Mosaicos y polinomios complejos

Jesús Muciño Raymundo
muciray@matmor.unam.mx
Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM Campus Morelia

Roberto Gutiérrez Soto
rgutierrez.s@outlook.com
Facultad de Ciencias, UAEMéx
Campus El Cerrillo, Toluca Edo. de México

•

Escuela de Verano en Matemáticas 2025
del 28 de Julio al 1 de Agosto

¿Los números complejos $\mathbb{C}$ son bonitos o feos?

¿ $\ldots$ **son amigables o repelentes?**

$$\begin{tikzcd}
\text{Álgebra} \arrow[dr] & & \text{Geometría} \arrow[dl] \\
& \mathbb{C} & \\
& \text{Análisis} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

En $\mathbb{C}$ las tres grandes ramas de las matemáticas confluyen.

¿Cómo hacemos matemáticas?

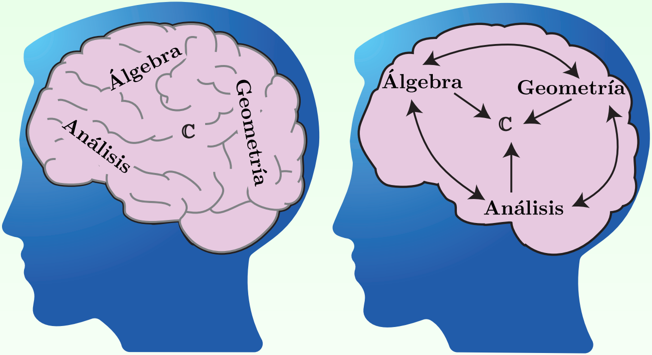


Figure: Objetos matemáticos aparentemente distintos, al madurar en nuestro intelecto confluyen. ¿Ejemplos?

$a^2 + b^2 = c^2, \ldots$

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1, \ldots$$

$$sen^2 z + cos^2 z = 1, \ldots$$

¿Como hacemos matemáticas?

1. Buscamos una pregunta u objeto.
2. Hacemos experimentos, para entender como funciona el objeto.
3. El **“Teorema”** es una frase
   corta,
   críptica,
   casi un poema,
   que describe el funcionamiento del objeto.

Nuestro escenario de trabajo es el plano complejo
$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$,

nuestro objeto de estudio son las funciones complejas

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}_z & \longrightarrow & \mathbb{C}_w \\ z & \longmapsto & f(z) = \mathfrak{Re}\left(f(z)\right) + i\mathfrak{Im}\left(f(z)\right). \end{array}$$

Los casos más simples son:

- monomios $\quad P(z) = z^n$,

- polinomios mónicos $\quad P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$,

- funciones racionales $\quad \dfrac{P(z)}{Q(z)} = \dfrac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_{m-1} z^{m-1} + z^m}$

de tal manera que $P(z)$ no tiene factores comunes con $Q(z)$.

Pregunta de William P. Thurston en 2010:

¿Cuál es la forma de una

función racional compleja?

Figure: William P. Thurston (1946 – 2012) fue un matemático estadounidense. En 1982 la Unión Matemática Internacional le concedió la Medalla Fields; el Premio Nobel es el equivalente a la Medalla Fields. La pregunta es sorprendente, pues en 2010 cuando la enunció, Thurston había hallado ya resultados muy profundos para funciones racionales complejas.

¿Cuál es la forma de un polinomio real?

El método de las bandas. Trazando la gráfica de un polinomio arbitrario conocidas sus raíces.

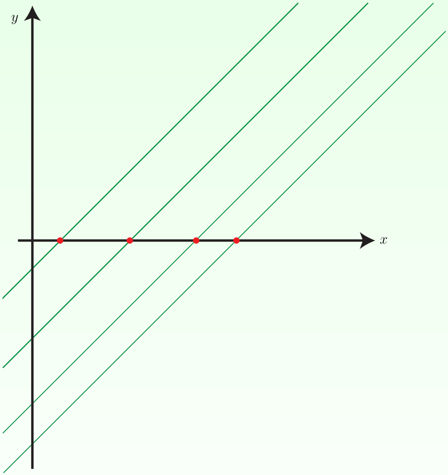


Figure: Un polinomio cúartico se escribe como el producto de sus factores lineales $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$.

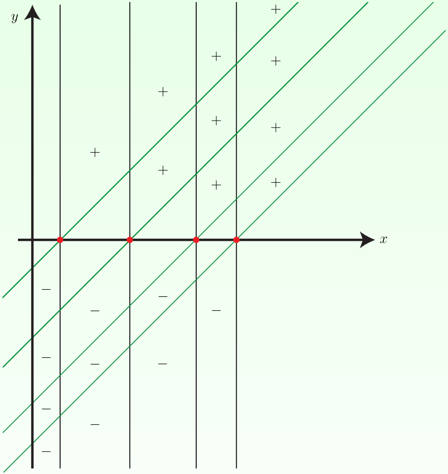


Figure: Señalamos bandas verticales entre dos raíces consecutivas y multiplicamos los signos.

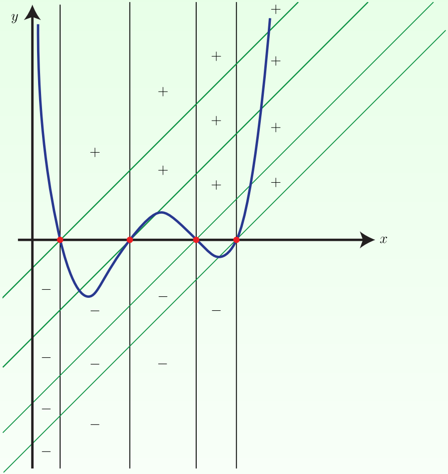


Figure: El "Teorema" es; por continuidad el producto de los signos en cada banda vertical indica el comportamiento de la gráfica del polinomio.

Preguntas sobre el "método de las bandas".

- ¿Qué pasa si dos raíces colapsan?, Fig. a.
- ¿Qué pasa si hay menos raíces de las esperadas?, Fig. b.

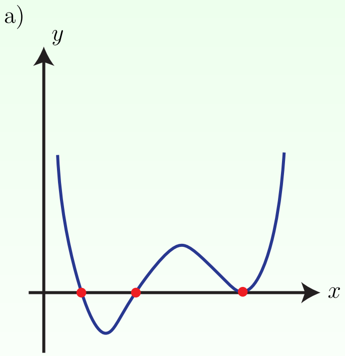


Figure: Bosquejamos $P(x)$ y $P(x) + a_0$.

Una sorpresa:

Hay al menos tres maneras equivalentes de escribir los polinomios complejos mónicos de grado n, ellas son:

$$\begin{tikzcd}
\text{Coeficientes} \arrow[rr, shift left] \arrow[dr, shift left] & & \text{Raíces} \arrow[ll, shift left] \arrow[dl, shift left] \\
& \text{Puntos críticos} \arrow[ul, shift left] \arrow[ur, shift left] &
\end{tikzcd} .$$

Coeficientes y raíces nos llevan al álgebra.
Los puntos críticos (aquellos donde se anula la derivada) nos llevan al cálculo diferencial e integral, al análisis.

El objeto es la aplicación de Viète $\mathcal{V}_2 : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ para polinomios mónicos cuadráticos.

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{raíces} & \longmapsto & \text{raíces sin orden} & \longmapsto & \text{coeficientes} \\
\mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \frac{\mathbb{C}^2}{Sim(2)} & \xrightarrow{\mathcal{V}_2} & \mathbb{C}^2 \\
 & & & \xleftarrow{\mathcal{V}_2^{-1}} & \\
(r_1, r_2) & \longmapsto & [r_1 : r_2] & \longmapsto & = \Big(r_1 r_2,\ (-r_1 - r_2) \Big) \\
 & & & & = \underbrace{r_1 r_2}_{a_0} + \underbrace{(-r_1 - r_2)}_{a_1} z + \underbrace{1}_{a_2} z^2
\end{array}
$$

$Sim(n)$ es el grupo simétrico cuyos elementos son los intercambios posibles en n posiciones.
$\mathcal{V}_2^{-1}$ es la aplicación de sacar las raíces.

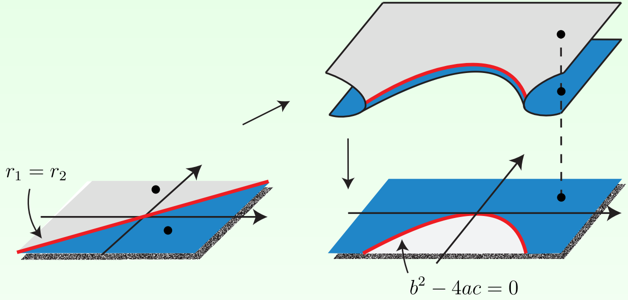


Figure: ¿Cómo funciona el objeto? Bosquejo de la aplicación de Viète $\mathcal{V}_2$ para polinomios reales mónicos cuadráticos.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_2 : \mathbb{R}^2_{\textit{raíces con orden}} &\longrightarrow \mathbb{R}^2_{\textit{coeficientes}} \\ (r_1, r_2) &\longmapsto (r_1 r_2, -r_1 - r_2) \doteq (c, b), \end{aligned}$$

usando nuestros conocimientos elementales

$$(z - r_1)(z - r_2) = \underbrace{r_1 r_2}_{c} + \underbrace{(-r_1 - r_2)}_{b} z + \underbrace{1}_{a} z^2.$$

La aplicación de Viète $\mathcal{V}_3 : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ para polinomios mónicos cúbicos:

$$\begin{array}{ccccc} \text{raíces} & \longmapsto & \text{raíces sin orden} & \longmapsto \\ (r_1, r_2, r_3) & \longmapsto & [r_1 : r_3] & \longmapsto \end{array}$$

coeficientes

$$\Big(-r_1 r_2 r_3, (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3), -(r_1 + r_2 + r_3)\Big) =$$

$$\underbrace{-r_1 r_2 r_3}_{a_0} + \underbrace{(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)}_{a_1} z + \underbrace{-(r_1 + r_2 + r_3)}_{a_2} z^2 + \underbrace{1}_{a_3} z^3$$

El "Teorema" es: aplicación de Viète $\mathcal{V}_n$ para polinomios mónicos de grado n, véase [3].

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{raíces} & \longmapsto & \text{raíces sin orden} & \longmapsto & \text{coeficientes} \\
\mathbb{C}^n & \longrightarrow & \frac{\mathbb{C}^n}{Sim(n)} & \xrightarrow{\mathcal{V}_n} & \mathbb{C}^n \\
 & & & \xleftarrow{\mathcal{V}_n^{-1}} & \\
(r_1, \ldots, r_n) & \longmapsto & r_1 : \cdots : r_n] & \longmapsto & (a_0, \ldots, a_{n-1})
\end{array}
$$

$$
= \Big((-1)^n (r_1 \cdots r_n), \; \vdots \; -(r_1 + \ldots + r_n) \Big)
$$

$$
= \underbrace{(-1)^n (r_1 \cdots r_n)}_{a_0} + \ldots + (-1)^{n-1} \underbrace{(r_1 + \ldots + r_n)}_{a_{n-1}} z^{n-1} + z^n
$$

De puntos críticos a coeficientes de polinomios mónicos la función es:

$$\begin{array}{ccccc}
\text{puntos críticos} & & \text{puntos críticos} & & \text{coeficientes} \\
\text{con orden} & & \text{sin orden} & & \\
\mathbb{C}^{n-1} & \rightarrow & \frac{\mathbb{C}^{n-1}}{Sim(n)} & \rightarrow & \mathbb{C}^{n}_{coef} \\
(z_1, \ldots, z_{n-1}) & \mapsto & [z_1, \ldots, z_{n-1}] & \mapsto & n \int_0^z (z - z_1) \cdots (z - z_{n-1}) dz \\
& & & & = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \underbrace{a_n}_{=1}) \, .
\end{array}$$

Nota que solo usamos $n - 1$ puntos críticos.

Para grado $n \geq 2$ hemos completado el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\text{Coeficientes} \arrow[rr, shift left] \arrow[dr, shift left] & & \text{Raíces} \arrow[ll, shift left] \arrow[dl, shift left] \\
& \text{Puntos críticos} \arrow[ul, shift left] \arrow[ur, shift left] &
\end{tikzcd} .$$

Un polinomio esta determinado por sus
coeficientes.
Un polinomio posee dos tipos de puntos **importantes**
sus raíces y sus puntos críticos,
mismos que “esencialmente lo determinan”.

Consideremos $P : \mathbb{C}_z \longmapsto \mathbb{C}_w$, denotamos $P'(z) = \frac{dP}{dz}(z)$ a la derivada (como es usual).

Lema.

Para $P(z)$ un polinomio (real o complejo),
$P'(z_0) \neq 0$ si y solo si $P(z)$ es una biyección local en una vecindad de z_0.

Lema.

Para $P(z)$ un polinomio complejo, si $P'(z_1) = 0$,
entonces $P(z)$ es a 1 en una vecindad perforada de z_1, donde $k \geq 2$.

Un **punto crítico** de $P(z)$ es un punto z_1 tal que $P'(z_1) = 0$.

El **valor crítico** de un punto crítico z_1 es $w_1 = P(z_1)$.

Ejemplo. Puntos críticos, valores críticos y puntos cocríticos.

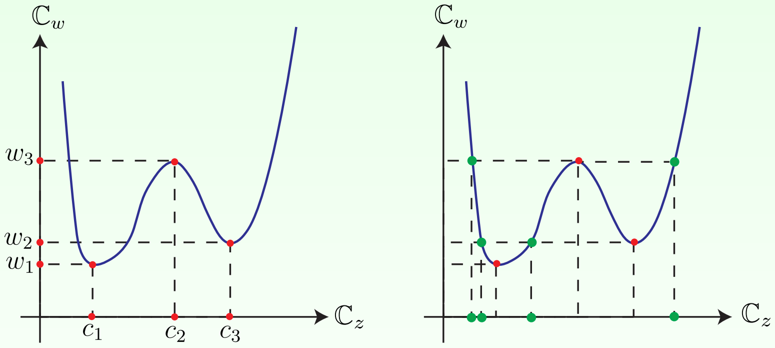


Figure: Un polinomio cúartico $P(z) : \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_w$ con 3 puntos críticos $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}_z$, 3 valores críticos $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_w$ (todos en rojo) y 4 puntos cocríticos en $\mathbb{C}_z$ (en verde).

... ¡Pensé que entendía de polinomios!

Nuestro objeto son los polinomios complejos.

Nuestro objeto es bonito, amigable, inocente.

El **Binomio de Newton o Tríangulo de Pascal** sobre los complejos es como sigue:

$$(x+iy)^n$$

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
n=0: & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1: & & & & & x & & iy & & & & \\
n=2: & & & & x^2 & & 2ixy & & -y^2 & & & \\
n=3: & & & x^3 & & 3ix^2y & & -3xy^2 & & -iy^3 & & \\
n=4: & & x^4 & & 4ix^3y & & -6x^2y^2 & & -4ixy^3 & & +y^4 & \\
n=5: & x^5 & & 5ix^4y & & -10x^3y^2 & & -10ix^2y^3 & & +5xy^4 & & iy^5 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

El **Binomio de Newton o Tríangulo de Pascal** sobre los complejos es como sigue:

$$(x+iy)^n$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & x & & iy & & & & \\
 & & & x^2 & & 2ixy & & -y^2 & & & \\
 & & x^3 & & 3ix^2y & & -3xy^2 & & -iy^3 & & \\
 & x^4 & & 4ix^3y & & -6x^2y^2 & & -4ixy^3 & & +y^4 & \\
x^5 & & 5ix^4y & & -10x^3y^2 & & -10ix^2y^3 & & +5xy^4 & & iy^5 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Algoritmo de Schwarz–Klein para construir un mosaico.

Consideramos un polinomio $P(z) : \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_w$, de grado $n \geq 2$.

Paso 1. Calculamos los puntos críticos

$$\{z_1, \ldots, z_{n-1}\} \subset \mathbb{C}_z$$

de $P(z)$ y sus valores críticos

$$\{w_1, \ldots, w_{n-1}\} \subset \mathbb{C}_w.$$

Paso 2. Seleccionamos una curva

$$\gamma \subset \mathbb{C}_w$$

tal que
i) inicia y termina en el infinito,
ii) visita exactamente una vez cada valor crítico w_j,
iii) γ divide a $\mathbb{C}_w$ formando dos losetas, una azul T y otra gris T',

$$\mathbb{C}_w \backslash \gamma = T \cup T'.$$

Paso 3. Calculamos la curva de cambio de color como

$$\Gamma \doteq \{z \mid P(z) \in \gamma\} \subset \mathbb{C}_z.$$

Si los valores críticos están en $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}_w$, seleccionamos $\gamma = \mathbb{R}$ y

$$\Gamma = \{z \mid \mathfrak{Im}\,(P(z)) = 0\},$$

ella es una curva algebraica en las variables x, y.

Paso 4. Convenimos que
un punto $z_2 \in \mathbb{C}_z$ es azul si $P(z_2) \in T$,
un punto $z_3 \in \mathbb{C}_z$ es gris si $P(z_3) \in T'$.
Con ello **el mosaico asociado a $P(z)$ y γ** es

$$\mathbb{C}_z \backslash \Gamma \doteq \underbrace{T_1 \cup \ldots \cup T_n}_{\text{losetas azules}} \cup \underbrace{T'_1 \cup \ldots \cup T'_n}_{\text{losetas grises}} .$$

Ejemplo. Consideramos $P(z) = z^3$, para determinar la curva de cambio de color tomamos la parte imaginaria

$$\mathfrak{Im}\left(z^3\right) = i3x^2y - iy^3.$$

Eliminamos i, y con ello tenemos una curva algebraica que factorizamos para la variable y

$$3x^2y - y^3 = y(3x^2 - y^2) = 0.$$

La curva algebraica se descompone en tres rectas

$$\{y = 0\}, \{y = \sqrt{3}x\}, \{y = -\sqrt{3}x\}.$$

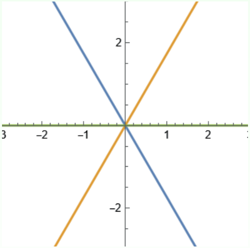


Figure:

Ejemplo. Consideramos $P(z) = z^4$, para determinar la curva de cambio de color tomamos la parte imaginaria

$$\mathfrak{Im}\left(z^4\right) = 4ix^3y - i4xy^3.$$

Eliminamos i, y con ello tenemos una curva algebraica que factorizamos como sigue

$$4x^3y - 4xy^3 = 4xy(x-y)(x+y) = 0.$$

La curva algebraica se descompone en cuatro rectas

$$\{x=0\}, \{y=0\}, \{y=x\}, \{y=-x\}.$$

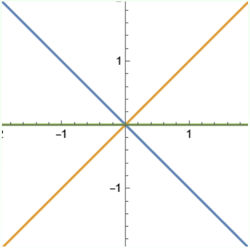


Figure:

Ejemplo. Consideramos $P(z) = z^5$, para determinar la curva de cambio de color tomamos la parte imaginaria

$$\mathfrak{Im}\left(z^5\right) = 5ix^4y - 10ix^2y^3 + iy^5.$$

Eliminamos i, y con ello tenemos una curva algebraica que factorizamos para la variable y

$$5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 = y(5x^4 - 10x^2y^2 + y^4) = 0.$$

La curva algebraica se descompone en cinco rectas
$\{y = 0\}, \{y = -0.726x\}, \{y = 0.726x\}, \{y = -3.077x\}, \{y = 3.077x\}.$

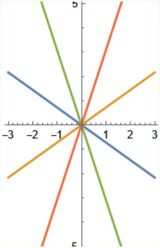


Figure:

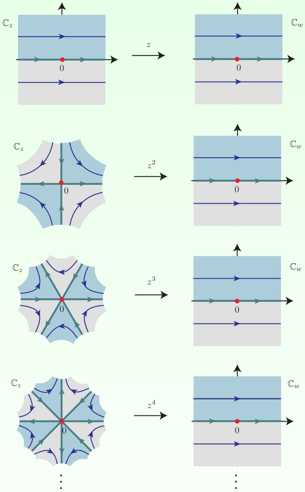


Figure: Mosaicos de los polinomios $P(z) = z^n$, con $n = 1, 2, 3, 4$. Para $n = 1$, el polinomio $P(z) = z$ no tiene puntos críticos.

El caso de polinomios cuadráticos.

Ejemplo (objeto). El monomio $P(z) = z^2$.

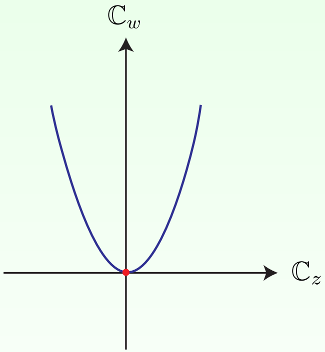


Figure: El monomio $P(z) = z^2$ posee un punto crítico en $0 \in \mathbb{C}_z$ y un valor crítico en $0 \in \mathbb{C}_w$.

Recordemos que $P(z) = z^2$ es una aplicación del plano en el plano, como muestra el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}_z \arrow[r, "z^2"] & \mathbb{C}_w \arrow[d, "T"] \\
\mathbb{R}^2 \arrow[u, "T^{-1}"] \arrow[r, "{\big(\underbrace{x^2 - y^2}_{\mathfrak{Re}(z^2)},\ \underbrace{2xy}_{\mathfrak{Im}(z^2)}\big)}"'] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

donde $T(x + iy) = (x, y)$ es el traductor.

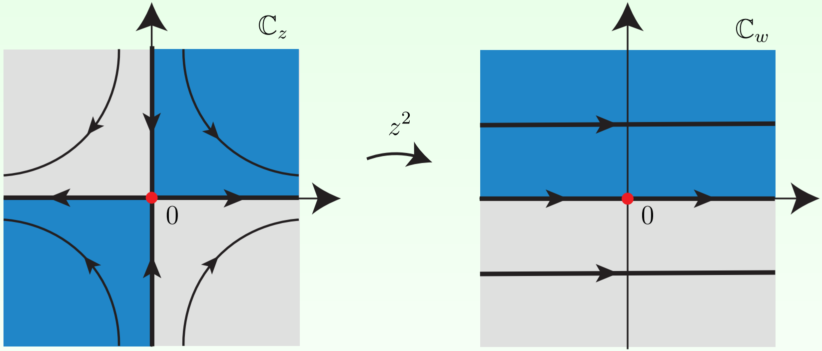


Figure: El “Teorema” es: un punto $z_0 \in \mathbb{C}_z$ es azul si y solo si $\mathfrak{Im}\left(z_0^2\right) > 0$, un punto $z_0 \in \mathbb{C}_z$ es gris si y solo si $\mathfrak{Im}\left(z_0^2\right) < 0$. Decimos que las cuatro teselas o losetas en $\mathbb{C}_z$ son un mosaico.

¡El mosaico es la forma de $P(z) = z^2$!

Comportamiento de las dos raíces reales de $\{z^2 + \epsilon = 0 \mid \epsilon \in \mathbb{R}\}$.

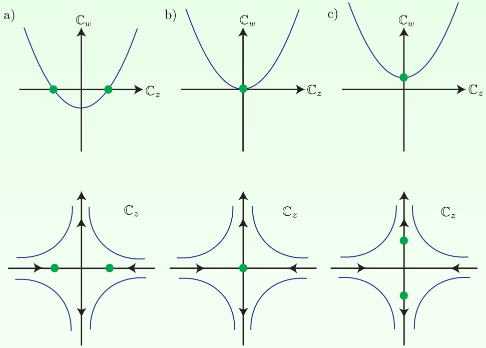


Figure: Arriba gráficas $\{(x, x^2 + \epsilon)\}$, abajo planos de raíces $\mathbb{C}_z$.

El Lema es:

Para $\epsilon < 0$, hay dos raíces reales distintas.

Para $\epsilon = 0$, las raíces colapsan.

Para $\epsilon > 0$, hay dos raíces imaginarias puras distintas.

El comportamiento de las raíces es continuo respecto a $\epsilon \in \mathbb{R}$.

Ejemplo (objeto/experimento).
¿Qué sucede para un polinomio cuadrático mónico general?

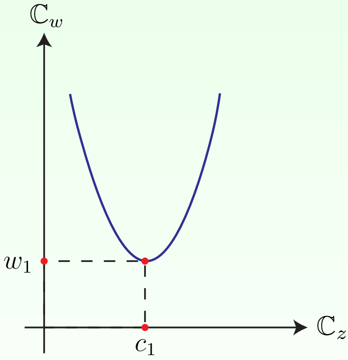


Figure: El polinomio cuadrático $P(z) = a_0 + a_1 z + z^2$ posee un punto crítico $c_1 \in \mathbb{C}_z$ y un valor crítico $w_1 \in \mathbb{C}_w$ (ambos en rojo).

Dos formas equivalentes de escribir un polinomio cuadrático mónico $P(z)$.

La forma del algebrista: usando sus coeficientes (a_0, a_1), *i.e.*

$$\begin{array}{rcl} P(z) : \mathbb{C}_z & \longrightarrow & \mathbb{C}_w \\ z & \longmapsto & a_0 + a_1 z + z^2 \,. \end{array}$$

La forma del analista: usando su punto crítico c_1 y su término constante a_0, *i.e.*

$$\begin{array}{rcl} P(z) : \mathbb{C}_z & \longrightarrow & \mathbb{C}_w \\ z & \longmapsto & 2\int_0^z (z - c_1) dz + a_0 = a_0 + \underbrace{(-2c_1)}_{a_1} z + z^2 \,. \end{array}$$

c_1 es el punto crítico de $P(z)$,
equivalentemente
c_1 es el cero de la derivada $P'(z)$.

Dado un polinomio $P(z)$ asignamos colores azul y gris a los puntos del plano $\mathbb{C}_z$ de forma continua y sencilla.

- Consideramos el polinomio

$$P(z) = a_0 - 2c_1 z + z^2 \,,$$

con punto crítico $c_1 \doteq \mathfrak{c}_1 + i\mathfrak{c}_2$
y valor crítico $w_1 = P(c_1) \doteq \mathfrak{w}_1 + i\mathfrak{w}_2$.

- Consideramos la recta horizontal γ que pasa por el valor crítico w_1, *i.e.*

$$\gamma = \left\{ w \mid \mathfrak{Im}\,(w) = \mathfrak{w}_2 \right\} \subset \mathbb{C}_w.$$

- γ determina una teselación o mosaico $\mathfrak{M}_\gamma$ del plano $\mathbb{C}_w$ como sigue

$$\mathbb{C}_w \backslash \gamma = \underbrace{T}_{\substack{\text{tesela}\\ \text{azul}}} \cup \underbrace{T'}_{\substack{\text{tesela}\\ \text{gris}}} \doteq \mathfrak{M}_\gamma. \tag{1}$$

- La curva Γ en $\mathbb{C}_z$ que bajo $P(z)$ coincide con γ es llamada la **curva de cambio de color** de $P(z)$,

$$\begin{aligned} P : \mathbb{C}_z &\longrightarrow \mathbb{C}_w \\ \Gamma &\longmapsto \gamma. \end{aligned}$$

¿Cómo es la curva Γ?, ¿existen ecuaciones que describan a Γ?

¡La curva de cambio de color Γ es algebraica[1]!

$$
\begin{aligned}
\Gamma \doteq \left\{\mathfrak{Im}\left(P(z)\right) = \mathfrak{w}_2\right\} &= \left\{\mathfrak{Im}\left(a_0 - 2c_1 z + z^2\right) = \mathfrak{w}_2\right\} \\
&= \left\{\mathfrak{a}_2 + 2(xy - \mathfrak{c}_2 x - \mathfrak{c}_1 y) = \mathfrak{a}_2 - 2\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\right\} \\
&= \left\{xy - \mathfrak{c}_2 x - \mathfrak{c}_1 y + \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2 = 0\right\} \\
&= \left\{\Big(\underbrace{x - \mathfrak{c}_1}_{\substack{\text{recta}\\ \text{vertical}\\ \text{por } c_1}}\Big)\Big(\underbrace{y - \mathfrak{c}_2}_{\substack{\text{recta}\\ \text{horizontal}\\ \text{por } c_1}}\Big) = 0\right\}.
\end{aligned}
$$

[1] Esto significa que Γ es el cero de un polinomio de dos variables x e y. No toda curva en $\mathbb{R}^2$ es algebraica, ser algebraica es una condición de simplicidad.

¡La curva de cambio de color Γ es algebraica[1]!

$$
\begin{aligned}
\Gamma \doteq \left\{\Im\mathfrak{m}\left(P(z)\right) = \mathfrak{w}_2\right\} &= \left\{\Im\mathfrak{m}\left(a_0 - 2c_1 z + z^2\right) = \mathfrak{w}_2\right\} \\
&= \left\{\mathfrak{a}_2 + 2(xy - \mathfrak{c}_2 x - \mathfrak{c}_1 y) = \mathfrak{a}_2 - 2\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\right\} \\
&= \left\{xy - \mathfrak{c}_2 x - \mathfrak{c}_1 y + \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2 = 0\right\} \\
&= \left\{\Big(\underbrace{x - \mathfrak{c}_1}_{\substack{\text{recta}\\ \text{vertical}\\ \text{por } c_1}}\Big)\Big(\underbrace{y - \mathfrak{c}_2}_{\substack{\text{recta}\\ \text{horizontal}\\ \text{por } c_1}}\Big) = 0\right\}.
\end{aligned}
$$

[1] Esto significa que Γ es el cero de un polinomio de dos variables x e y. No toda curva en $\mathbb{R}^2$ es algebraica, ser algebraica es una condición de simplicidad.

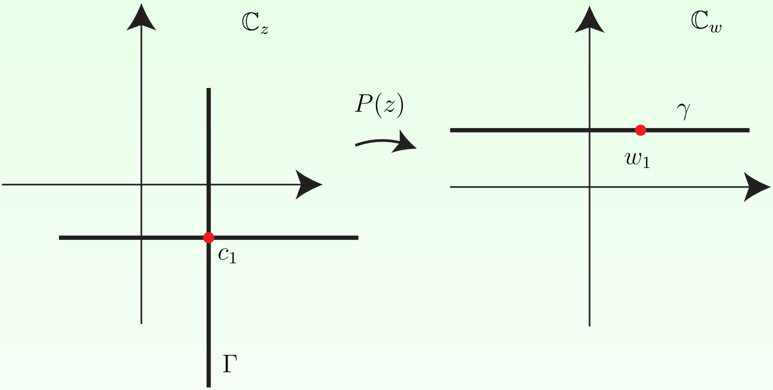


Figure: La curva de cambio de color Γ del polinomio $P(z) = a_0 - 2c_1 z + z^2$ es la unión de las rectas horizontal y vertical que pasan por el punto crítico $c_1 \in \mathbb{C}_z$.

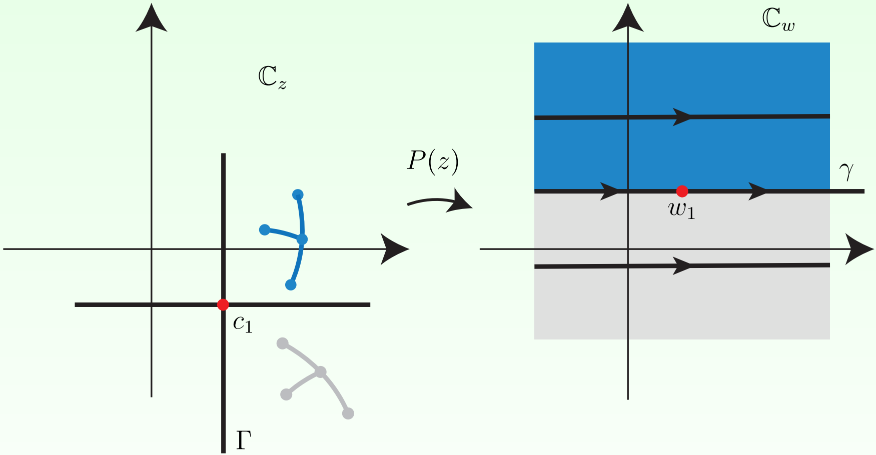


Figure: El polinomio $P(z)$ determina continuamente los colores azul o gris en $\mathbb{C}_z \backslash \Gamma$. Dado un punto azul en $\mathbb{C}_z$ los puntos vecinos son azules siempre y cuando exista trayectoria entre ellos que no cruce Γ.

- La curva de cambio de color Γ determina un mosaico $\mathfrak{M}_\Gamma$ del plano $\mathbb{C}_z$ como sigue

$$\mathbb{C}_z \backslash \Gamma = \underbrace{T_1 \cup T_2}_{\substack{\text{teselas}\\ \text{azules}}} \cup \underbrace{T_1' \cup T_2'}_{\substack{\text{teselas}\\ \text{gris}}} \doteq \mathfrak{M}_\Gamma. \tag{2}$$

- Un punto $z_0 \in \mathbb{C}_z$ es azul si y solo si $P(z_0)$ es azul en $\mathbb{C}_w$,

  un punto $z_0 \in \mathbb{C}_z$ es gris si y solo si $P(z_0)$ es gris en $\mathbb{C}_w$.

¡ El mosaico $\mathfrak{M}_\Gamma$ es

la forma de $P(z) = a_0 - 2c_1 z + z^2$!

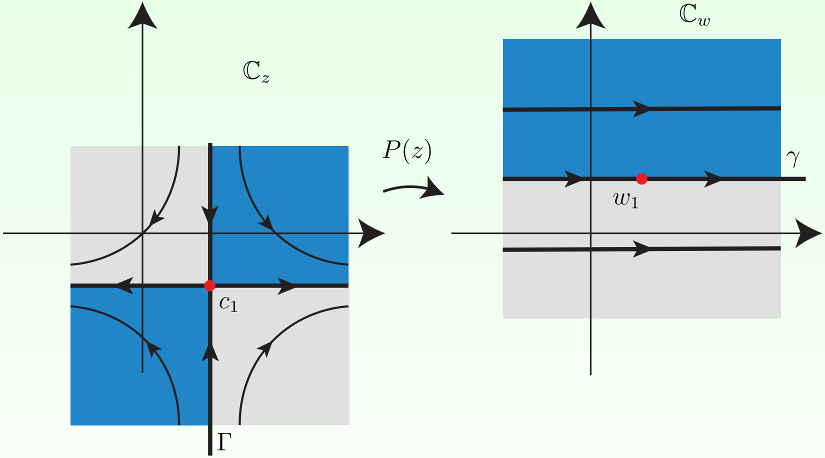
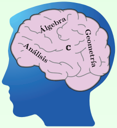
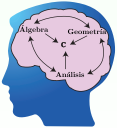


Figure: El "Teorema" es: teselación $\mathfrak{M}_\Gamma$ en el plano $\mathbb{C}_z$ para el polinomio $P(z) = a_0 - 2c_1 z + z^2$, en rojo el punto crítico $c_1 \in \mathbb{C}_z$ y el valor crítico $w_1 \in \mathbb{C}_w$.



$$\begin{tikzcd}
P(z)=a_0-2c_1z+z^2 \arrow[r] & \begin{array}{c}\text{valor}\\ \text{crítico}\\ \{w_1\}\end{array} \arrow[r] & \gamma\subset\mathbb{C}_w \arrow[dll] \\
\Gamma\subset\mathbb{C}_z \arrow[r] & \begin{array}{c}\text{mosaico de } P(z)\\ \mathbb{C}_z\backslash\Gamma=\underbrace{T_1\cup T_2}_{\substack{\text{teselas}\\ \text{azules}}}\cup\underbrace{T_1'\cup T_2'}_{\substack{\text{teselas}\\ \text{azules}}}.\end{array} &
\end{tikzcd}$$



Propiedades del mosaico de $P(z)$.

- El número de teselas azules,
  el número de teselas gris y
  el grado de $P(z)$
  coinciden.

- Dadas T_ℓ y T'_ℓ teselas de $\mathfrak{M}_\Gamma$ azul y gris adyacentes existe

$$P^{-1}(t) : T \cup T' \subset \mathbb{C}_w \longrightarrow T_\ell \cup T'_\ell \subset \mathbb{C}_z$$

  la función inversa de $P(z)$.

¿Recuerdas $z_1, z_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$?

El caso de polinomios cúbicos.

Ejemplo (objeto/experimento). Un polinomio cúbico $P(z)$.

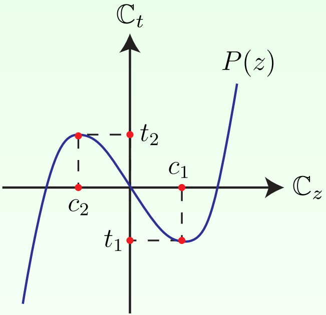


Figure: El polinomio cúbico $P(z) = -3z + z^3$ posee 2 puntos críticos $c_1, c_2 \in \mathbb{C}_z$ y 2 valores críticos $w_1, w_2 \in \mathbb{C}_w$ (todos en rojo). Adicionalmente posee 2 puntos cocríticos en $\mathbb{C}_z$ (en verde).

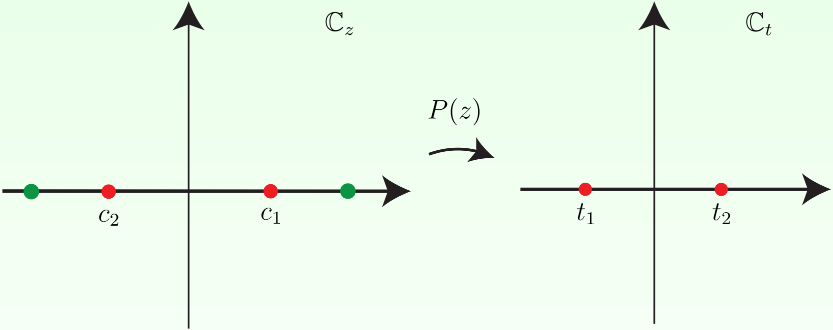


Figure: El polinomio cúbico $P(z) = -3z + z^3$ posee 2 puntos críticos $c_1, c_2 \in \mathbb{C}_z$ y 2 valores críticos $w_1, w_2 \in \mathbb{C}_w$ (todos en rojo). Adicionalmente posee 2 puntos cocríticos en $\mathbb{C}_z$ (en verde).

Dos formas equivalentes de escribir un polinomio cúbico mónico $P(z)$.

La forma del algebrista: usando sus coeficientes (a_0, a_1, a_2), *i.e.*

$$\begin{array}{rcl} P(z) : \mathbb{C}_z & \longrightarrow & \mathbb{C}_w \\ z & \longmapsto & a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + z^3 \,. \end{array}$$

La forma del analista: usando sus puntos críticos y su término constante (c_1, c_2, a_0), *i.e.*

$$\begin{array}{rcl} P(z) : \mathbb{C}_z & \longrightarrow & \mathbb{C}_w \\ z & \longmapsto & 3\displaystyle\int_0^z (z-c_1)(z-c_2)dz + a_0 \\ & & = a_0 + \underbrace{3c_1c_2}_{a_1} z + \underbrace{\tfrac{-3(c_1+c_2)}{2}}_{a_2} z^2 + z^3 \,. \end{array}$$

$c_1,\ c_2$ son los puntos críticos de $P(z)$,
equivalentemente
$c_1,\ c_2$ son los ceros de la derivada $P'(z)$.

Asignamos colores azul y gris a los puntos del plano $\mathbb{C}_z$ de forma continua y sencilla.

- Consideramos el polinomio

$$P(z) = 3\int_0^z (z-1)(z+1)dz = -3z + z^3\,,$$

con puntos críticos

$$c_1 = 1, \;\; c_2 = -1$$

y valores críticos

$$w_1 = P(1) = -2, \;\; w_2 = P(-1) = 2.$$

- Consideramos

$$\gamma = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}_w$$

la recta horizontal que pasa por los valores críticos w_1 y w_2.

- γ determina un mosaico $\mathfrak{M}_\gamma$ del plano $\mathbb{C}_w$ como sigue

$$\mathbb{C}_w \backslash \gamma = \underbrace{T}_{\substack{\text{tesela} \\ \text{azul}}} \cup \underbrace{T'}_{\substack{\text{tesela} \\ \text{gris}}} \doteq \mathfrak{M}_\gamma. \qquad (3)$$

- Un punto $t_0 \in \mathbb{C}_w$ es azul si y solo si $\mathfrak{Im}\,(t_0) > 0$,

  un punto $t_0 \in \mathbb{C}_w$ es gris si y solo si $\mathfrak{Im}\,(t_0) < 0$.

- La curva Γ en $\mathbb{C}_z$ que bajo $P(z)$ coincide con γ es la curva de cambio de color de $P(z)$,

$$\begin{array}{rcl} P : \mathbb{C}_z & \longrightarrow & \mathbb{C}_w \\ \Gamma & \longmapsto & \gamma. \end{array}$$

¿Existen ecuaciones que describan a Γ?

¡La curva de cambio de color Γ es algebraica!

$$
\begin{aligned}
\Gamma \doteq \{\mathfrak{Im}\,(P(z)) = 0\} &= \{\mathfrak{Im}\,(-3z + z^3) = 0\} \\
&= \{3x^2y - y^3 - 3y = 0\} \\
&= \Big\{ \underbrace{y}_{\substack{\text{eje}\\ \text{real}}} \underbrace{(3x^2 - y^2 - 3)}_{\substack{\text{hipérbola}\\ \text{centrada}\\ \text{en } 0}} = 0 \Big\}.
\end{aligned}
$$

¡Que suerte tenemos;
la curva algebraica cúbica $\Gamma = \{\mathfrak{Im}\,(P(z)) = 0\}$ es fácil de describir!

Γ es la unión de una curva de grado uno y una curva de grado dos.

¡La curva de cambio de color Γ es algebraica!

$$\begin{aligned}\Gamma \doteq \{\mathfrak{Im}\,(P(z)) = 0\} &= \{\mathfrak{Im}\left(-3z + z^3\right) = 0\} \\ &= \{3x^2y - y^3 - 3y = 0\} \\ &= \Big\{\underbrace{y}_{\substack{\text{eje}\\ \text{real}}}\underbrace{(3x^2 - y^2 - 3)}_{\substack{\text{hipérbola}\\ \text{centrada}\\ \text{en } 0}} = 0\Big\}.\end{aligned}$$

¡Que suerte tenemos;
la curva algebraica cúbica $\Gamma = \{\mathfrak{Im}\,(P(z)) = 0\}$ es fácil de describir!

Γ es la unión de una curva de grado uno y una curva de grado dos.

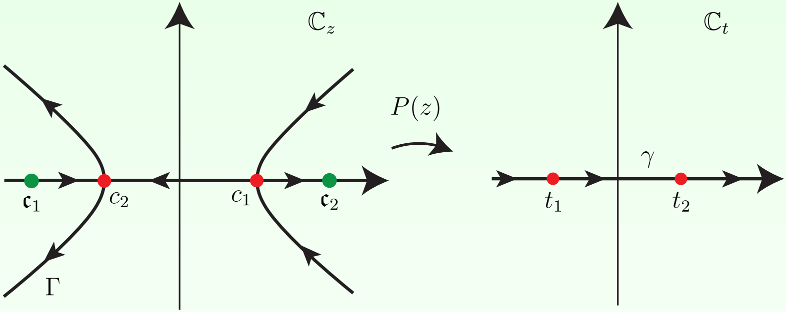


Figure: La curva de cambio de color Γ del polinomio $P(z) = -3z + z^3$ es la unión de la recta real $\{y = 0\}$ con la hipérbola $\{x^2 - y^2/3 = 1\}$.

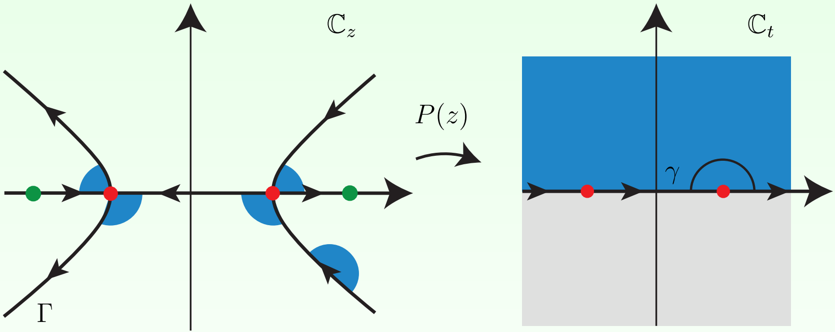


Figure: El polinomio $P(z)$ determina continuamente los colores azul o gris en $\mathbb{C}_z \backslash \Gamma$. Dado un punto azul en $\mathbb{C}_z$ los puntos vecinos son azules siempre y cuando exista trayectoria entre ellos que no cruce Γ.

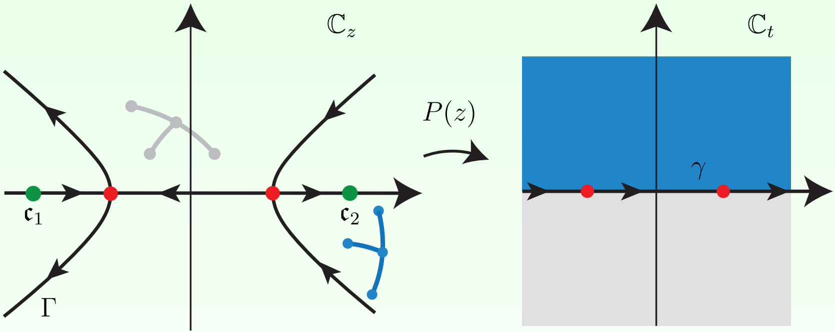


Figure: El polinomio $P(z)$ determina continuamente los colores azul o gris en $\mathbb{C}_z \backslash \Gamma$. Dado un punto azul en $\mathbb{C}_z$ los puntos vecinos son azules siempre y cuando exista trayectoria entre ellos que no cruce Γ.

- La curva de cambio de color Γ determina un mosaico $\mathfrak{M}_\Gamma$ del plano $\mathbb{C}_z$ como sigue

$$\mathbb{C}_z \backslash \Gamma = \underbrace{T_1 \cup T_2 \cup T_3}_{\substack{\text{teselas}\\ \text{azules}}} \cup \underbrace{T_1' \cup T_2' \cup T_3'}_{\substack{\text{teselas}\\ \text{gris}}} \doteq \mathfrak{M}_\Gamma. \tag{4}$$

- Un punto $z_0 \in \mathbb{C}_z$ es azul si y solo si $P(z_0)$ es azul en $\mathbb{C}_w$,

  un punto $z_0 \in \mathbb{C}_z$ es gris si y solo si $P(z_0)$ es gris en $\mathbb{C}_w$.

¡El mosaico $\mathfrak{M}_\Gamma$ es la forma de $P(z) = -3z + z^3$!

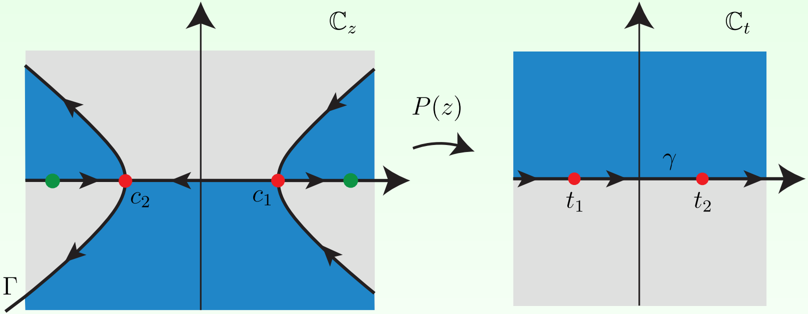
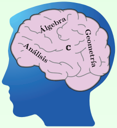
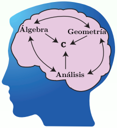


Figure: El “Teorema” es: mosaico $\mathfrak{M}_\Gamma$ en el plano $\mathbb{C}_z$ para el polinomio $P(z) = -3z + z^3$, puntos críticos y valores críticos en rojo, puntos cocríticos en verde.



$$\begin{tikzcd} P(z) = -3z + z^3 \arrow[r] & \begin{array}{c}\text{valores}\\ \text{críticos}\\ \{w_1,\ w_2\}\end{array} \arrow[r] & \gamma \subset \mathbb{C}_w \arrow[dll] \\ \Gamma \subset \mathbb{C}_z \arrow[r] & \begin{array}{c}\text{mosaico de } P(z)\\ \mathbb{C}_z \backslash \Gamma = \underbrace{T_1 \cup T_2 \cup T_3}_{\substack{\text{teselas}\\ \text{azules}}} \cup \underbrace{T'_1 \cup T'_2 \cup T'_3}_{\substack{\text{teselas}\\ \text{azules}}}.\end{array} & \end{tikzcd}$$



¿A quién se le ocurrió ese truco?…

¿Pero cuál es el truco?

Figure: Felix Klein (1849 – 1925) y Hermann Schwarz (1843 – 1921), matemáticos alemanes pioneros en la construcción de mosaicos para funciones complejas y para ecuaciones diferenciales complejas.

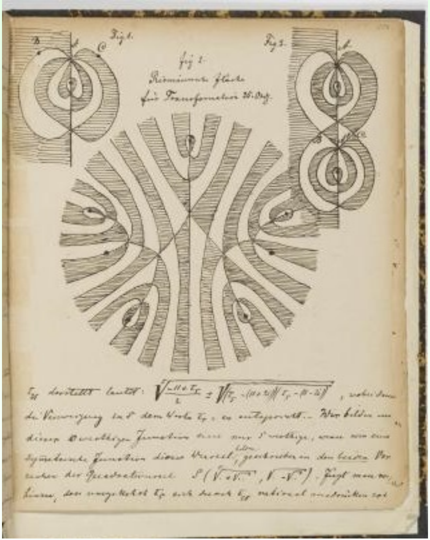


Figure: Página de los Protocolos de Klein. ¿Qué tan duro trabajaba Klein?

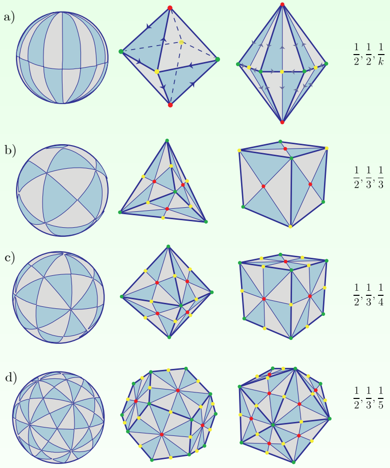


Figure: Mosaicos de Hermann Schwarz

El caso de polinomios cúarticos.

Ejemplo (objeto/experimento). Un polinomio cúartico $P(z)$.

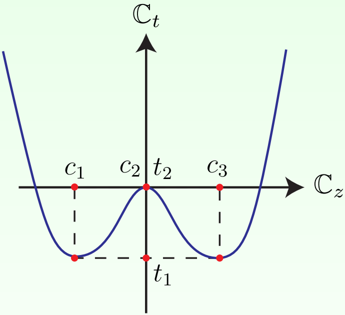


Figure: Un polinomio cúartico $P(z) : \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_w$; con 3 puntos críticos $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}_z$ y 2 valores críticos $w_1, w_2 \in \mathbb{C}_w$ (todos en rojo), sin puntos cocríticos.

Observación. Un polinomio cúartico $P(z)$ general.

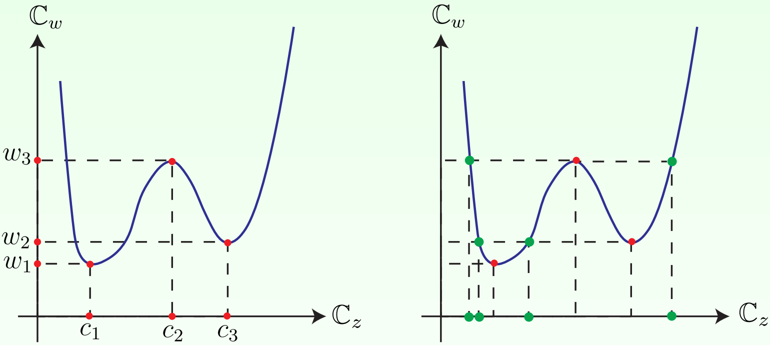


Figure: Un polinomio cúartico $P(z) : \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_w$ posee 3 puntos críticos $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}_z$ y 3 valores críticos $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_w$ (todos en rojo). Además, pueden existir hasta 6 puntos cocríticos en $\mathbb{C}_z$ (en verde).

Dos formas equivalentes de escribir un polinomio cúartico mónico $P(z)$.

La forma del algebrista: usando sus coeficientes (a_0, a_1, a_2, a_3), *i.e.*

$$\begin{aligned} P(z) : \mathbb{C}_z & \longrightarrow \mathbb{C}_w \\ z & \longmapsto a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + z^4 \, . \end{aligned}$$

La forma del analista: usando sus puntos críticos y su término constante (c_1, c_2, c_3, a_0), *i.e.*

$$\begin{aligned} P(z) : \mathbb{C}_z & \longrightarrow \mathbb{C}_w \\ z & \longmapsto 4 \int_0^z (z - c_1)(z - c_2)(z - c_3) dz + a_0 \\ & = a_0 + \underbrace{(-4c_1c_2c_3)}_{a_1} z + \underbrace{2(c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3)}_{a_2} z^2 + \underbrace{\tfrac{-4(c_1+c_2+c_3)}{3}}_{a_3} z^3 + z^4 \, . \end{aligned}$$

c_1, c_2, c_3 son los puntos críticos de $P(z)$,
equivalentemente
c_1, c_2, c_3 son los ceros de la derivada $P'(z)$.

Asignamos colores azul y gris a los puntos del plano $\mathbb{C}_z$ de forma continua y sencilla.

- Consideramos el polinomio[2]

$$P(z) = 4\int_0^z z(z-1)(z+1)dz = -2z^2 + z^4\,,$$

con puntos críticos

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = -1$$

y valores críticos

$$w_1 = P(0) = 0, \quad w_2 = P(1) = P(-1) = -1.$$

- Consideramos

$$\gamma = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}_w$$

la recta que pasa por los valores críticos w_1 y w_2.

[2] sencillo, simple, simétrico, para facilitar los cálculos.

- γ determina un mosaico $\mathfrak{M}_\gamma$ del plano $\mathbb{C}_w$ como sigue

$$\mathbb{C}_w \backslash \gamma = \underbrace{T}_{\substack{\text{tesela}\\ \text{azul}}} \cup \underbrace{T'}_{\substack{\text{tesela}\\ \text{gris}}} \doteq \mathfrak{M}_\gamma. \tag{5}$$

- Un punto $t_0 \in \mathbb{C}_w$ es azul si y solo si $\mathfrak{Im}\,(t_0) > 0$,

  un punto $t_0 \in \mathbb{C}_w$ es gris si y solo si $\mathfrak{Im}\,(t_0) < 0$.

- La curva Γ en $\mathbb{C}_z$ que bajo $P(z)$ coincide con γ es la curva de cambio de color de $P(z)$,

$$\begin{aligned} P : \mathbb{C}_z &\longrightarrow \mathbb{C}_w \\ \Gamma &\longmapsto \gamma. \end{aligned}$$

  ¿Existen ecuaciones que describan a Γ?

¡La curva de cambio de color Γ es algebraica!

$$\begin{aligned}\Gamma \doteq \{\mathfrak{Im}\,(P(z)) = 0\} &= \{\mathfrak{Im}\,(-2z^2 + z^4)\}\\ &= \{x^3y - xy^3 - xy = 0\}\\ &= \Big\{ \underbrace{x}_{\substack{\text{recta}\\ \text{imaginaria}}} \underbrace{y}_{\substack{\text{recta}\\ \text{real}}} \underbrace{(x^2 - y^2 - 1)}_{\substack{\text{hipérbola}\\ \text{centrada}\\ \text{en } 0}} = 0 \Big\}.\end{aligned}$$

¡La curva de cambio de color Γ es algebraica!

$$
\begin{aligned}
\Gamma \doteq \{\Im\mathfrak{m}\,(P(z)) = 0\} &= \{\Im\mathfrak{m}\,(-2z^2 + z^4)\} \\
&= \{x^3y - xy^3 - xy = 0\} \\
&= \Big\{ \underbrace{x}_{\substack{\text{recta}\\ \text{imaginaria}}} \; \underbrace{y}_{\substack{\text{recta}\\ \text{real}}} \underbrace{(x^2 - y^2 - 1)}_{\substack{\text{hipérbola}\\ \text{centrada}\\ \text{en } 0}} = 0 \Big\}.
\end{aligned}
$$

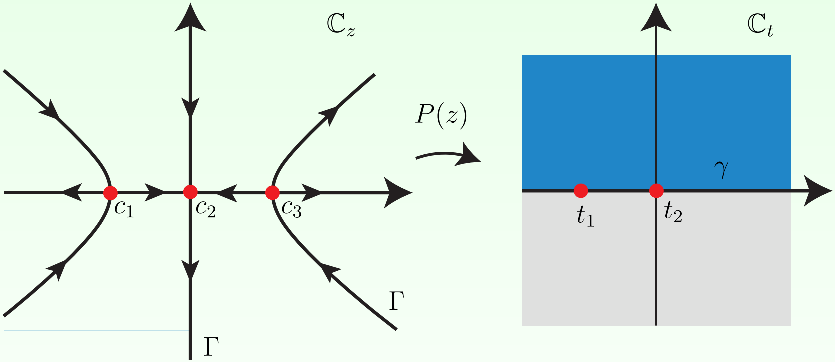


Figure: La curva de cambio de color Γ del polinomio $P(z) = -2z^2 + z^4$ es la unión de la recta real $\{y = 0\}$, la recta imaginaria $\{x = 0\}$ y la hipérbola $\{x^2 - y^2 = 1\}$.

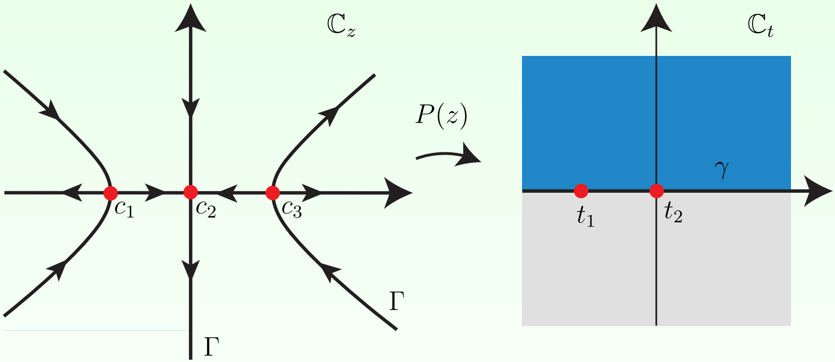


Figure: El polinomio $P(z)$ determina continuamente los colores azul o gris en $\mathbb{C}_z \backslash \Gamma$.

- La curva de cambio de color Γ determina un mosaico $\mathfrak{M}_\Gamma$ del plano $\mathbb{C}_z$ como sigue

$$\mathbb{C}_z \setminus \Gamma \;=\; \underbrace{T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4}_{\substack{\text{teselas}\\ \text{azules}}} \;\cup\; \underbrace{T_1' \cup T_2' \cup T_3' \cup T_4'}_{\substack{\text{teselas}\\ \text{gris}}} \;\doteq\; \mathfrak{M}_\Gamma \qquad (6)$$

- Un punto $z_0 \in \mathbb{C}_z$ es azul si y solo si $P(z_0)$ es azul en $\mathbb{C}_w$,

  un punto $z_0 \in \mathbb{C}_z$ es gris si y solo si $P(z_0)$ es gris en $\mathbb{C}_w$.

¡El mosaico $\mathfrak{M}_\Gamma$ es la forma de $P(z) = -2z^2 + z^4$!

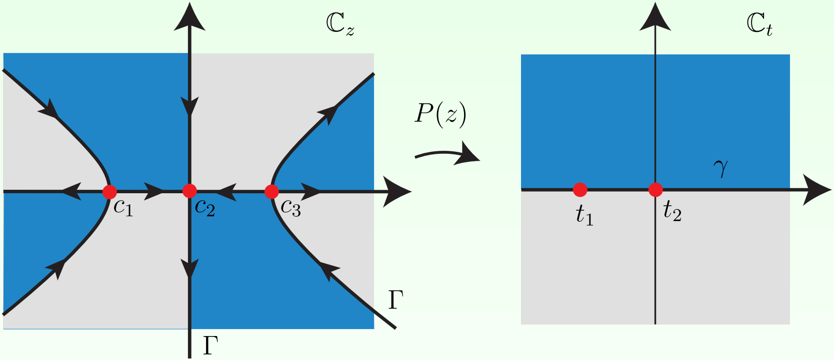
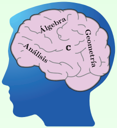
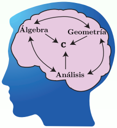


Figure: El "Teorema" es: mosaico $\mathfrak{M}_\Gamma$ en el plano $\mathbb{C}_z$ para el polinomio $P(z) = -2z^2 + z^4$, puntos críticos y valores críticos en rojo, puntos coocriíticos en verde.



$$P(z) = -2z^2 + z^4 \longrightarrow \begin{array}{c}\text{valores}\\ \text{críticos}\\ \{w_1,\ w_2\}\end{array} \longrightarrow \gamma \subset \mathbb{C}_w$$

$$\Gamma \subset \mathbb{C}_z \longrightarrow \overset{\text{mosaico de } P(z)}{\mathbb{C}_z \backslash \Gamma = \underbrace{T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4}_{\substack{\text{teselas}\\ \text{azules}}} \cup \underbrace{T_1' \cup T_2' \cup T_3' \cup T_4'}_{\substack{\text{teselas}\\ \text{azules}}}}.$$



¿Qué hemos aprendido?

¿Cuál es el teorema?

¿Cómo hacemos matemáticas?

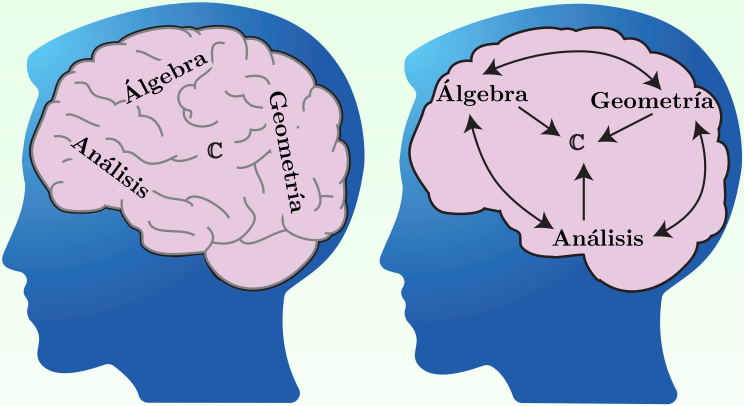


Figure: Objetos matemámaticos aparentemente distintos, al madurar en nuestro intelecto confluyen. ¿Ejemplos?

$a^2 + b^2 = c^2, \ldots$

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1, \ldots$$

$$sen^2 z + cos^2 z = 1, \ldots$$

¿Como hacemos matemáticas?

1. Buscamos una pregunta u objeto.
2. Hacemos experimentos, para entender como funciona el objeto.
3. El **“Teorema”** es una frase corta críptica (casi un poema) que describe el funcionamiento del objeto.

Teorema de Schwarz–Klein [1].

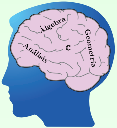
Dada una función racional

$$f : \mathbb{C}_z \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C}_w \cup \{\infty\}$$

y $\gamma(t) : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}_z \cup \{\infty\}$ una trayectoria cerrada, sin autointersección, que recorre todos sus valores críticos una vez (incluyendo el ∞ cuando este es un valor crítico).
Existe un mosaico

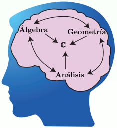
$$\mathfrak{M}_\Gamma$$

a dos colores en $\mathbb{C}_z$ asociado a la función.



$$P(z) \longrightarrow \begin{array}{c}\text{valores}\\ \text{críticos}\\ \{w_1, \ldots, t_\iota, \ldots, t_{\mathfrak{n}}\}\end{array} \longrightarrow \gamma \subset \mathbb{C}_w$$

$$\Gamma \subset \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_z \backslash \Gamma = \overbrace{\underbrace{T_1 \cup \cdots \cup T_\ell \cup \cdots \cup T_n}_{\substack{\text{teselas}\\ \text{azules}}} \cup \underbrace{T'_1 \cup \cdots \cup T'_\ell \cup \cdots \cup T'_n}_{\substack{\text{teselas}\\ \text{azules}}}}^{\text{mosaico de } P(z)}.$$



Ejemplo. Polinomio con cuatro valores críticos, no alineados.

Consideramos

$$P(z) = (-2+2i)z^2 + \left(\frac{3}{8} - \frac{4}{3}i\right) z^3 - 2z^4 + \frac{4}{5}z^5.$$

Sus puntos críticos son

$$c_1 = 0,\ \ c_2 = 1,\ \ c_3 = -i,\ \ c_4 = 1+i.$$

Sus valores críticos son

$$P(0) = 0,\ P(1) = -\frac{8}{15}+\frac{2}{3}i,\ P(-i) = \frac{4}{3}-\frac{2}{15}i,\ P(1+i) = -\frac{28}{15}+\frac{4}{5}i.$$

Proponemos γ como la parábola que **casi** pasa por los cuatro valores críticos

$$\gamma \cong \left\{ y - \frac{19}{176}x^2 + \frac{161}{660}x = 0 \right\} \subset \mathbb{C}_w.$$

Tenemos la curva de cambio de color

$$\Gamma \cong \left\{ \mathfrak{Im}\left(P(z)\right) - \frac{19}{176}\mathfrak{Re}\left(P(z)\right)^2 + \frac{161}{660}\mathfrak{Re}\left(P(z)\right) = 0 \right\} \subset \mathbb{C}_z.$$

Proponemos γ como la parábola que **casi** pasa por los cuatro valores críticos

$$\gamma \cong \left\{ y - \frac{19}{176}x^2 + \frac{161}{660}x = 0 \right\} \subset \mathbb{C}_w.$$

Tenemos la curva de cambio de color

$$\Gamma \cong \left\{ \mathfrak{Im}\left(P(z)\right) - \frac{19}{176}\mathfrak{Re}\left(P(z)\right)^2 + \frac{161}{660}\mathfrak{Re}\left(P(z)\right) = 0 \right\} \subset \mathbb{C}_z.$$

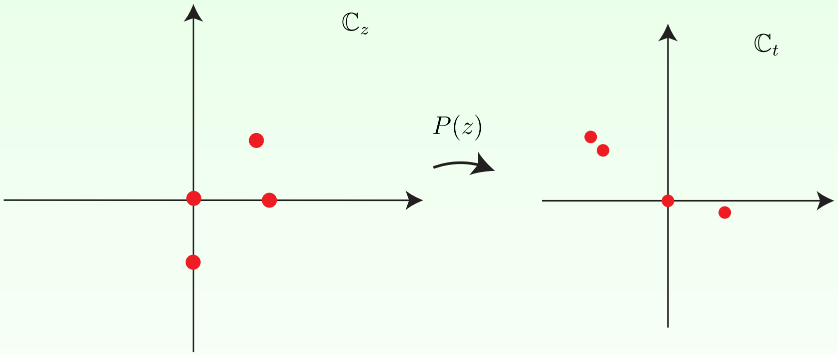


Figure:

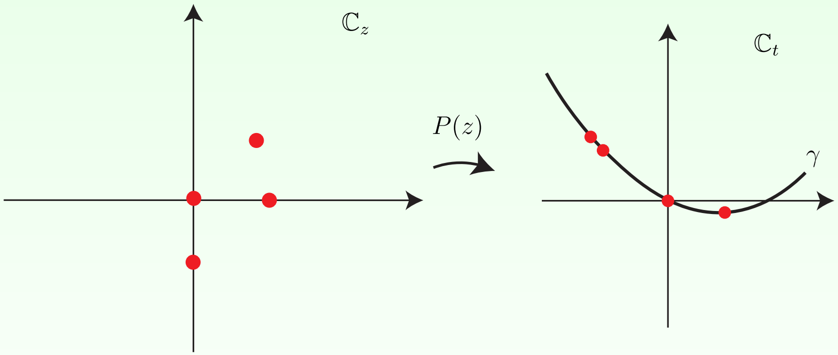


Figure:

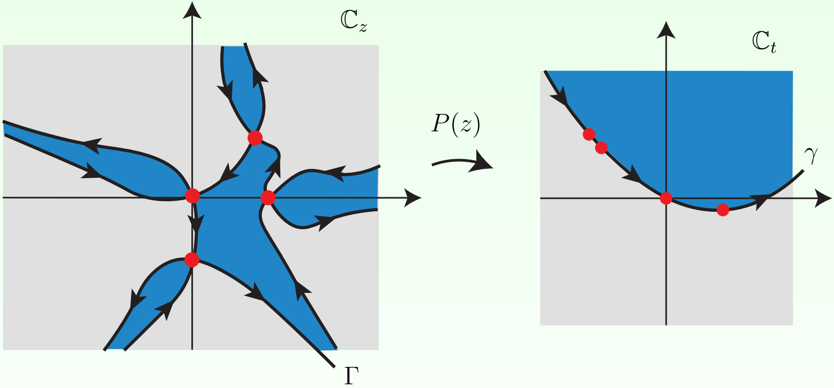


Figure:

A continuación las figuras de Mosaicos en la esfera para polinomios de grado 3, 4 y funciones racionales.

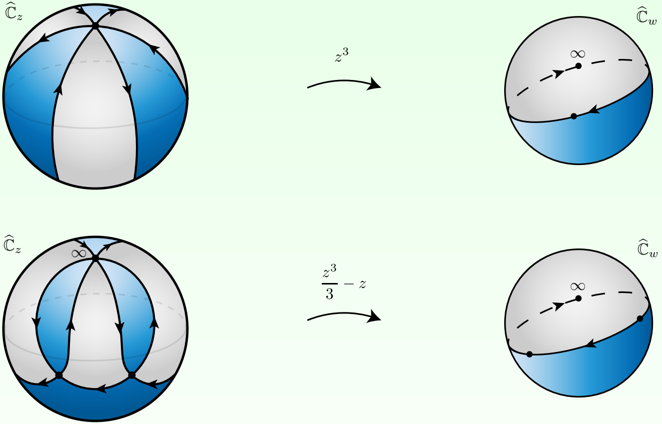


Figure: Álbum de mosaicos en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ para polinomios cúbicos.

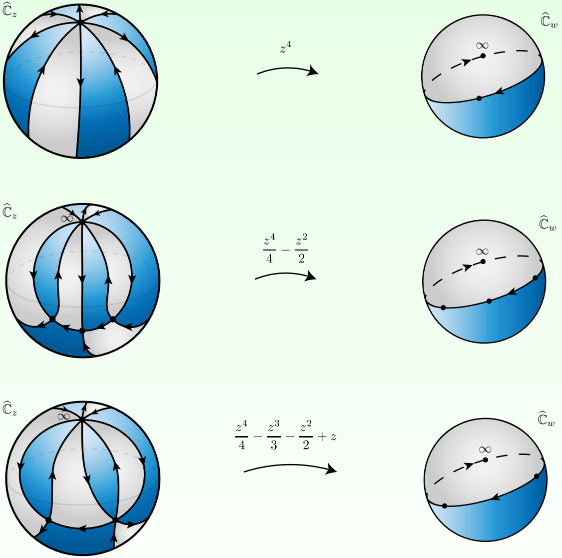


Figure: Álbum de mosaicos en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ para polinomios cúarticos.

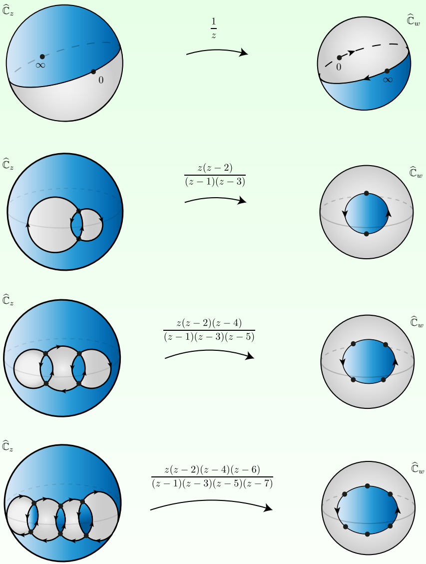


Figure: Mosaicos en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ para algunas funciones racionales.

Más mosaicos ...

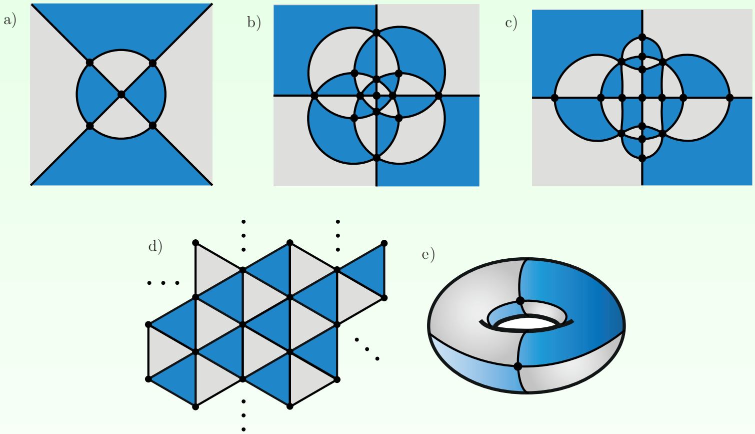


Figure: Tres mosaicos Schwartz–Klein (a), (b), (c) de funciones racionales en $\mathbb{C}_z$, y dos mosaicos en el plano (d) y el toro (e) la función Weierstrass $\wp$.

Un proyecto actual es:

estudiar/establecer una correspondencia

$$\mathfrak{M}_{f^*\gamma} \qquad \longleftrightarrow \quad f : M \longmapsto \widehat{\mathbb{C}}_t$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Mosaicos} \\ \text{losetas} \\ \text{azules y grises} \end{array} \right\} \qquad \{\text{funciones analíticas}\}$$

Preguntas / proyectos futuros.

• Dada un mosaico realizable en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ calcular explícitamente la función racional correspondiente (encontrar los coeficientes adecuados).

• Si todos los valores críticos están en una línea en un círculo, entonces $f^*\gamma$ tiene una ecuación algebraica (hasta la transformación de Mobius)

$$\{\mathfrak{Im}\,(f) = 0\} \subset \widehat{\mathbb{C}}_z.$$

Estudia estas curvas algebraicas.
Clasifica las funciones racionales f con la propiedad anterior.

• Relacionar claramente, la monodromía de una función racional con su mosaico.

• Relacionar los ceros de mosaicos topológicas con otras preguntas enumerativas para funciones polinomiales y racionales.

Referencias.

[1] Alvarez–Parrilla, A.; González–Cely, L. J.; Gutiérrez–Soto, R.; Muciño–Raymundo, J.; Rodríguez–Basulto, C. H.: *Visualización de funciones complejas; siguiendo a Klein, Smale y Thurston*, Miscelánea Matemática Sociedad Matemática Mexicana, vol. 70 (2020) 77–108. https://doi.org/10.47234/mm.7005

[2] Chislenko E.; Tschinke Y.: *The Felix Klein protocols,* Notices of the AMS, vol. 54, núm. 8 (2007), 960–970. http://www.ams.org/notices/200708/200708-full-issue.pdf

[3] Katz G.: *How tangents solve algebraic equations, or a remarkable geometry of discriminant varieties*, Expo. Math., Vol. 21, No. 3, (2003), 219–261. https://doi.org/10.1016/S0723-0869(03)80002-6

[4] Lando S. K.; Zvonkin A. K.: *Graphs on surfaces and their applications*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 141, Low–Dimensional Topology, II, Springer–Verlag, Berlin (2004). https://doi.org/10.1007/978-3-540-38361-1