-1}(\Gamma)} = f^{-1}(E)$.

Observaciones.



- Los vértices en $V_{f^{-1}(\Gamma)}$ siempre tienen valencia par.

Observaciones.



• Los vértices en $V_{f^{-1}(\Gamma)}$ con valencia mayor o igual a 4 corresponden a puntos críticos de f.

Existen otros vértices en $V_{f^{-1}(\Gamma)}$ que tienen valencia 2.

Todas las teselas en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ tienen un vértice (∞) en común.

Definición (multiplicidad de un punto crítico).

Dado un polinomio

$$\begin{aligned} f : \widehat{\mathbb{C}}_z &\longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w \\ z &\longmapsto a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n, \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

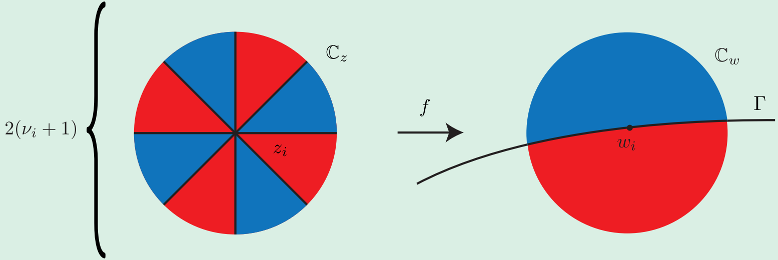
la *multiplicidad* ν_i *de un punto crítico* $z_i \in \widehat{\mathbb{C}}_z$ de f es:

analíticamente $\longrightarrow$ el número de derivadas consecutivas de f que se anulan en z_i.
$f'(z_i) = f''(z_i) = \cdots = f^{\nu_i}(z_i) = 0,$
$f^{\nu_{i+1}}(z_i) \neq 0$

geométricamente $\longrightarrow$ el número de giros menos uno de f en z_i (local).

Donde el número de giros es el número de veces que el cículo unitario cubre al círculo unitario bajo f.

Observaciones



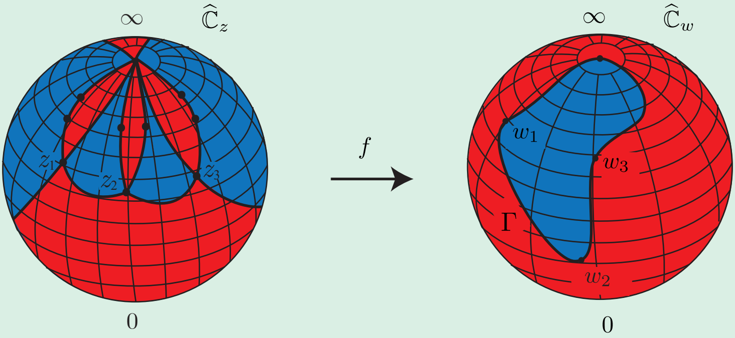
• La imagen inversa $f^{-1}(\Gamma)$ presenta el siguiente fenómeno local:

si se considera un trozo de Γ que pasa por un valor crítico w_i, entonces la valencia del punto crítico z_i es $2(\nu_i + 1)$, donde ν_i es la multiplicidad del punto crítico z_i.

Definición (multiplicidad de un punto crítico z_i).

	analítica	geométrica	lenguaje mosaicos
multiplicidad del punto z_i	número de derivadas consecutivas que se anulan en z_i	número de giros de f en z_i	valencia del vértice z_i
(z_i, ν_i)	ν_i	$\nu_i + 1$	$2(\nu_i + 1)$

Observaciones



- $\widehat{\mathbb{C}}_z - f^{-1}(\Gamma)$ determina $2n$ teselas en $\widehat{\mathbb{C}}_z$, donde hay n de cada color.

¿Cuál es la interpretación analítica de n?

Resultado del algoritmo.

un polinomio

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

$$\Downarrow$$

un mosaico

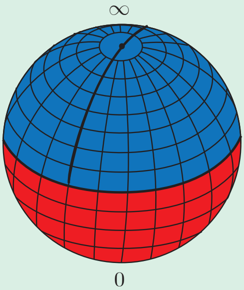
$$\mathfrak{M}$$

Pregunta.

¿Todos los mosaicos en la esfera $\widehat{\mathbb{C}}_z$ provienen de un polinomio?

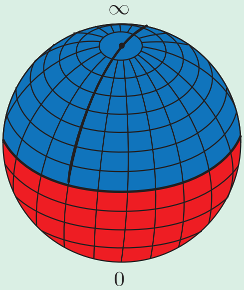
Pregunta.

¿Todos los mosaicos en la esfera $\widehat{\mathbb{C}}_z$ provienen de un polinomio?



Pregunta.

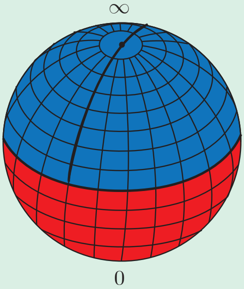
¿Todos los mosaicos en la esfera $\widehat{\mathbb{C}}_z$ provienen de un polinomio?



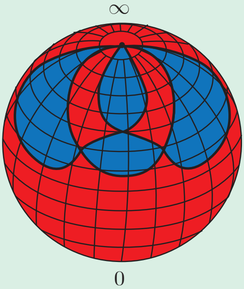
Alternancia en colores

Pregunta.

¿Todos los mosaicos en la esfera $\widehat{\mathbb{C}}_z$ provienen de un polinomio?

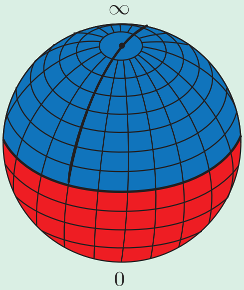


Alternancia en colores

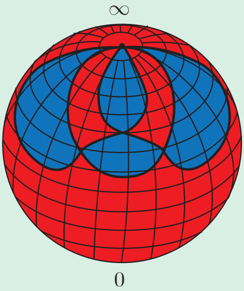


Pregunta.

¿Todos los mosaicos en la esfera $\widehat{\mathbb{C}}_z$ provienen de un polinomio?



Alternancia en colores



n teselas rojas
n teselas azules
Todas las teselas tienen un vértice en común

Condiciones necesarias que deben cumplir nuestros mosaicos.

1. El número de teselas es par.
2. Alternancia en los colores de las teselas.
3. Todas las teselas se intersectan en un mismo vértice (∞).

Pregunta.

¿Depende el mosaico $\mathfrak{M}$ de la cantidad de puntos críticos de f y sus respectivas multiplicidades?

Observación.

El número de mosaicos distintos topológicamente para el espacio de polinomios de grado n está acotado inferiormente con las particiones del número $n-1$.

Recordemos: Una partición de un número entero positivo n es una secuencia de números enteros positivos $n_1, n_2, \ldots, n_\ell$ tal que

$$n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_\ell \quad \text{y} \quad n_1 + n_2 + \ldots + n_\ell = n.$$

Definición.

El *discriminante de un polinomio* $f(z) = a_0 + \ldots + a_n z^n$ es

$$D(f) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{1}{a_n} R(f, f')$$

donde $R(f, f')$ se conoce como la resultante de f y f'.

El polinomio f tiene raices múltiples si y sólo si el discriminante es cero.

Matriz resultante $R(f, f')$.

$$\begin{pmatrix}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\
na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \cdots & 1a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \cdots & 1a_1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \cdots & 1a_1
\end{pmatrix}$$

Discriminante para polinomios de grado $n = 2, 3$.

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$$
$$\Downarrow$$
$$D(f) = a_1^2 - 4a_2 a_0.$$
$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$$
$$\Downarrow$$
$$D(f) = a_2^2 a_1^2 - 4a_3 a_1^3 - 4a_2^3 a_0 - 27a_3^2 a_0^2 + 18a_3 a_2 a_1 a_0.$$

¿Por que me interesa el discriminante[a]?

---

[a] Gabriel Katz; *How to solve algebraic equations, or a remarkable geometry of discriminant varieties*. Expo. Math. 21 (2003), 219–261.

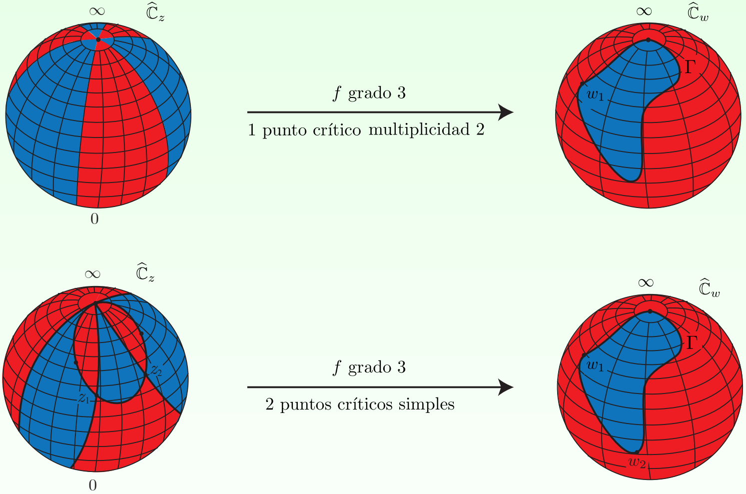


Figure : Dos mosaicos de grado 3 que no son equivalentes topológicamente.

Definición. Equivalencia topológica entre mosaicos.

Dos mosaicos $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ determinados por f, g respectivamente son *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo que preserva orientación

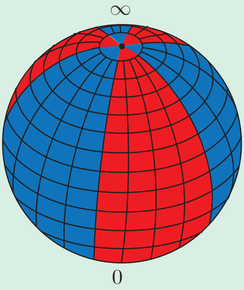
$$\psi : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_z$$

tal que el diagrama conmuta

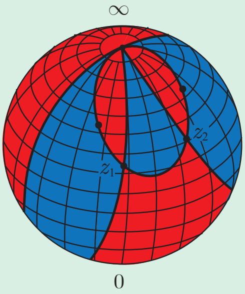
$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{C}}_z \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "f"'] & & \widehat{\mathbb{C}}_z \arrow[dl, "g"] \\
& \widehat{\mathbb{C}}_w &
\end{tikzcd}$$

Lema, a la Cayley.

Hay 2 mosaicos topológicamente distintos para polinomios de grado 3.



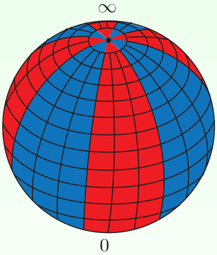
2



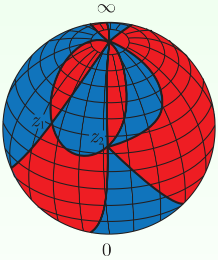
1,1

Pregunta, a la Cayley.

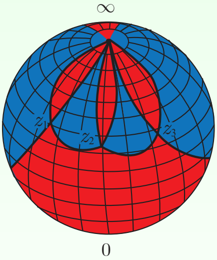
¿Hay exactamente 3 mosaicos topológicamente distintos para polinomios de grado 4?



3

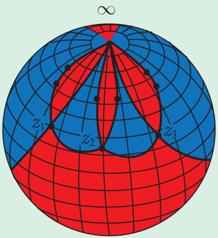


2,1



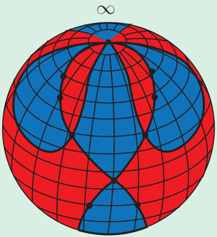
1,1,1

La respuesta es NO.



0

1,1,1



0

1,1,1

Resumen hasta el momento.

• Dado un polinomio f de grado $n \geq 2$, éste determina un mosaico en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ que depende de la elección de la trayectoria de Jordan Γ.

Resumen hasta el momento.

• Dado un polinomio f de grado $n \geq 2$, éste determina un mosaico en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ que depende de la elección de la trayectoria de Jordan Γ.

• El número de mosaicos distintos topológicamente para un polinomio de grado $n \geq 2$ está acotado inferiormente con las particiones del número $n-1$.

Resumen hasta el momento.

• Dado un polinomio f de grado $n \geq 2$, éste determina un mosaico en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ que depende de la elección de la trayectoria de Jordan Γ.

• El número de mosaicos distintos topológicamente para un polinomio de grado $n \geq 2$ está acotado inferiormente con las particiones del número $n-1$.

• Si el número de valores críticos del polinomio f es mayor o igual a tres, hay más de un mosaico correspondiente a una misma partición.

Problemas para no dormir.

• ¿Cómo depende un mosaico $\mathfrak{M}$ en $\widehat{\mathbb{C}}_z$, proveniente de un polinomio f, de la elección de la trayectoria de Jordan Γ?

• ¿Cómo demostrar que si el número de valores críticos del polinomio f es mayor o igual a tres, hay más de un mosaico correspondiente a una misma partición?

• ¿Dada una colección de puntos críticos y sus respectivas multiplicidades

$$(z_1, \nu_1), (z_2, \nu_2), \ldots, (z_k, \nu_k),$$

existe un mosaico $\mathfrak{M}$ en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ que provenga de un polinomio f con estos puntos críticos y estas multiplicidades?

Pregunta día martes.

¿Qué características debe tener un mosaico $\mathfrak{M}$ en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ para ser determinado por un polinomio

$$f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w?$$