APORTACIONES MATEMÁTICAS (2002) 197–209

Sobre la aplicación canónica de una curva *

Sevín Recillas Pishmish
Instituto de Matemáticas UNAM, Campus Morelia
Morelia 58089, Michoacán
MEXICO
sevin@matmor.unam.mx

Una curva algebraica C es una variedad algebraica de dimensión 1; la cual en nuestro caso la consideraremos definida sobre $\mathbb{C}$, irreducible, proyectiva y no singular.

Una superficie de Riemann S es una variedad compleja de dimensión 1; la cual en nuestro caso la consideraremos compacta y conexa.

El estudio de variedades es el estudio de funciones globales de las cuales conocemos su comportamiento local, que en nuestro caso son: las funciones $f : C \to \mathbb{C}$ racionales y las funciones $f : S \to \mathbb{C}$ meromorfas. En ambos casos el conjunto de tales funciones forma un campo, el cual es una extensión algebraica finita del campo de funciones racionales en una variable $\mathbb{C}(X)$.

Las dos categorías son equivalentes, es decir, toda superficie de Riemann compacta y conexa es una curva proyectiva, lisa e irreducible y toda función meromorfa $f : S \to \mathbb{C}$ es una función racional.

Un ejemplo.

A una curva plana le hacemos corresponder una superficie de Riemann S. Consideremos el polinomio irreducible $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ de grado n, esto es, la curva plana $\{F(x,y) = 0\} \subset \mathbb{A}^2$.

Escribimos nuestro polinomio como

*Este artículo está en su versión final y no será publicado en ninguna otra parte.

$$F(x,y) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)y^i$$

con $a_i(x) \in \mathbb{C}[x]$.

Para cada $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1$, consideremos el polinomio en una variable $\sum_{i=0}^{n} a_i(z)y^i \in \mathbb{C}[y]$ (con las modificaciones usuales si $z = \infty$), que en general tiene n raíces distintas. Tenemos que excluir los valores de z tales que $a_n(z) = 0$ y los que hagan que $F(z,y) = 0$ tenga raíces múltiples; pero en ambos casos se excluye a un número finito de ellos.

Si denotamos por $y_1(z), \ldots, y_n(z)$ las raíces de $F(z,y) = 0$, entonces si consideramos $\triangle$ un pequeño disco alrededor de z, tenemos que $\{y_i(t) : t \in \triangle\} = \triangle_1 \cup \ldots \cup \triangle_n$, donde los $\triangle_i$ son n discos alrededor de $y_i(z)$, con $i = 1, \ldots, n$, respectivamente. Así construimos un espacio cubriente $\pi : S_0 \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ - {un número finito de puntos}, el cual tiene una estructura única de 1-variedad compleja que hace que π sea un morfismo holomorfo. Si $\triangle'$ es un disco agujerado alrededor de uno de los puntos excluidos y si $\triangle'_0 \subset \pi^{-1}\triangle'$ es una componente conexa, entonces el grupo fundamental de $\triangle'_0$ es un subgrupo del grupo fundamental de $\triangle'$:

$$\pi_1(\triangle'_0, x_0) \hookrightarrow \pi_1(\triangle', \pi(x_0)) \cong \mathbb{Z}.$$

Luego $\pi_1(\triangle'_0, x_0) \cong r\mathbb{Z}$ para algún $r \geq 1$, esto es, podemos completar $\triangle'_0$ a un disco $\triangle_0$, de tal manera que la aplicación $\pi|_{\triangle_0} : \triangle_0 \to \triangle$ sea $z \mapsto z^r$ y coincida con π en $\triangle'_0$ (este resultado se llama el teorema de extensión de Riemann). Así se construye una superficie de Riemann compacta S y una función meromorfa $\pi : S \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ de grado n ([G-M]). A los puntos $z \in S$ tales que π localmente es de la forma $z \mapsto z^r$, con $r > 1$, se les llama puntos de ramificación de π de orden r.

¿Quién es S topológicamente? Una superficie de Riemann compacta es una superficie topológica compacta. Como el determinante del Jacobiano (visto como función $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) de una función holomorfa f es $|f'(z)|^2$, se sigue que la superficie topológica es orientable y el teorema de clasificación para superficies topológicas compactas [S], nos dice que una superficie de éstas es homeomorfa a una esfera con asas; siendo el número de asas el invariante topológico g, que se llama el género.

Fórmula de Riemann-Hurwitz

Si $f : \widetilde{C} \to C$ es un morfismo entre superficies de Riemann compactas de grado n, que se ramifica en $p_1, \ldots, p_s$; con índice de ramificación $e_1, \ldots, e_s$, respectivamente. (En coordenadas locales para p y $f(p)$, f se expresa como $z \mapsto w = z^e g(z)$, con $g(0) \neq 0$ y $e \geq 1$; el número e no depende de las coordenadas y se llama el índice de ramificación. Si $e > 1$ se dice que f ramifica en p; claramente el conjunto de puntos de ramificación es discreto.) Entonces se tiene que

$$\widetilde{g} = n(g-1) + 1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}(e_i - 1).$$

Esto se demuestra triangulando C de tal manera que entre los vértices de la triangulación estén los puntos $f(p_1), \ldots, f(p_s)$. Podemos levantar la triangulación a $\widetilde{C}$; observamos que por cada 2-simplejo hay arriba n 2-simplejos y lo mismo vale para las aristas. El número de vértices disminuye en $\sum_{i=1}^{s}(e_i - 1)$. Entonces se tiene:

$$\chi(\widetilde{C}) = n\chi(C) - \sum_{i=1}^{s}(e_i - 1),$$

esto es,

$$2 - 2\widetilde{g} = n(2 - 2g) - \sum_{i=1}^{s}(e_i - 1)$$

Veamos ahora qué estructura adicional tiene una superficie de Riemann compacta S.

Las diferenciales holomorfas. Esta es la gavilla ω_S de secciones del fibrado cotangente $\Im_S^\vee$ de S. Localmente son los objetos de la forma $f(z)dz$, con $f(z)$ holomorfa y que se modifican al cambiar coordenadas de acuerdo a la siguiente regla:

Si $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ y $\varphi_\beta : U_\beta \to \mathbb{C}$ son cartas coordenadas de S y $g_{\alpha\beta} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es el cambio de coordenadas, entonces $h_\alpha(z_\alpha)dz_\alpha$, $h_\beta(z_\beta)dz_\beta$ definen una diferencial holomorfa en $U_\alpha \cap U_\beta \subset Z$ si siempre que

$$h_\alpha(z_\alpha) = h_\beta(g_{\alpha\beta}(z_\alpha))g'_{\alpha\beta}(z_\alpha)$$

ó bien

$$h_\beta(z_\beta) = \frac{1}{g'_{\alpha\beta}(z_\alpha)} h_\alpha(z_\alpha).$$

Es decir, son secciones del fibrado en rectas con funciones de transición $\{\frac{1}{g'_{\alpha\beta}(z_\alpha)}\}$.

ω_S es una gavilla de $\mathcal{O}_S$-módulos localmente libre de rango 1, esto es, una gavilla invertible. Esta gavilla es un objeto que depende de la estructura analítica de S.

A continuación mencionaremos dos de los teoremas más importantes de la teoría de las superficies de Riemann compactas.

Sea $\mathcal{L}$ una gavilla invertible en S, esto es, $\mathcal{L}$ es un $\mathcal{O}_S$-módulo localmente libre de rango 1. Definimos el grado de $\mathcal{L}$ como el grado del divisor $D = (s)$ donde s es una sección meromorfa de $\mathcal{L}$; esto es, $d = gr\mathcal{L} = grD = gr(s)_0 - gr(s)_\infty$. Observemos que $\mathcal{L} = \mathcal{O}_S(D)$.

Un resultado general [H] es que la cohomología de una gavilla invertible $\mathcal{L}$ sobre una variedad proyectiva es de dimensión finita, esto es $h^i(\mathcal{L})= dim_{\mathbb{C}}H^i(S, \mathcal{L})$ son finitos, $i = 0, 1$. Más aún, satisface la siguiente relación:

Teorema de Riemann-Roch:

$$h^0(\mathcal{L}) = d - g + 1 + h^1(\mathcal{L}).$$

Un resultado adicional que mencionaremos es:

Teorema de dualidad de Serre $[GZ]$. *Existe un isomorfismo canónico*

$$H^0(S, \omega_S \otimes \mathcal{L}^{-1}) \cong H^1(S, \mathcal{L})^*.$$

El punto de vista clásico es: si $\mathcal{L} = \mathcal{O}_S(D)$; entonces se identifica

$$H^0(S, \mathcal{L}) = \{f : S \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} \text{ meromorfa, tal que } (f) + D \geq 0 \}$$

y

$$H^1(S,\mathcal{L}) \cong H^0(S,\omega_S(-D)) = \{w \in H^0(S,\omega_S), \text{ tal que } (w) \geq D\}.$$

Apliquemos ahora los dos resultados anteriores. Como S es compacta, si f es una función meromorfa de S, entonces $gr(f) = 0$, esto es, $gr\mathcal{O}_S = 0$. También de la compacidad se sigue que $h^0(\mathcal{O}_S) = 1$. Entonces tenemos:

$$h^0(\mathcal{O}_S) = gr\mathcal{O}_S - g + 1 + h^1(\mathcal{O}_S)$$

esto es

$$1 = 0 - g + 1 + h^0(\omega_S)$$

luego se tiene que

$$h^0(\omega_S) = g$$

Aplicando de nuevo la fórmula se tiene:

$$h^0(\omega_S) = gr\omega_S - g + 1 + h^1(\omega_S)$$

esto es

$$g = gr\omega_S - g + 1 + h^0(\mathcal{O}_S)$$

entonces

$$gr(\omega_S) = 2g - 2.$$

Esto es, una diferencial holomorfa en S tiene $2g-2$ ceros si $g \geq 1$ (contados propiamente) y existen g diferenciales abelianas linealmente independientes. Esto nos da una relación sorprendente entre la estructura topológica y la estructura holomorfa de S.

Unas observaciones que necesitamos son las siguientes:

1. Si s_1 y s_2 son dos secciones holomorfas de la gavilla invertible $\mathcal{L}$, entonces $f = s_1/s_2$ es una función meromorfa. Si $D_1 = (s_1)$ y $D_2 = (s_2)$; entonces se dice que D_1 y D_2 son linealmente equivalentes, ya que $D_1 - D_2 = (f)$. Se dice linealmente por que podemos pasar de D_1 a D_2 por medio de un parámetro lineal $(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, ver [DA].

2. Si en S existe una gavilla invertible $\mathcal{L}$ tal que $gr\mathcal{L}= 1$ y $h^0(\mathcal{L}) = 2$; entonces S es isomorfa a la esfera de Riemann $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

   Demostración: Sean $s_1, s_2 \in H^0(S, \mathcal{L})$ dos secciones linealmente independientes; entonces consideramos la función meromorfa $p \mapsto s_1(p)/s_2(p)$, la cual es de grado 1 y no constante, luego induce un isomorfismo
$$S \xrightarrow{\cong} \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Consideramos la función meromorfa $f : S \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ definida como $p \mapsto (s_1(p); s_2(p))$; entonces $D_1 = f^{-1}(0) = f^{-1}(0;1)$, $D_2 = f^{-1}(\infty) = f^{-1}(1;0)$ y pasamos de D_1 a D_2 moviéndonos en la familia $D_{(\lambda,\mu)} = f^{-1}(\lambda, \mu)$ parametrizada por $(\lambda; \mu) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Al conjunto $\{D_{(\lambda,\mu)}, (\lambda, \mu) \in f^{-1}(\lambda, \mu)\}$ le llamamos el sistema lineal de divisores definido por $\langle s_1, s_2\rangle \subset H^o(S, \mathcal{L})$ y le llamamos un g^1_r (donde $r = gr\mathcal{L}$).

Estamos ya en condiciones de definir la aplicación canónica de S. Elegimos una base $w_1, \ldots, w_g$ de $H^0(S, \omega_S)$ y definimos la aplicación canónica como

$$\begin{aligned} \varphi : S &\to \mathbb{P}^{g-1} \\ p &\mapsto (w_1(p); \ldots; w_g(p)) \end{aligned}$$

esto es, $\varphi(p) = (f_1(\varphi_\alpha(p)), \ldots, f_g(\varphi_\alpha(p)))$ donde $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ es una coordenada local en p y $w_i = f_i(z_\alpha)dz_\alpha$, $i = 1, \ldots, g$; en esta coordenada. Si cambiamos de coordenada, entonces tenemos que

$$\varphi(p) = (h_1(\varphi_\beta(p))g'_{\alpha\beta}(\varphi_\beta(p)), \ldots, h_g(\varphi_\beta(p))g'_{\alpha\beta}(\varphi_\beta(p)))$$

donde $w_i = h_i(z_\beta)dz_\beta$ en las nuevas coordenadas. Como $g'_{\alpha\beta}$ nunca toma el valor cero, se sigue que φ está bien definida en coordenadas proyectivas.

Esta función φ no está bien definida en los puntos $p \in S$ tales que $w_1(p) = \ldots = w_g(p) = 0$. Veamos que por Riemann-Roch esto no puede pasar si $g \geq 1$.

Si existe $p \in S$ tal que es un cero común de los elementos de una base de las diferenciales abelianas, entonces es un cero de cualquier diferencial abeliana, esto es:

$$\begin{aligned} h^0(S,\omega_S) &= dim_{\mathbb{C}} H^0(S,\omega_S) \\ &= dim_{\mathbb{C}}\{w \in H^0(S,\omega_s) : w(p)=0\} = h^0(S,\omega_s(-p)). \end{aligned}$$

Esto es, $g = 2g-3-g+1+h^0(\mathcal{O}_S(p))$, de donde $h^0(\mathcal{O}_S(p)) = 2$, entonces $g=0$ (observación 1).

De lo anterior se sigue que para todo $p \in S$, $h^0(\omega_S(-p)) \leq g-1$ si $g \geq 1$. Riemann-Roch nos dice que

$$h^0(\omega_S(-p)) = g-2+h^1(\omega_S(-p))$$

y por dualidad de Serre sabemos que

$$h^1(\omega_S(-p)) = h^0(\mathcal{O}(p))$$

y de nuevo, observando que $h^0(\mathcal{O}(p)) = 1$ si $g \geq 1$, tenemos que:

$$h^0(\omega_S(-p)) = g-1 \quad si \quad g \geq 1 \, .$$

Una vez definido el morfismo canónico

$$\varphi : S \to \mathbb{P}^{g-1}$$

nos preguntamos si es inyectivo y si su imagen es lisa.

Antes de esto, observemos que nuestro morfismo puede ser definido de manera intrínseca (esto es sin recurrir a una base):

$$\begin{aligned} \varphi : S &\to \mathbb{P}(H^0(S,\omega_s)^\vee) \\ p &\mapsto \{w \in H^0(S,\omega_s) : w(p) = 0\} \, . \end{aligned}$$

Usaremos esta definición para estudiar la inyectividad de nuestro morfismo:

$\varphi(p) = \varphi(q) \Leftrightarrow$

$$\{w \in H^0(S,\omega_s) : w(p)=0\} = \{w \in H^0(S,\omega_s) : w(q)=0\}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \{w \in H^0(S,\omega_s) : w(p)=0\} \\ &\quad = \{w \in H^0(S,\omega_s) : w(p)=w(q)=0\} \\ &\Leftrightarrow h^0(\omega(-p-q)) = g-1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow h^0(\mathcal{O}(p+q)) = 2.$$

Esto es, si y sólo si existe una función meromorfa $S \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ de grado 2. Esta condición hace a nuestra curva "especial"si $g \geq 3$.

Si en la construcción de las primeras páginas consideramos nuestra curva plana como

$$F(x,y) = y^2 - \prod_{i=1}^{2g+2}(x-\lambda_i) = 0\ ;$$

entonces la superficie de Riemann asociada S tiene una función meromorfa $f: S \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ ramificada en $2g+2$ puntos y se sigue de la fórmula de Riemann-Hurwitz que el género de S es g.

Esta construcción depende de $2g-1$ parámetros, pues cada colección $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2g+2}$ nos define una, pero si movemos toda la esfera de Riemann, obtenemos esencialmente la misma curva y como $PGL(1,\mathbb{C})$ depende de 3 parámetros, se obtiene $2g-1$. Estas curvas se llaman hiperelípticas y como las curvas dependen de $3g-3$ parámetros (cuando $g>1$) ([C] pág. 145), se sigue que para $g \geq 3$ las curvas hiperelípticas son especiales.

Volviendo a la aplicación canónica, supondremos que nuestra curva C es de género $g \geq 3$ y que no es hiperelíptica. Entonces tenemos un morfismo inyectivo:

$$\varphi : C \to \mathbb{P}^{g-1}$$

para demostrar que es un encaje basta demostrar que es inyectivo infinitesimalmente, esto es, que a nivel de espacios tangentes es inyectivo. Esto equivale a decir que no "colapsa vectores tangentes", esto es, no puede pasar que $h^0(C,\omega_C(-p)) = h^0(C,\omega_C(-2p))$. Esto se puede ver identificando como antes $H^0(C,\omega_C(-p)) = \{\omega \in H^0(C,\omega_C) : \omega(p) = 0\}$ y tomando la base $\omega_1, ..., \omega_g$ de $H^0(C,\omega_C)$ de tal manera que $\omega_1, ..., \omega_{g-1} \in H^0(C,\omega_C(-p))$; entonces ϕ en esta base, en el abierto afin $x_g \neq 0$ de $\mathbb{P}^{g-1}$ y en la coordenada local z en p se escribe como:

$$z \mapsto (a_1^{(1)}z + a_2^{(1)}z^2 + ..., ..., a_1^{(g-1)}z + a_2^{(g-1)}z^2 + ...)$$

donde $\omega_i/\omega_g = a_1^{(i)}z + a_2^{(i)}z^2 + ...$ De aquí se sigue que:

$$(a_1^{(1)}, ..., a_1^{(g-1)}) = (d\phi)_p \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a_1^{(i)} \neq 0 \text{ para alguna } i \in \{1, ..., g-1\}$$
$$\Leftrightarrow p_i \notin H^0(C, \omega_C(-2p)) \text{ para alguna } i \in \{1, ..., g-1\}$$
$$\Leftrightarrow H^0(C, \omega_C(-2p)) \not\subseteq H^0(C, \omega_C(-p)) \ .$$

Y de nuevo ésto no pasa porque estamos suponiendo que C no es hiperelíptica. Esto es, hemos visto que

$$\varphi : S \to \mathbb{P}^{g-1}$$

identifica a S con una curva proyectiva lisa. Esto demuestra que toda superficie de Riemann es una curva algebraica.

¿Cuál es el grado de nuestra curva? Tenemos que calcular el grado del divisor $H.S$ donde H es un hiperplano. Observemos que $H = \{\sum_{i=1}^g \lambda_i x_i = 0\}$ donde $(x_1; \ldots; x_g)$ son las coordenadas de $\mathbb{P}^{g-1}$; entonces

$$H \cap S = \{p \in S : \sum_{i=1}^{g} \lambda_i w_i(p) = 0\} \ ,$$

esto es,

$$H.S = (\sum_{i=1}^{g} \lambda_i w_i)$$

y el divisor de toda diferencial abeliana es de grado $2g-2$. Esto demuestra dos cosas:

1. S no está contenida en ningún hiperplano.
2. El grado de S como curva proyectiva es $2g-2$.

Ejemplos:

$\underline{g=3}$: $C \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ es una curva plana lisa de grado 4,

$$\{ \sum_{i+j+k=4} a_{ijk} x^i y^j z^k = 0\}$$

Habíamos dicho que una curva general de género g depende de $3g-3$ parámetros, que en nuestro caso es 6. Esto de alguna manera debe de reflejarse en las curvas planas de grado 4 ya que nuestra construcción es canónica. Veamos que es así:

Usando una formula clásica ([H]), se sabe que el género de una cuártica plana lisa C es igual a 3. Del teorema de Bezout se sigue que las formas lineales $\{\sum_{i=1}^{3}\lambda_i x_i\}$ cortan a C en divisores de grado 4, esto es, estas formas lineales son secciones de un gavilla $\mathcal{L}$ en C tal que $gr\mathcal{L} = 4$ y $h^0(C, \mathcal{L}) \geq 3$. Del teorema de Riemann-Roch se sigue que la única posibilidad es $\mathcal{L} = \omega_C$ y C no hiperelíptica, esto es, toda cuártica plana no singular es una curva canónica de género 3. De lo anterior se sigue que las clases de isomorfismo de curvas de género 3 no hiperelípticas, están en correspondencia biunívoca con las clases de cuárticas planas no singulares módulo equivalencia proyectiva.

Como el espacio vectorial $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_4$ de polinomios homogéneos de grado 4 en tres variables es de dimensión 15 ($dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]_r = \binom{n-1+r}{r}$) se tiene que las cuárticas planas dependen de 14 parámetros y como $dim_{\mathbb{C}}PGL(3, \mathbb{C}) = 8$, obtenemos que las clases de cuárticas planas módulo equivalencia proyectiva dependen de $14-8 = 6$ parámetros.

$\underline{g=4}$: $C \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ es una curva de grado 6.
Como $6 = 2.3$ nos preguntamos si $C = Q.C$, donde Q es una superficie de grado 2 y C una superficie de grado 3.

Para estudiar si existen hipersuperficies $V \subset \mathbb{P}^{g-1}$ de grado n que contienen a la curva canónica $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$, se tiene la aplicación $\mathbb{C}$-lineal:

$$\gamma_n : Sym^n H^0(C, \omega_C) \to H^0(C, \omega_C^{\otimes^n})$$

inducida por

$$w_{i_1} \otimes \cdots \otimes w_{i_n} \mapsto w_{i_1} \cdots w_{i_n}$$

la cual es suprayectiva (este resultado se llama el teorema de M. Noether, ver [$ACGH$]). Si denotamos por $I_n = ker\gamma_n$, se tiene la sucesión exacta de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales:

$$0 \to I_n(C) \to Sym^n H^0(C, \omega_C) \to H^0(C, \omega_C^{\otimes^n}) \to 0$$

Un elemento $F \in Sym^n H^0(C, \omega_C)$ es una forma homogénea de grado n en las coordenadas de $\mathbb{P}^{g-1} = \mathbb{P}(H^0(C, \omega_C)^\vee)$, esto es, $\{F = 0\} \subset \mathbb{P}^{g-1}$ es una hipersuperficie de grado n. $\gamma(F)$ es una diferencial de orden n

(es decir, una sección global de la gavilla $\omega_C^{\otimes^n}$) en C y su divisor de ceros es el divisor de intersección $\{F = 0\}.C$, entonces si $\gamma(F) = 0$ quiere decir que $\{F = 0\}$ no corta ningún divisor en C, esto es, $C \subset \{F = 0\}$.

Entonces, calculando $dim_{\mathbb{C}} I_n$ sabremos cuántas hipersuperficies en $\mathbb{P}^{g-1}$ de grado n linealmente independientes contienen a la curva C, y esto lo podemos hacer ya que si $\mathcal{W}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita g, entonces:

$dim_{\mathbb{C}} Sym^d(\mathcal{W}) = \binom{g-1+d}{g-1}$

y

$dim_{\mathbb{C}} H^0(C, \omega_C^{\otimes^n}) = (n-1)(2g-2)$.

Volviendo al caso $g = 4$, se tiene que $dim_{\mathbb{C}} I_2 = 1$, esto es, $I_2 = \langle \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j \rangle$, lo que dice que existe una única superficie cuádrica $Q = \{\sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j = 0\} \subset \mathbb{P}^3$ que contiene a la curva canónica. Para ver que existe alguna superficie cúbica $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^3$ tal que $C = Q.\mathcal{C}$, calculamos $dim_{\mathbb{C}} I_3 = 5$ y como $\{Q \cdot (\sum_{i=0}^{3} \lambda_i x_i)\} \subseteq I_3$ tiene $dim_{\mathbb{C}}\{\} = 4$, sabemos que existe $\mathcal{C} \neq Q.H$ (H es un plano) tal que $\mathcal{C} \supset C$, esto es, $C = Q.\mathcal{C}$. Obsérvese que $\mathcal{C}$ no es única.

$\underline{g = 5}$: Nuestra curva canónica $C \subset \mathbb{P}^4$ es de grado 8, entonces nos preguntamos si existen Q_1, Q_2 y Q_3 hipersuperficies cuadráticas tales que $C = Q_1.Q_2.Q_3$. Esto es inmediato de nuestras cuentas ya que $dim_{\mathbb{C}} I_2 = 3$ y de que la curva general C de grado 5 no es trigonal, i.e. no tiene un morfismo $C \to \mathbb{P}^1$ de grado 3 (ver [$ACGH$]).

$\underline{g = 6}$: Ahora se tiene $C \subset \mathbb{P}^5$ de grado 10=2.5, así que ya no podemos esperar que sea de intersección completa, recordando que una variedad $V \subseteq \mathbb{P}^n$ de codimensión r se llama de intersección completa si su ideal homogéneo $I(V) \subset \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ está generado por r polinomios, i.e. $I(V) = (f_1, ..., f_r)$, en este caso se tiene que grado$(V) = \prod_{i=1}^{r} gr(f_i)$.

En general, dada una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^N$, ésta está definida por un ideal homogéneo $I(X) \subset \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_N]$, esto es, $I(X) = \{f \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_N]$ homogéneos tales que $f(x) = 0$ para toda $x \in X\}$.

Volviendo a nuestra curva canónica $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$, $g \geq 4$, nos interesa saber quién es el ideal $I(C)$ que la define. Como el anillo de polinomios es Noetheriano, es claro que $I(C) = (I_2(C), I_3(C), \ldots, I_n(C))$ para algún n, lo sorprendente de esto es el siguiente resultado:

Teorema (Petri): $I = (I_2(C))$ excepto cuando C es una curva trigonal o cuando C es una quíntica plana, en estos casos $I = (I_2(C), I_3(C))$.

Nota: Trigonal quiere decir que la curva C tiene una función meromorfa $C \to \mathbb{P}^1$ de grado 3 y al igual que las curvas hiperelípticas, si $g \geq 5$ son curvas especiales.

Quíntica plana es cuando existe una función $C \to \mathbb{P}^2$ cuya imagen es una curva plana de grado 5, y estas curvas son especiales para $g \geq 7$.

Pero $I_2(C)$ tiene una interpretación más profunda. El toro complejo $JC = H^0(C, \omega_C)^\vee / H_1(C, \mathbb{Z})$ (donde $H_1(C, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^0(C, \omega_C)^\vee$ vía $\alpha \mapsto \int_\alpha$) tiene una polarización principal natural dada por el producto de intersección en $H_1(C, \mathbb{Z})$. A esta variedad abeliana principalmente polarizada se le llama la Jacobiana de C, ver [Hi].

Teorema (Torelli): Si $JC \cong JC'$ como variedad abeliana principalmente polarizada; entonces $C \cong C'$.

Este teorema nos da una función inyectiva

$$j : \mathcal{M}_g \to \mathcal{A}_g$$

donde $\mathcal{M}_g$ = móduli de curvas de género g y $\mathcal{A}_g$= móduli de variedades abelianas principalmente pilarizadas de dimensión g.

Se sabe que $dim \mathcal{M}_g = 3g - 3$ y que $dim \mathcal{A}_g = \frac{1}{2}g(g+1)$, más aún, si $[C] \in \mathcal{M}_g$ es un punto liso, $T_{[C]}\mathcal{M}_g \cong H^0(C, \omega_C^{\otimes 2})$ y si $[A] \in \mathcal{A}_g$ es un punto liso; entonces $T_{[A]}\mathcal{A}_g = Sym^2 H^0(A, \Omega_A)$. Se tiene la siguiente proposición para curvas C no trigonales o quínticas planas:

Proposición: La aplicación $\gamma_2 : Sym^2 H^0(C, \omega_C) \to H^0(C, \omega_C^{\otimes 2})$ es la codiferencial de la aplicación $j : \mathcal{M}_g \to \mathcal{A}_g$ en el punto $[C] \in \mathcal{M}_g$.

Esto es:

Corolario: $I_2(C) \hookrightarrow Sym^2 H^0(C, \omega_C)$ son las ecuaciones infinitesimales de $j(\mathcal{M}_g)$ en $\mathcal{A}_g$ en el punto $[JC]$.

Referencias.

[C] Clemens, H. *A Scrapbook of Complex Curve Theory.* The University Series in Mathematics, Plenum Press, New York (1980).

[DA] del Angel, P. *Divisores.* En este volumen.

[G-Z] García Zamora, A. *El teorema de Riemann-Roch para curvas.* En este volumen.

[H] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry.* GTM 52, Springer–Verlag (1977).

[Hi] Hidalgo, L. *Una introducción a las variedades abelianas.* En este volumen.

[S] Springer, G. *Introduction to Riemann surfaces.* Addison - Wesley, (1957).