



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**Transformaciones afines del plano y su aplicación en la
construcción de superficies topológicas**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MATEMÁTICO**

**PRESENTA
ROBERTO GUTIÉRREZ SOTO**

ASESORES DE TESIS

DR. ENRIQUE CASTAÑEDA ALVARADO

DR. JESÚS RUPERTO MUCIÑO RAYMUNDO



TOLUCA, MÉXICO, ABRIL 2019

Dedicado a mis padres:

*Benigno Gutiérrez Osorio y
Remedios Soto Morales.*

*Existen en el mundo muchos genios,
por alguna razón no pudieron brillar.*

AGRADECIMIENTOS

A mis padres, Benigno Gutiérrez Osorio y Remedios Soto Morales, por todo el apoyo que me han brindado para cumplir este objetivo.

A mis asesores de tesis, el Dr. Enrique Castañeda Alvardo (UAEM) y el Dr. Jesús Ruperto Muciño Raymundo (UNAM) por brindarme su apoyo, tiempo en este trabajo y por sus consejos para ser mejor matemático.

A las personas que me ayudaron a revisar este trabajo, la Dra. Anel Esquivel Navarrete y al M. en C. José Antonio Martínez Cortez.

A todas las personas que me ayudaron y apoyaron para realizar este trabajo, en especial a la mujer que más quiero Areli Peña Delgado.

Índice general

1 Geometría en el plano cartesiano	12
1.1 Transformaciones del plano y su diferencial	12
1.2 Breve estudio de ángulos	14
1.3 Breve estudio de área	20
1.4 Breve estudio de orientación	24
1.5 Breve estudio de rectas y distancias	24
2 Grupos de transformaciones	28
2.1 Traslaciones	28
2.2 Rotaciones	30
2.3 Reflexiones	34
2.4 Transformaciones ortogonales	38
2.5 Isometrías	39
2.6 Transformaciones lineales	44
2.7 Transformaciones afines	47
3 Superficies	52
3.1 Nociones elementales	52
3.2 Superficies topológicas	56
3.3 Superficies topológicas con frontera	61
3.4 Ensamblado de triángulos	67
3.5 Construcción de superficies topológicas a partir de un cuadrado	75

Notación

- \mathbb{R}^2 es el plano cartesiano.
- \mathbb{R}^n es el producto cartesiano de dimensión n .
- $\|(x, y)\|$ es la norma del vector (x, y) .
- $\bar{0} = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ es el origen del plano cartesiano.
- $D(p, r) \subset \mathbb{R}^n$ es el disco abierto con centro en p y radio $r \in \mathbb{R}^+$.
- $\partial A \subset \mathbb{R}^n$ es el conjunto frontera de A .
- $d((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ es la distancia del punto (x_1, y_1) al punto (x_2, y_2) .
- τ_u es la topología usual de \mathbb{R}^n .
- τ_S es la topología inducida en $S \subset \mathbb{R}^n$ por la τ_u .
- τ_c es la topología cociente de algún espacio cociente X/\sim , con \sim una relación de equivalencia.
- $\mathbf{u} = (u_1, u_2), \mathbf{v} = (v_1, v_2), \mathbf{w} = (w_1, w_2)$ son vectores en \mathbb{R}^2 .
- $p_0 = (x_0, y_0), p_1 = (x_1, y_1), p_i = (x_i, y_i)$ son puntos en \mathbb{R}^2 .
- $T_{p_0}\mathbb{R}^2$ es el espacio tangente a \mathbb{R}^2 en el punto p_0 .
- (p_0, \mathbf{u}) es un vector tangente en el espacio tangente $T_{p_0}\mathbb{R}^2$.
- $proj_{\mathbf{u}}\mathbf{w} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u}$ es la proyección del vector \mathbf{w} sobre el vector \mathbf{u} .

Introducción

En matemáticas es natural el estudio de las transformaciones del plano en sí mismo. Por transformación del plano entendemos una aplicación biyectiva de clase C^1 , es decir, una aplicación continua con primeras derivadas parciales continuas. El hecho de que una transformación sea biyectiva, nos permite hablar de su transformación inversa.

Los conceptos iniciales de esta tesis son:

- i) *ángulos*,
- ii) *área*,
- iii) *orientación*,
- iv) *rectas* y
- v) *distancia*.

Estos cinco conceptos matemáticos son bien conocidos, todos ellos se estudian en la geometría euclíadiana.

En este trabajo brindamos un estudio de dos objetos abstractos, estos son:

- *grupos de transformaciones de \mathbb{R}^2* y
- *superficies topológicas con o sin frontera*.

En primer lugar, recordamos que un conjunto G de transformaciones del plano en sí mismo posee una estructura de *grupo* con la operación composición si cada vez que hacemos la composición de dos transformaciones en G , obtenemos una transformación que también está en G y la inversa de cualquier transformación de G , también está en G . Esta estructura de grupo, obliga a la transformación identidad estar en G .

Podemos pensar en un grupo de transformaciones de \mathbb{R}^2 como un “*objeto abstracto cerrado*”, esto es, podemos realizar operaciones con sus elementos

(bajo la composición) y nunca salirnos de él.

El grupo de transformaciones afines de \mathbb{R}^2 es

$$Afin(\mathbb{R}^2) = \{\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid \phi(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{v}, \quad A \in GL(2, \mathbb{R}), \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2\}.$$

De este grupo distinguimos el siguiente resultado.

Teorema 2.7.4 *Las transformaciones afines mandan triángulos de área no cero, en triángulos de área no cero.*

En segundo lugar, recordamos que un conjunto S con una topología es un espacio topológico. Para construir la definición de superficie topológica, introducimos los siguientes tres conceptos:

- i) espacio topológico de Hausdorff,
- ii) base numerable de abiertos para una topología y
- iii) espacio topológico localmente homeomorfo a \mathbb{R}^2 .

Estos tres conceptos son bastante conocidos en topología. Es importante resaltar dos cosas.

Primera. Para construir la definición de superficie topológica con frontera, pedimos que el espacio topológico que consideremos sea localmente homeomorfo a \mathbb{R}^2 o a

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \mid 0 \leq y\} \subset \mathbb{R}^2,$$

este último es el semiplano superior.

Segunda. Construimos superficies topológicas con o sin frontera “ensamblando” triángulos. Ello se precisa con los siguientes dos resultados.

Lema 3.4.2 De ensambladura para aristas. Consideramos dos triángulos Δ_1, Δ_2 en \mathbb{R}^2 y una relación de equivalencia \sim que identifica dos aristas, $a_\alpha \subset \Delta_1$ con $a_\beta \subset \Delta_2$. Entonces el conjunto de clases de equivalencia

$$\frac{\Delta_1 \coprod \Delta_2}{\sim} \doteq S,$$

con la topología cociente es una superficie topológica con frontera.

Lema 3.4.3 De ensambladura para vértices. Consideramos una colección de triángulos Δ_α en \mathbb{R}^2 , $n \geq 3$ y una relación de equivalencia \sim que identifica $2n$ aristas tal que el ensamblado de los n triángulos es como muestra la Figura 1. Entonces el conjunto de clases de equivalencia

$$\frac{\coprod_{\alpha=1}^n \Delta_\alpha}{\sim} \doteq S,$$

con la topología cociente es una superficie topológica con frontera.

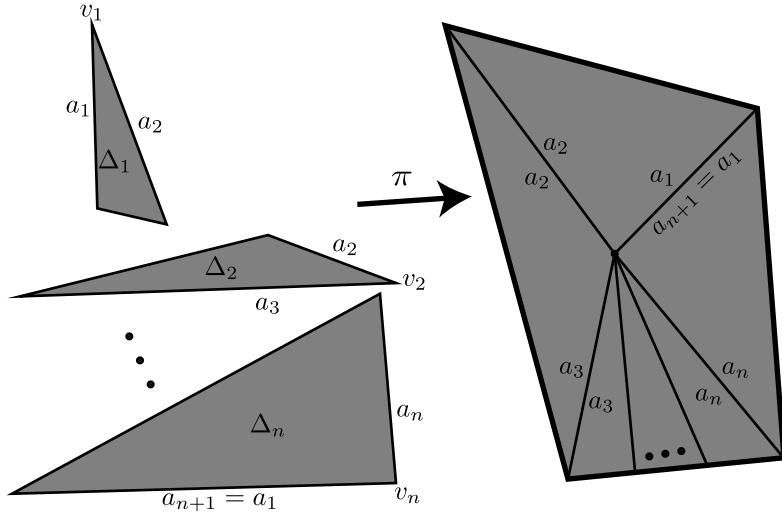


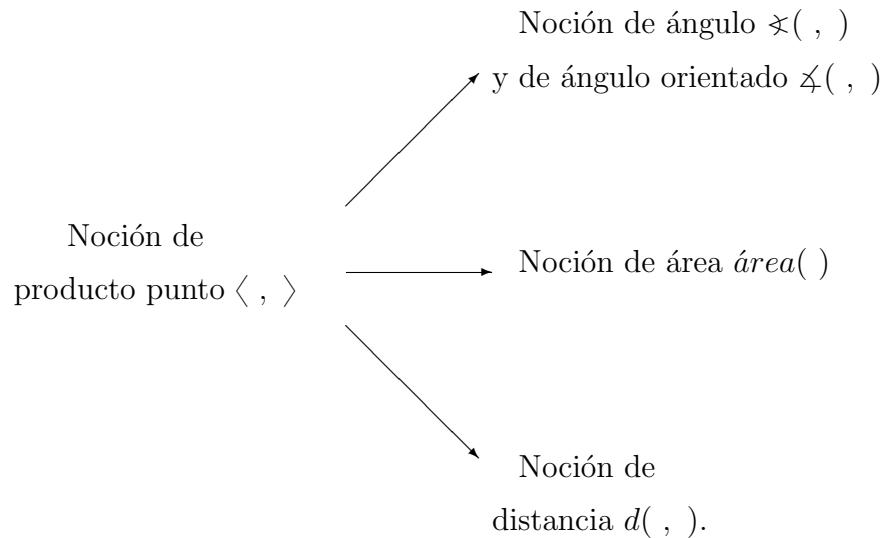
Figura 1: Ensamblado de $n \geq 3$ triángulos.

Una aplicación de las transformaciones afines es la construcción de superficies topológicas ensamblando triángulos. El Teorema 2.7.4 es usado para demostrar los dos lemas anteriores.

Estructura de la tesis.

En el Capítulo 1 estudiamos algunas propiedades necesarias para que una transformación de \mathbb{R}^2 preserve ángulos, área, orientación, rectas y/o distancias.

Como resumen, el siguiente diagrama muestra que *si una transformación τ preserva el producto punto, entonces τ preserva ángulos, área y distancia*, ello es consecuencia de la siguiente dependencia de los conceptos:



En el Capítulo 2 estudiamos los grupos de:

- *transformaciones rígidas, también llamadas isometrías,*
- *transformaciones lineales y*
- *transformaciones afines.*

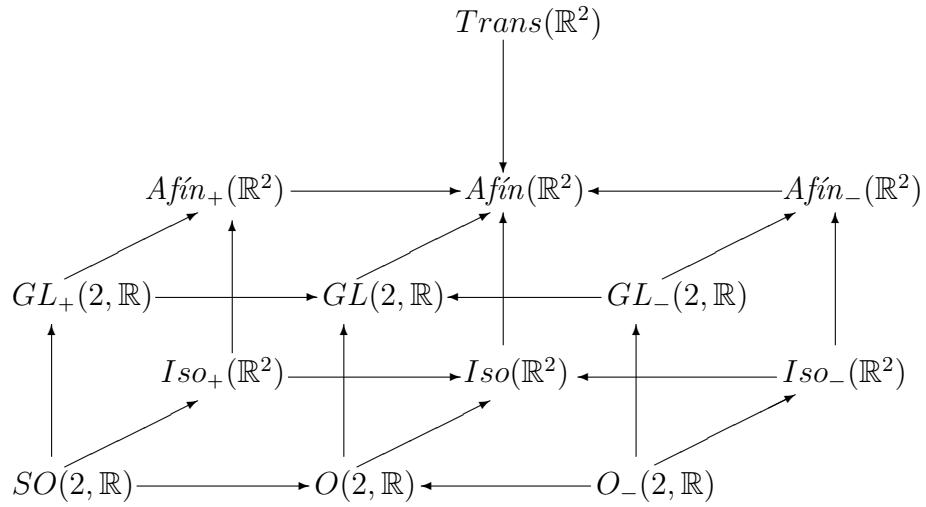
Adicionalmente aparecen subgrupos de los tres grupos anteriores y reconocemos algunos conjuntos de transformaciones de \mathbb{R}^2 que no poseen la estructura de grupo, por ejemplo el conjunto de reflexiones.

Como resumen, la siguiente tabla muestra todos los conjuntos estudiados en el Capítulo 2 y las propiedades que cada uno de ellos satisface.

notación	grupo/ connm.	Se preserva;					
		distan- cias	ángulos	áreas	líneas rectas	el origen	orienta- ción
$Trans(\mathbb{R}^2)$	✓/✓	✓	✓	✓	✓	✗	✓
$SO(2, \mathbb{R})$	✓/✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$O_-(2, \mathbb{R})$	✗/✗	✓	✓	✓	✓	✓	✗
$O(2, \mathbb{R})$	✓/✗	✓	✓	✓	✓	✓	✗
$Iso(2, \mathbb{R})$	✓/✗	✓	✓	✓	✓	✗	✗
$Iso_+(2)$	✓/✗	✓	✓	✓	✓	✗	✓
$Iso_-(2, \mathbb{R})$	✗/✗	✓	✓	✓	✓	✗	✗
$GL(2, \mathbb{R})$	✓/✗	✗	✗	✗	✓	✓	✗
$GL_+(2, \mathbb{R})$	✓/✗	✗	✗	✗	✓	✓	✓
$GL_-(2, \mathbb{R})$	✗/✗	✗	✗	✗	✓	✓	✗
$Afín(\mathbb{R}^2)$	✓/✗	✗	✗	✗	✓	✗	✗
$Afín_+(\mathbb{R}^2)$	✓/✗	✗	✗	✗	✓	✗	✓
$Afín_-(\mathbb{R}^2)$	✗/✗	✗	✗	✗	✓	✗	✗

Naturalmente, la “✗” en la tabla significa que las transformaciones del conjunto no preservan dicha propiedad y “connm” es abreviación de grupo conmutativo.

Adicionalmente, el siguiente diagrama muestra las contenciones de los grupos y conjuntos que aparecen en la tabla anterior. Para representar que $G \subseteq H$ en el diagrama, usamos que $G \longrightarrow H$.



En el Capítulo 3 estudiamos algunas superficies topológicas con o sin frontera. Mostramos algunos ejemplos de estos objetos, así como también damos algunos espacios topológicos que no satisfacen una de las propiedades de la definición de superficie topológica. Finalmente construimos superficies topológicas a partir de un cuadrado, estas superficies topológicas son: *el cilindro, la banda de Möbius, la esfera, el toro, el plano proyectivo y la botella de Klein.*

Capítulo 1

Geometría en el plano cartesiano

En este capítulo describimos cuando una transformación del plano cartesiano \mathbb{R}^2 en si mismo preserva los siguientes conceptos matemáticos: *ángulo*, *área*, *orientación*, *recta* y *distancia*.

1.1. Transformaciones del plano y su diferencial

En todo el texto, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ denotan vectores de \mathbb{R}^2 . Adicionalmente, $p_0 = (x_0, y_0)$, $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_i = (x_i, y_i)$, $i \in \mathcal{I}$ un conjunto de índices, denotan puntos de \mathbb{R}^2 .

Una *transformación*

$$\begin{aligned}\tau : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \tau(x, y)\end{aligned}\tag{1.1}$$

es una aplicación biyectiva. Por simplicidad supondremos que τ es diferenciable de clase C^1 , es decir, τ es continua con primeras derivadas parciales continuas.

Definición 1.1.1. El *espacio tangente* a \mathbb{R}^2 en el punto p_0 es el conjunto de vectores tangentes

$$T_{p_0}\mathbb{R}^2 = \{(p_0, \mathbf{u}) \mid p_0 \text{ es el punto base, } \mathbf{u} = (u_1, u_2)\}.\tag{1.2}$$

Observación 1.1.2. *El conjunto de vectores tangentes (1.2) con las operaciones de adición y multiplicación por escalar*

$$(p_0, \mathbf{u}) + (p_0, \mathbf{w}) = (p_0, \mathbf{u} + \mathbf{w})$$

$$\lambda(p_0, \mathbf{u}) = (p_0, \lambda\mathbf{u}) \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

es un espacio vectorial real de dimensión dos.

En nuestro trabajo, usamos dos posibilidades de interpretar vectores.

- i) Los vectores \mathbf{u} y \mathbf{w} están en el espacio vectorial real \mathbb{R}^2 , ambos anclados en el origen $\bar{0} = (0, 0)$.
- ii) Los vectores (p_0, \mathbf{u}) , (p_0, \mathbf{w}) están en el espacio tangente $T_{p_0}\mathbb{R}^2$, ambos anclados en el punto $p_0 = (x_0, y_0)$, ver Figura 1.1. Hay tantos espacios tangentes como puntos p_0 en el plano.

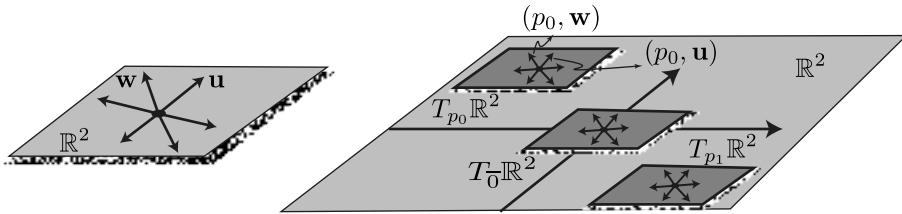


Figura 1.1: Planos tangentes.

Las transformaciones τ como en (1.1) envían *puntos en puntos* como sigue

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_0, y_0) &\longmapsto \tau(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Más aún, su diferencial envía *vectores tangentes en vectores tangentes* como sigue

$$\begin{aligned} \tau_* : T_{p_0}\mathbb{R}^2 &\longrightarrow T_{\tau(p_0)}\mathbb{R}^2 \\ (p_0, \mathbf{u}) &\longmapsto (\tau(p_0), J(\tau)|_{p_0}(\mathbf{u})), \end{aligned}$$

donde

$$J(\tau)|_{p_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(p_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(p_0) \end{pmatrix}$$

es la *matriz Jacobiana* de $\tau(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ evaluada en el punto p_0 y f_1, f_2 son funciones con valores escalares de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R} .

Ejemplo 1. Consideramos la transformación

$$\begin{aligned}\tau : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x^5, y^3)\end{aligned}$$

y el vector tangente $((1, 2), (1, 0)) \in T_{(1,2)}\mathbb{R}^2$.

La matriz Jacobiana de τ es

$$J(\tau) = \begin{pmatrix} 5x^4 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{pmatrix}.$$

Al evaluarla en el punto $(1, 2)$, obtenemos la matriz

$$J(\tau)|_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, τ envía el vector tangente $((1, 2), (1, 0)) \in T_{(1,2)}\mathbb{R}^2$ como sigue

$$\begin{aligned}\tau_* : T_{(1,2)}\mathbb{R}^2 &\longrightarrow T_{(1,8)}\mathbb{R}^2 \\ ((1, 2), (1, 0)) &\longmapsto ((1, 8), (5, 0)).\end{aligned}$$

1.2. Breve estudio de ángulos

El primer concepto que estudiamos es el de ángulo entre vectores. Para ello, recordamos los conceptos de producto punto y norma.

El *producto punto* entre dos vectores de \mathbb{R}^2 es el número real definido como sigue

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{w}) &\longmapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = u_1 w_1 + u_2, w_2.\end{aligned}$$

Extendemos el concepto de producto punto para vectores tangentes como sigue

$$\begin{aligned}T_{p_0}\mathbb{R}^2 \times T_{p_0}\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p_0, \mathbf{u}) \times (p_0, \mathbf{w}) &\longmapsto \langle (p_0, \mathbf{u}), (p_0, \mathbf{w}) \rangle \doteq \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle.\end{aligned}$$

La siguiente proposición muestra cuatro propiedades del producto punto.

Proposición 1.2.1. Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ son vectores en \mathbb{R}^2 y λ es un número real, entonces

- i) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$,
- ii) $\langle \mathbf{u}, (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$,
- iii) $\lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \lambda \mathbf{w} \rangle$,
- iv) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$, la igualdad se cumple cuando $\mathbf{u} = 0$.

Para la demostración ver [1, Teorema 3.2.2, p. 136].

Las cuatro propiedades del producto punto se cumplen para vectores tangentes $(p_0, \mathbf{u}), (p_0, \mathbf{w})$ en $T_{p_0}\mathbb{R}^2$.

La *norma* de un vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ en \mathbb{R}^2 es el número

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}.$$

En lo que sigue de este trabajo, algunas propiedades entre vectores de \mathbb{R}^2 las extendemos a vectores tangentes.

Definición 1.2.2. El *ángulo* entre dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ es

$$\measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \arccos \left(\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{w}\|} \right). \quad (1.3)$$

Naturalmente, el ángulo entre dos vectores tangentes $(p_0, \mathbf{u}), (p_0, \mathbf{w})$ en $T_{p_0}\mathbb{R}^2$ se define como sigue

$$\measuredangle((p_0, \mathbf{u}), (p_0, \mathbf{w})) \doteq \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{w}). \quad (1.4)$$

Para el caso de ángulos, como segunda posibilidad enunciamos el concepto de ángulo orientado.

Para esto, introducimos una rama de la función argumento definida como sigue

$$\begin{aligned} \arg_\gamma : \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} &\longrightarrow [\gamma, \gamma + 2\pi) \\ (x, y) &\longmapsto \begin{cases} \text{ángulo entre } (1, 0) \text{ y } (x, y), \\ \text{medido en radianes} \\ \text{y en sentido horario o antihorario,} \end{cases} \end{aligned}$$

donde $-2\pi \leq \gamma \leq 2\pi$ es un número real. Consideramos también

i) un vector inicial \mathbf{u} ,

- ii) un vector final \mathbf{w} ,
- iii) un sector angular \mathcal{S} ¹, determinado por los vectores \mathbf{u} y \mathbf{w} ,
- iv) una rama de la función argumento \arg_γ , que es continua en el interior del sector angular \mathcal{S} .

Definición 1.2.3. El *ángulo orientado* entre dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ es

$$\measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \arg_\gamma(\mathbf{w}) - \arg_\gamma(\mathbf{u}). \quad (1.5)$$

Naturalmente, el ángulo orientado entre dos vectores tangentes $(p_0, \mathbf{u}), (p_0, \mathbf{w})$ en $T_{p_0}\mathbb{R}^2$ se define como sigue

$$\measuredangle((p_0, \mathbf{u}), (p_0, \mathbf{w})) \doteq \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{w}). \quad (1.6)$$

Enfatizamos que la notación usada para ángulo \measuredangle y para ángulo orientado \measuredangle no es la misma.

Observación 1.2.4. Claramente (1.3) es simétrica, esto es

$$\measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \measuredangle(\mathbf{w}, \mathbf{u}),$$

mientras que (1.5) no lo es, ella es antisimétrica, esto es

$$\measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = -\measuredangle(\mathbf{w}, \mathbf{u}).$$

Definición 1.2.5. Consideramos dos vectores tangentes $(p_0, \mathbf{u}), (p_0, \mathbf{w})$ en $T_{p_0}\mathbb{R}^2$. Una transformación τ de clase C^1 preserva ángulos si

$$\measuredangle(\tau_*(p_0, \mathbf{u}), \tau_*(p_0, \mathbf{w})) = \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad (1.7)$$

y preserva ángulos orientados si

$$\measuredangle((p_0, \mathbf{u}), (p_0, \mathbf{w})) = \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{w}). \quad (1.8)$$

Observación 1.2.6. Si una transformación τ preserva ángulos orientados, entonces τ preserva ángulos.

¹Dos vectores \mathbf{u}, \mathbf{w} en \mathbb{R}^2 determinan dos sectores angulares, el sector angular deseado \mathcal{S} posee un ángulo $0 \leq \theta \leq \pi$.

Ejemplo 2. La transformación

$$\begin{aligned}\tau : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + 1, y)\end{aligned}$$

preserva ángulos y ángulos orientados. Por la Observación 1.2.6, mostramos únicamente que τ preserva ángulos orientados. Consideramos los vectores tangentes $(p_0, \mathbf{u}), (p_0, \mathbf{w})$ en $T_{p_0} \mathbb{R}^2$. Por definición

$$\measuredangle((p_0, \mathbf{u}), (p_0, \mathbf{w})) = \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{w}).$$

La matriz Jacobiana de τ es

$$J(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id.$$

Al evaluarla en el punto p_0 , obtenemos la misma matriz

$$J(\tau)|_{p_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las imágenes de los vectores tangentes, tomados anteriormente, son

$$\tau_* (p_0, \mathbf{u}) = (\tau(p_0), J(\tau)|_{p_0}(\mathbf{u})) = ((x_0 + 1, y_0), \mathbf{u}),$$

$$\tau_* (p_0, \mathbf{w}) = (\tau(p_0), J(\tau)|_{p_0}(\mathbf{w})) = ((x_0 + 1, y_0), \mathbf{w}).$$

Finalmente verificamos que los ángulos orientados se preservan

$$\begin{aligned}\measuredangle(\tau_*(p_0, \mathbf{u}), \tau_*(p_0, \mathbf{w})) &= \measuredangle(((x_0 + 1, y_0), \mathbf{u}), ((x_0 + 1, y_0), \mathbf{w})) \\ &= \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{w}).\end{aligned}$$

Ejemplo 3. La transformación

$$\begin{aligned}\tau : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (-x, y)\end{aligned}$$

preserva ángulos pero no ángulos orientados.

Consideramos los vectores tangentes $(p_0, \mathbf{u}), (p_0, \mathbf{w})$ en $T_{p_0} \mathbb{R}^2$. Por definición

$$\measuredangle((p_0, \mathbf{u}), (p_0, \mathbf{w})) = \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{w}).$$

La matriz Jacobiana de τ es

$$J(\tau) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al evaluarla en el punto p_0 , obtenemos la misma matriz

$$J(\tau)|_{p_0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las imágenes de los vectores tangentes, tomados anteriormente, son

$$\tau_* (p_0, \mathbf{u}) = (\tau(p_0), J(\tau)|_{p_0}(\mathbf{u})) = ((-x_0, y_0), (-u_1, u_2)),$$

$$\tau_* (p_0, \mathbf{w}) = (\tau(p_0), J(\tau)|_{p_0}(\mathbf{w})) = ((-x_0, y_0), (-w_1, w_2)).$$

Notemos que

$$\langle (-u_1, u_2), (-w_1, w_2) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle, \quad \|(-u_1, u_2)\| = \|\mathbf{u}\| \text{ y } \|(-w_1, w_2)\| = \|\mathbf{w}\|.$$

Finalmente verificamos que los ángulos se preservan

$$\begin{aligned} \measuredangle(\tau_*(p_0, \mathbf{u}), \tau_*(p_0, \mathbf{w})) &= \measuredangle(((-x_0, y_0), (-u_1, u_2)), ((-x_0, y_0), (-w_1, w_2))) \\ &= \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{w}\|}\right) \\ &= \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Ahora, verificamos el cambio de signo para ángulos orientados. Consideramos los vectores tangentes

$$(p_0, \mathbf{u}) = \left((0, 1), \left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2 \right) \right), \quad (p_0, \mathbf{w}) = \left((0, 1), (0, 1) \right) \in T_{(0,1)}\mathbb{R}^2.$$

El ángulo orientado que forman los vectores tangentes es

$$\measuredangle((p_0, \mathbf{u}), (p_0, \mathbf{w})) = \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \arg_{-\pi}(\mathbf{w}) - \arg_{-\pi}(\mathbf{u}) = \frac{1}{4}\pi.$$

Las imágenes de los vectores tangentes son

$$\tau_*(p_0, \mathbf{u}) = (\tau(p_0), J(\tau)|_{p_0}(\mathbf{u})) = \left((0, 1), \left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2 \right) \right),$$

$$\tau_*(p_0, \mathbf{w}) = (\tau(p_0), J(\tau)|_{p_0}(\mathbf{w})) = \left((0, 1), (0, 1) \right) = \left((0, 1), \mathbf{w} \right).$$

Verificamos que el ángulo orientado no se preserva. Consideramos una rama de la función argumento \arg_γ que es continua en el interior del sector angular \mathcal{S} , recordemos que \mathcal{S} es determinado por el vector inicial $\mathbf{u} = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y el vector final $\mathbf{w} = (1, 0)$. Por simplicidad consideramos la rama $\arg_{-\pi}$ y verificamos que los angulos no se preservan, en efecto

$$\begin{aligned}\measuredangle(\tau_*(p_0, \mathbf{u}), \tau_*(p_0, \mathbf{w})) &= \arg_{-\pi}(0, 1) - \arg_{-\pi}(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \\ &= \frac{1}{2}\pi - \frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{4}\pi \\ &\neq \frac{1}{4}\pi = \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{w}).\end{aligned}$$

El siguiente ejemplo muestra que el concepto de preservar ángulos, tiene sentido únicamente utilizando vectores tangentes.

Ejemplo 4. Dada la transformación

$$\begin{aligned}\tau : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x^2 - y^2, 2xy),\end{aligned}$$

la matriz Jacobiana de τ es

$$J(\tau) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

Al evaluarla en el punto $p_0 = (x_0, y_0)$, obtenemos la matriz

$$J(\tau)|_{p_0} = \begin{pmatrix} 2x_0 & -2y_0 \\ 2y_0 & 2x_0 \end{pmatrix}.$$

Consideramos los vectores tangentes $(p_0, (1, 0)), (p_0, (0, 1))$ en $T_{p_0}\mathbb{R}^2$. Verificamos que τ preserva el ángulo entre dichos vectores tangentes, en efecto

$$\begin{aligned}\measuredangle(\tau_*(p_0, (1, 0)), \tau_*(p_0, (0, 1))) &= \measuredangle((\tau(p_0), J(\tau)|_{p_0}(1, 0)), (\tau(p_0), J(\tau)|_{p_0}(0, 1))) \\ &= \measuredangle((\tau(p_0), (2x_0, 2y_0)), (\tau(p_0), (-2y_0, 2x_0))) \\ &= \measuredangle((2x_0, 2y_0), (-2y_0, 2x_0)) \\ &= \arccos(0) = \frac{1}{2}\pi \\ &= \measuredangle((1, 0), (0, 1)).\end{aligned}$$

Ahora, consideramos tres puntos en \mathbb{R}^2

$$p_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), p_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), p_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right).$$

Tomamos los vectores en \mathbb{R}^2

$$\mathbf{u} = p_1 - p_0 = (1, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = p_2 - p_0 = (0, 1),$$

ambos anclados en p_0 . Notemos que

$$\measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}\pi.$$

Verificamos que τ no preserva el ángulo entre dichos vectores. El ángulo que forman sus imágenes es

$$\measuredangle(\tau(\mathbf{u}), \tau(\mathbf{w})) = \measuredangle((1, 0), (-1, 0)) = \pi.$$

Con ello concluimos que el concepto de preservar ángulos tiene sentido únicamente utilizando vectores tangentes y no vectores en \mathbb{R}^2 .

1.3. Breve estudio de área

Estudiamos ahora el concepto de área para regiones en \mathbb{R}^2 .

El siguiente cuadro muestra tres fórmulas para determinar el *área de un triángulo* $\Delta \subset \mathbb{R}^2$. Cada fórmula depende de los datos que se disponga.

	dato	fórmula
1	$a \doteq$ altura, $b \doteq$ base	$\frac{1}{2}(b \cdot a)$
2	dos vectores en \mathbb{R}^2 $\mathbf{u} = (u_1, u_2), \mathbf{w} = (w_1, w_2)$ como lados del triángulo	$\frac{1}{2} \left \det \begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{pmatrix} \right $
3	tres puntos en \mathbb{R}^2 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$	$\frac{1}{2} \left \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} \right $

(1.9)

Probaremos únicamente que la fórmula 1) implica la fórmula 2). Partimos de que

$$\text{área}(\Delta) = \frac{1}{2}b \cdot a.$$

Consideramos $b = \|\mathbf{u}\|$ y $a = \|\text{proy}_{\mathbf{u}^\perp} \mathbf{w}\|$, donde $\mathbf{u}^\perp = (-u_2, u_1)$ es un vector normal a \mathbf{u} de igual norma y $\text{proy}_{\mathbf{u}^\perp} \mathbf{w} = \frac{\langle \mathbf{u}^\perp, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{u}^\perp\|^2} \mathbf{u}^\perp$.

Entonces

$$\begin{aligned} \text{área}(\Delta) &= \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\| \cdot \|\text{proy}_{\mathbf{u}^\perp} \mathbf{w}\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\| \left| \frac{\langle \mathbf{u}^\perp, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{u}^\perp\|^2} \right| \|\mathbf{u}^\perp\| = \frac{1}{2} |\langle \mathbf{u}^\perp, \mathbf{w} \rangle| \\ &= \frac{1}{2} |\langle (-u_2, u_1), (w_1, w_2) \rangle| = \frac{1}{2} |(-u_2)w_1 + u_1 w_2| \\ &= \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora, consideramos el caso de área para cualquier polígono $P \subset \mathbb{R}^2$. Particionamos el polígono P en triángulos Δ_ι . Ellos se traslanan en a lo más vértices y aristas.

Si el polígono es

$$P = \bigcup_{\iota=1}^n \Delta_\iota,$$

entonces su área es

$$\text{área}(P) = \sum_{\iota=1}^n \text{área}(\Delta_\iota). \quad (1.10)$$

Finalmente consideramos el área de cualquier región elemental $R \subset \mathbb{R}^2$ que a continuación definimos.

Consideramos dos funciones reales $\psi, \phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\psi(x) < \phi(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Una *región elemental* es el conjunto

$$R = \{(x, y) \mid x \in [a, b] \text{ y } \psi(x) \leq y \leq \phi(x)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

A continuación enunciamos el teorema de cambio de variable para integrales dobles, el cual puede consultarse en [2, Teorema 2, p. 372].

Teorema 1.3.1. (*De cambio de variable para integrales dobles.*) Si dos regiones elementales $R', R \subset \mathbb{R}^2$ están relacionadas por una transformación inyectiva de clase C^1 , $\tau : R' \rightarrow R$, tal que $\tau(R') = R$, entonces para toda función integrable $f : R \rightarrow \mathbb{R}$

$$\iint_R f(x, y) \, dydx = \iint_{R'} |\det(J(\tau))| (f \circ \tau) \, dydx. \quad (1.11)$$

El área de una región elemental $R \subset \mathbb{R}^2$ es

$$\text{área}(R) = \iint_R dydx.$$

Veamos como esta definición, tiene como caso particular a los triángulos.

Ejemplo 5. El área del triángulo $\Delta = \{(0, 0), (b, 0), (c, a)\} \subset \mathbb{R}^2$ es $\frac{1}{2}ab$. En efecto,

$$\text{área}(\Delta) = \text{área}(\Delta_1) + \text{área}(\Delta_2) = \int_0^c \int_0^{\frac{c}{b}x} dydx + \int_c^b \int_0^{\frac{a}{c-b}x - \frac{ab}{c-b}} dydx = \frac{1}{2}ab.$$

Para $c = 0$, tenemos que $\text{área}(\Delta_1) = 0$, ver Figura 1.2 inciso a) y para $c = b$, tenemos que $\text{área}(\Delta_2) = 0$ ver Figura 1.2 inciso d). Los incisos b) y c) muestran que el $\text{área}(\Delta_1) \neq 0$ y $\text{área}(\Delta_2) \neq 0$.

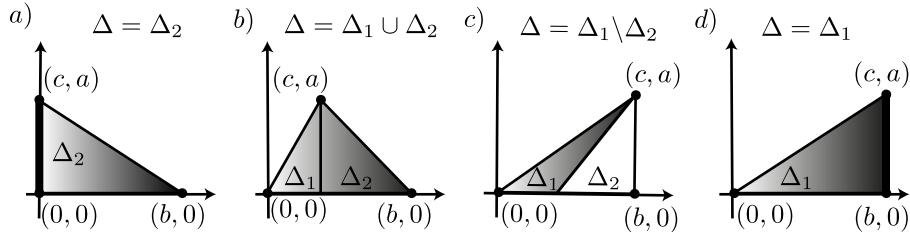


Figura 1.2: Área de un triángulo con integrales.

Definición 1.3.2. Una transformación τ diferenciable de clase C^1 preserva área si para cualquier región $R \subset \mathbb{R}^2$ se cumple que

$$\text{área}(\tau(R)) = \text{área}(R).$$

Como consecuencia del Teorema 1.3.1 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.3.3. Si el determinante de la matriz Jacobiana de una transformación τ es 1, entonces τ preserva área.

Demostración. Consideramos a f como la función constante 1. Usando el Teorema 1.3.1 obtenemos que

$$\text{área}(R) = \iint_R dydx = \iint_{R'} dydx = \text{área}(R').$$

□

Ejemplo 6. Consideramos la transformación

$$\begin{aligned}\tau : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y - x^2 + 1)\end{aligned}$$

y el triángulo $\Delta = \{(-1, 0), (0, -1), (0, 1)\}$.

Este ejemplo muestra que la transformación τ no envía triángulos en triángulos. Sin embargo ella preserva el área del triángulo Δ , es decir,

$$\text{área}(\tau(\Delta)) = \text{área}(\Delta).$$

Las imágenes de los tres vértices del triángulo Δ son

$$\tau(-1, 0) = (-1, 0); \quad \tau(0, -1) = (0, 0); \quad \tau(1, 0) = (1, 0).$$

Los tres puntos son colineales. Esto quiere decir que τ no envía triángulos en triángulos.

Usando la fórmula tres del cuadro (1.9) obtenemos

$$\text{área}(\Delta) = 1.$$

Por otro lado, la matriz Jacobiana de τ es

$$J(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2x & 1 \end{pmatrix}.$$

Ella posee determinante uno. Por el Corolario 1.3.3, τ preserva área. Así,

$$\text{área}(\tau(\Delta)) = 1.$$

1.4. Breve estudio de orientación

Mostramos ahora, cuando una transformación preserva orientación.

Definición 1.4.1. Una transformación τ de clase C^1 *preserva orientación* si para cualquier par de vectores tangentes $(p_0, \mathbf{u}), (p_0, \mathbf{w})$ en $T_{p_0}\mathbb{R}^2$ linealmente independientes, los determinantes

$$\det((p_0, \mathbf{u}), (p_0, \mathbf{w})) \quad \text{y} \quad \det(\tau_*((p_0, \mathbf{u})), \tau_*((p_0, \mathbf{w})))$$

poseen el mismo signo.

Observación 1.4.2. *i) Si $\det(J(\tau)) > 0$, entonces τ preserva orientación.*
ii) Si $\det(J(\tau)) < 0$, entonces τ invierte orientación.

La transformación del Ejemplo 3 invierte orientación, $\det(J(\tau)) = -1 < 0$.
La transformación del Ejemplo 4 preserva orientación, $\det(J(\tau)) = 4x^2 + 4y^2 > 0$.

La transformación del Ejemplo 6 preserva orientación, $\det(J(\tau)) = 1 > 0$.

Observación 1.4.3. *Si una transformación τ preserva orientación y ángulos, entonces τ preserva ángulos orientados.*

1.5. Breve estudio de rectas y distancias

Veamos ahora, cuando una transformación preserva rectas.

Una recta parametrizada l en \mathbb{R}^2 es un conjunto de la forma

$$l = \{p_0 + t\mathbf{u} \mid t \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Nuestra expresión posee una parametrización

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto p_0 + t\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Definición 1.5.1. Una transformación τ de clase C^1 *preserva rectas parametrizadas* (preservando parametrización) si

$$\tau(p_0 + t\mathbf{u}) = \tau(p_0) + tJ(\tau)|_{p_0}(\mathbf{u}),$$

para toda recta l y para todo t en \mathbb{R} .

Ejemplo 7. La transformación

$$\begin{aligned}\tau : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (-x, y)\end{aligned}$$

preserva rectas.

Recordemos que la matriz Jacobiana de τ evaluada en el punto $p_0 = (x_0, y_0)$ es

$$J(\tau)|_{p_0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verificamos que τ preserva rectas, en efecto

$$\begin{aligned}\tau(p_0 + t\mathbf{u}) &= \tau(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) = (-x_0 - tu_1, y_0 + tu_2) \\ &= (-x_0, y_0) + t(-u_1, u_2) = (-x_0, y_0) + t \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \tau(p_0) + tJ(\tau)|_{p_0}(\mathbf{u}).\end{aligned}$$

Ejemplo 8. La transformación

$$\begin{aligned}\tau : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y - x^2 + 1)\end{aligned}$$

no preserva rectas.

Tomamos la recta $\{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ como el eje x y eligiendo $p_0 = (0, 0)$, $\mathbf{u} = (1, 0)$. Verificamos que en efecto τ no preserva rectas.

Recordemos que la matriz Jacobiana de τ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2x & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, al evaluarla en el origen tenemos la matriz identidad.

Notemos que

$$\tau(t, 0) = (t, -t^2 + 1).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\tau(0, 0) + tJ(\tau)|_{p_0}(\mathbf{u}) &= (0, 1) + t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (0, 1) + t\mathbf{u} \\ &= (tu_1, tu_2 + 1) \\ &\neq \tau(t, 0).\end{aligned}$$

Con lo cual concluimos que τ no preserva rectas.

Finalmente estudiamos, cuándo una transformación preserva distancias. La *distancia* entre dos puntos $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2)$ en \mathbb{R}^2 es

$$d(p_1, p_2) = ||p_2 - p_1|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Definición 1.5.2. Una transformación τ de clase C^1 *preserva distancias* si para cualesquiera dos puntos p_1, p_2 en \mathbb{R}^2 , se cumple que

$$d(\tau(p_1), \tau(p_2)) = d(p_1, p_2).$$

Ejemplo 9. La transformación

$$\begin{aligned}\tau : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (-x, y)\end{aligned}$$

preserva distancias.

En efecto,

$$\begin{aligned}d(\tau(x_1, y_1), \tau(x_2, y_2)) &= d((-x_1, y_1), (-x_2, y_2)) \\ &= \sqrt{(-(x_2 - x_1))^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= d((x_1, y_1), (x_2, y_2)).\end{aligned}$$

Ejemplo 10. La transformación

$$\begin{aligned}\tau : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y - x^2 + 1)\end{aligned}$$

no preserva distancias. Consideramos los puntos $p_0 = (-1, 0)$ y $p_1 = (0, -1)$ en \mathbb{R}^2 . La distancia entre dichos puntos es

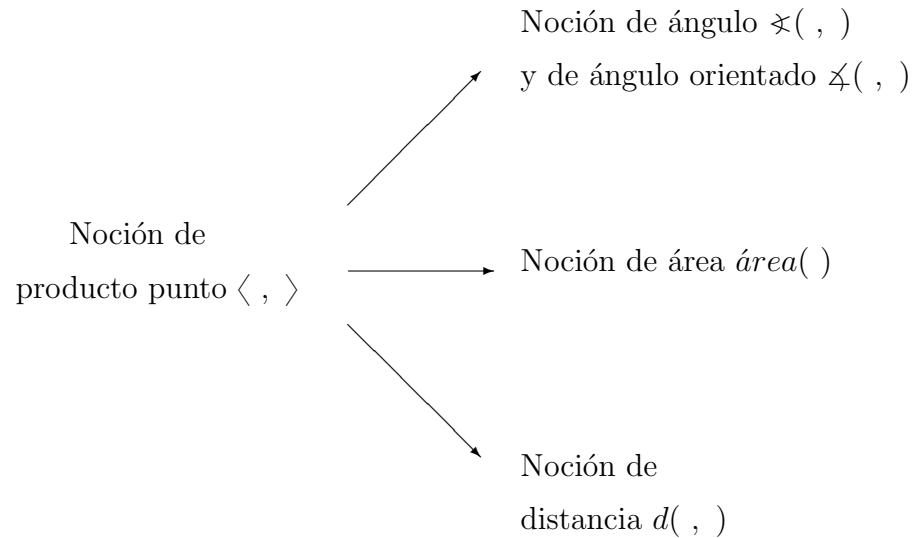
$$d(p_0, p_1) = \sqrt{2}.$$

Por otro lado,

$$d(\tau(p_0), \tau(p_1)) = d((-1, 0), (0, 0)) = 1.$$

— · · —

Como resumen, el siguiente diagrama muestra que *si una transformación τ preserva el producto punto, entonces τ preserva ángulos, área y distancia*, ello es consecuencia de la siguiente dependencia de los conceptos:



Capítulo 2

Grupos de transformaciones

2.1. Traslaciones

Definición 2.1.1. El conjunto de *traslaciones* de \mathbb{R}^2 es

$$Trans(\mathbb{R}^2) = \{T_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid T_{\mathbf{v}}(x, y) = (x, y) + (v_1, v_2), \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2\}. \quad (2.1)$$

El vector \mathbf{v} se llama *vector de traslación*.

Proposición 2.1.2. *Las traslaciones envían vectores tangentes en vectores tangentes.*

Demostración. Consideramos la traslación

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y) + (v_1, v_2) \end{aligned}$$

y el vector tangente (p_0, \mathbf{u}) en $T_{p_0}\mathbb{R}^2$.

La matriz Jacobiana de $T_{\mathbf{v}}$ es

$$J(T_{\mathbf{v}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al evaluarla en el punto p_0 obtenemos la matriz

$$J(T_{\mathbf{v}})|_{p_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$J(T_{\mathbf{v}})|_{p_0}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}.$$

En resumen, $(T_{\mathbf{v}})_*$ envía el vector tangente (p_0, \mathbf{u}) en $T_{p_0}\mathbb{R}^2$ como sigue

$$(T_{\mathbf{v}})_*(p_0, \mathbf{u}) = (T_{\mathbf{v}}(p_0), J(T_{\mathbf{v}})|_{p_0}(\mathbf{u})) = (T_{\mathbf{v}}(p_0), \mathbf{u}).$$

□

Ejemplo 11. Consideramos la traslación

$$\begin{aligned} T_{(-1,4)} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x - 1, y + 4) \end{aligned}$$

y el vector tangente $((3, 1), (8, 2))$ en $T_{(3,1)}\mathbb{R}^2$.

Por la Proposición 2.1.2 $(T_{\mathbf{v}})_*$ envía el vector tangente $((3, 1), (8, 2))$ en $T_{(3,1)}\mathbb{R}^2$ como sigue

$$\begin{aligned} (T_{\mathbf{v}})_* : T_{(3,1)}\mathbb{R}^2 &\longrightarrow T_{(2,5)}\mathbb{R}^2 \\ ((3, 1), (8, 2)) &\longmapsto ((2, 5), (8, 2)). \end{aligned}$$

Lema 2.1.3. *El conjunto de traslaciones $\text{Trans}(\mathbb{R}^2)$ es un grupo conmutativo.*

Demostración. La composición de dos traslaciones es otra traslación

$$T_{\mathbf{u}} \circ T_{\mathbf{v}} = T_{\mathbf{v} + \mathbf{u}}.$$

La propiedad asociativa se satisface

$$T_{\mathbf{u}} \circ (T_{\mathbf{v}} \circ T_{\mathbf{w}}) = T_{(\mathbf{w} + \mathbf{v}) + \mathbf{u}} = T_{\mathbf{w} + (\mathbf{v} + \mathbf{u})} = (T_{\mathbf{u}} \circ T_{\mathbf{v}}) \circ T_{\mathbf{w}}.$$

La traslación que cumple ser el elemento neutro es

$$T_{\mathbf{0}} = Id.$$

La inversa de la traslación $T_{\mathbf{v}}$ es

$$(T_{\mathbf{v}})^{-1} = T_{-\mathbf{v}}.$$

La composición de traslaciones es conmutativa

$$T_{\mathbf{u}} \circ T_{\mathbf{v}} = T_{\mathbf{v} + \mathbf{u}} = T_{\mathbf{u} + \mathbf{v}} = T_{\mathbf{v}} \circ T_{\mathbf{u}}.$$

□

Lema 2.1.4. Una traslación $T_{\mathbf{v}}$ es determinada de manera única por un punto (x_0, y_0) y su imagen (x_1, y_1) bajo ella.

Demostración. Proponemos a

$$\mathbf{v} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) \in \mathbb{R}^2$$

como el vector de traslación que determina a $T_{\mathbf{v}}$. Esto es

$$T_{\mathbf{v}}(x, y) = (x, y) + (x_1 - x_0, y_1 - y_0).$$

Claramente

$$T_{\mathbf{v}}(x_0, y_0) = (x_1, y_1).$$

□

Proposición 2.1.5. Las traslaciones de \mathbb{R}^2 preservan:

- i) distancias,
- ii) áreas,
- iii) ángulos, ángulos orientados,
- iv) rectas,
- v) orientación.

Demostración. Mostramos únicamente que las traslaciones preservan áreas, ángulos y ángulos orientados .

- ii) El determinante de la matriz Jacobiana de una traslación es uno. Por el Corolario 1.3.3, las traslaciones preservan área.
- iii) El Ejemplo 2 es una traslación. Cambiando el vector de traslación $(1, 0)$ por el vector (v_1, v_2) , concluimos que las traslaciones preservan ángulos y ángulos orientados. □

2.2. Rotaciones

Definición 2.2.1. El conjunto de *rotaciones* de \mathbb{R}^2 es

$$SO(2, \mathbb{R}) = \left\{ Ro_{\theta} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid Ro_{\theta}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi] \right\}. \quad (2.2)$$

El acrónimo “*SO*” proviene de “*Special Orthogonal*”. Todas las rotaciones en (2.2) son en torno al origen. El ángulo orientado θ se llama *ángulo de rotación*.

Proposición 2.2.2. *Las rotaciones envían vectores tangentes en vectores tangentes.*

Demostración. Consideramos la rotación

$$\begin{aligned} Ro_\theta : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y el vector tangente (p_0, \mathbf{u}) en $T_{p_0}\mathbb{R}^2$.

La matriz Jacobiana de Ro_θ es

$$J(Ro_\theta) = Ro_\theta.$$

Al evaluarla en el punto p_0 , obtenemos la matriz

$$J(Ro_\theta)|_{p_0} = Ro_\theta(p_0) = Ro_\theta.$$

Finalmente, Ro_θ envía el vector tangente (p_0, \mathbf{u}) en $T_{p_0}\mathbb{R}^2$ como sigue

$$(Ro_\theta)_*(p_0, \mathbf{u}) = (Ro_\theta(p_0), J(Ro_\theta)|_{p_0}(\mathbf{u})) = (Ro_\theta(p_0), Ro_\theta(\mathbf{u})).$$

□

Ejemplo 12. Consideramos la rotación

$$\begin{aligned} Ro_{\frac{\pi}{2}} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y el vector tangente $((3, 1), (8, 2))$ en $T_{(3,1)}\mathbb{R}^2$.

Por la Proposición 2.2.2 $(Ro_{\frac{\pi}{2}})_*$ envía el vector tangente $((3, 1), (8, 2))$ en $T_{(3,1)}\mathbb{R}^2$ como

$$\begin{aligned} (Ro_{\frac{\pi}{2}})_* : T_{(3,1)}\mathbb{R}^2 &\longrightarrow T_{(-1,3)}\mathbb{R}^2 \\ ((3, 1), (8, 2)) &\longmapsto ((-1, 3), (-2, 8)). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Lema 2.2.3. *El conjunto de rotaciones $SO(2, \mathbb{R})$ es un grupo conmutativo.*

Demostración. La composición de dos rotaciones es otra rotación

$$Ro_{\theta_2} \circ Ro_{\theta_1} = Ro_{\theta_1 + \theta_2}.$$

La propiedad asociativa se satisface

$$Ro_{\theta_3} \circ (Ro_{\theta_2} \circ Ro_{\theta_1}) = Ro_{(\theta_1 + \theta_2) + \theta_3} = Ro_{\theta_1 + (\theta_2 + \theta_3)} = (Ro_{\theta_3} \circ Ro_{\theta_2}) \circ Ro_{\theta_1}.$$

La rotación que cumple ser el elemento neutro es

$$Ro_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id.$$

La inversa de la rotación Ro_θ es

$$(Ro_\theta)^{-1} = Ro_{2\pi-\theta} \doteq Ro_{-\theta}.$$

La composición de rotaciones es commutativa

$$Ro_{\theta_2} \circ Ro_{\theta_1} = Ro_{\theta_1 + \theta_2} = Ro_{\theta_2 + \theta_1} = Ro_{\theta_1} \circ Ro_{\theta_2}.$$

□

Lema 2.2.4. *Dados dos puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ distintos del origen con misma norma. Una rotación Ro_θ es determinada de manera única por el punto (x_0, y_0) y su imagen (x_1, y_1) bajo ella.*

Demostración. Consideramos una rama de la función argumento \arg_γ , ella es continua en el sector angular, \mathcal{S} , determinada por los vectores $\mathbf{u} = (x_0, y_0)$ y $\mathbf{w} = (x_1, y_1)$. Proponemos a

$$\theta = \measuredangle((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \arg_\gamma((x_1, y_1)) - \arg_\gamma((x_0, y_0))$$

como el ángulo de rotación que determina la rotación Ro_θ . Introducimos la siguiente notación

$$\theta_1 = \arg_\gamma((x_1, y_1)), \quad \theta_0 = \arg_\gamma((x_0, y_0)).$$

Como el conjunto de rotaciones es grupo tenemos que

$$\begin{aligned} Ro_\theta(x_0, y_0) &= Ro_{\theta_1 - \theta_0}(x_0, y_0) = Ro_{-\theta_0 + \theta_1}(x_0, y_0) = Ro_{\theta_1} \circ Ro_{-\theta_0}(x_0, y_0) \\ &= Ro_{\theta_1}(x'_0, y'_0), \end{aligned}$$

donde (x'_0, y'_0) es un punto en la parte positiva del eje x y $\|(x'_0, y'_0)\| = \|(x_0, y_0)\|$. Finalmente reconocemos que

$$Ro_{\theta_1}(x'_0, y'_0) = (x_1, y_1).$$

□

Ejemplo 13. Tomamos los puntos $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ y $(x_1, y_1) = (1, 1)$. Para $\gamma = 0$, la rama arg_0 es continua en el sector angular \mathcal{S} . Notemos que $arg_0((x_0, y_0)) = \frac{3}{4}\pi$ y $arg_0((x_1, y_1)) = \frac{1}{4}\pi$. La rotación determinada por el punto (x_0, y_0) y su imagen (x_1, y_1) bajo ella es

$$Ro_{-\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente verificamos que $Ro_{-\frac{\pi}{2}}(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$. En efecto

$$Ro_{-\frac{\pi}{2}}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Proposición 2.2.5. *Las rotaciones de \mathbb{R}^2 preservan:*

- i) distancias,
- ii) áreas,
- iii) ángulos, ángulos orientados
- iv) rectas,
- v) orientación,
- vi) el origen.

Demostración. Mostramos únicamente que las rotaciones preservan áreas, ángulos y ángulos orientados.

ii) La matriz Jacobiana de una rotación es

$$J(Ro_\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Claramente

$$\left| \det(J(Ro_\theta)) \right| = 1.$$

Por el Corolario 1.3.3 las rotaciones preservan área.

iii) Consideramos dos vectores \mathbf{u}, \mathbf{w} en \mathbb{R}^2 tal que

$$\theta = \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = arg_\gamma(\mathbf{w}) - arg_\gamma(\mathbf{u}),$$

para alguna γ . Notemos que

$$arg_\gamma(Ro_\theta(\mathbf{u})) = arg_\gamma(\mathbf{u}) + \theta \quad \text{y}$$

$$arg_\gamma(Ro_\theta(\mathbf{w})) = arg_\gamma(\mathbf{w}) + \theta.$$

Entonces

$$\measuredangle(Ro_\theta \mathbf{u}, Ro_\theta \mathbf{w}) = (\arg(\mathbf{w}) + \theta) - (\arg(\mathbf{u}) + \theta) = \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{w}).$$

Lo cual demuestra que las rotaciones preservan ángulos orientados. Por la Observación 1.2.6, las rotaciones preservan ángulos. \square

2.3. Reflexiones

Definición 2.3.1. El conjunto de *reflexiones* de \mathbb{R}^2 es

$$O(2, \mathbb{R})_- = \{Re_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid Re_\theta(x, y) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi)\}. \quad (2.4)$$

Una reflexión Re_θ nos da un ángulo orientado $\theta \in [0, \pi)$. Cada ángulo orientado θ determina una única recta l_θ que pasa por el origen. Los puntos $(x_0, y_0) \in l_\theta$ cumplen que

$$Re_\theta(x_0, y_0) = (x_0, y_0).$$

A l_θ le llamamos *recta de reflexión*.

Mostramos que l_θ no depende del ángulo orientado

$$\theta_k = \theta + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Como

$$\begin{aligned} \cos(2\theta_k) &= \cos(2\theta + 2k\pi) = \cos(2\theta) \quad \text{y} \\ \sin(2\theta_k) &= \sin(2\theta + 2k\pi) = \sin(2\theta), \end{aligned}$$

tenemos que $Re_{\theta_k} = Re_\theta$.

La Figura 2.1 ilustra tres reflexiones del triángulo señalado en el primer cuadrante.

Proposición 2.3.2. *Las reflexiones envían vectores tangentes en vectores tangentes.*

Demostración. Consideramos la reflexión

$$\begin{aligned} Re_\theta : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

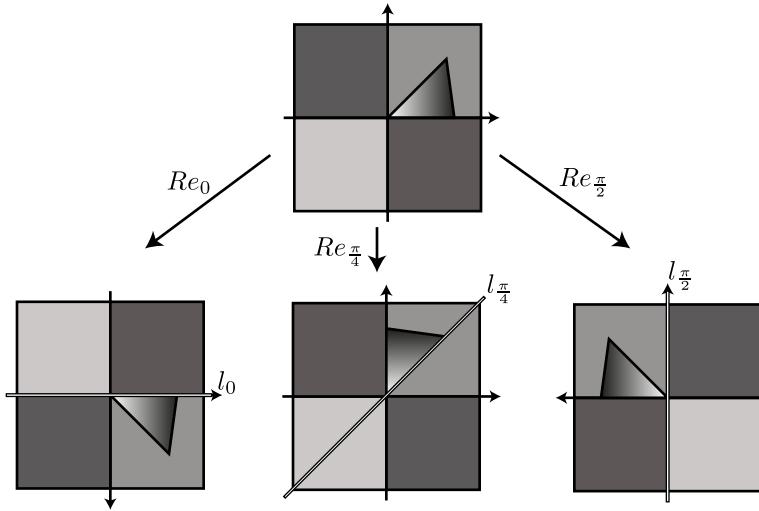


Figura 2.1: Ejemplos de reflexiones.

y el vector tangente (p_0, \mathbf{u}) en $T_{p_0}\mathbb{R}^2$.

La matriz Jacobiana de Re_θ es

$$J(Re_\theta) = Re_\theta.$$

Al evaluarla en el punto p_0 , obtenemos la misma matriz

$$J(Re_\theta)|_{p_0} = Re_\theta.$$

Finalmente, $(Re_\theta)_*$ envía el vector (p_0, \mathbf{u}) en $T_{p_0}\mathbb{R}^2$ como sigue

$$(Re_\theta)_*(p_0, \mathbf{u}) = (Re_\theta(p_0), J(Re_\theta)|_{p_0}(\mathbf{u})) = (Re_\theta(p_0), Re_\theta(\mathbf{u})).$$

□

Ejemplo 14. Consideramos la reflexión

$$\begin{aligned} Re_{\frac{\pi}{4}} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y el vector tangente $((3, 1), (8, 2))$ en $T_{(3,1)}\mathbb{R}^2$.

Por la Proposición 2.3.2 $(Re_{\frac{\pi}{4}})_*$ envía el vector tangente $((3, 1), (8, 2))$ en $T_{(3,1)}\mathbb{R}^2$ como sigue

$$\begin{aligned} (Re_{\frac{\pi}{4}})_*: T_{(3,1)}\mathbb{R}^2 &\longrightarrow T_{(1,3)}\mathbb{R}^2 \\ ((3, 1), (8, 2)) &\longmapsto ((1, 3), (2, 8)). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Observación 2.3.3. *El conjunto de reflexiones (2.4) no es grupo.*

Notemos que la composición de dos reflexiones no es una reflexión, de hecho, es la rotación

$$Re_{\theta_2} \circ Re_{\theta_1} = Ro_{2\theta_2 - 2\theta_1}.$$

La propiedad asociativa se satisface

$$(Re_{\theta_3} \circ Re_{\theta_2}) \circ Re_{\theta_1} = Ro_{2\theta_3 - 2\theta_2} \circ Re_{\theta_1} = Re_{(\theta_3 - \theta_2) + \theta_1},$$

por otro lado

$$Re_{\theta_3} \circ (Re_{\theta_2} \circ Re_{\theta_1}) = Re_{\theta_3} \circ Ro_{2\theta_2 - 2\theta_1} = Re_{\theta_3 - (\theta_2 - \theta_1)}.$$

No existe una reflexión que cumpla ser el elemento neutro. Esto se debe a lo siguiente. Para todo $\theta \in [0, 2\pi)$ sucede que

$$Re_\theta = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id.$$

La inversa de una reflexión es ella misma

$$Re_\theta^{-1} = Re_\theta.$$

La composición de reflexiones no es conmutativa

$$Re_{\theta_2} \circ Re_{\theta_1} = Ro_{2\theta_2 - 2\theta_1} \neq Ro_{2\theta_1 - 2\theta_2} = Re_{\theta_1} \circ Re_{\theta_2}.$$

Lema 2.3.4. *Dados dos puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ no nulos con misma norma. Una reflexión Re_θ es determinada de manera única por el punto (x_0, y_0) y su imagen (x_1, y_1) bajo ella.*

Demostración. Consideramos una rama de la función argumento arg_γ , ella es continua en el sector angular, \mathcal{S} , determinada por los vectores $\mathbf{u} = (x_0, y_0)$ y $\mathbf{w} = (x_1, y_1)$. Proponemos a

$$\theta = \frac{arg_\gamma((x_1, y_1)) + arg_\gamma((x_0, y_0))}{2}$$

como el ángulo de reflexión que determina la reflexión Re_θ . Claramente

$$Re_\theta(x_0, y_0) = (x_1, y_1).$$

□

Ejemplo 15. Tomamos los puntos $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ y $(x_1, y_1) = (1, 1)$. Para $\gamma = 0$, la rama arg_0 es continua en el sector angular \mathcal{S} . Notemos que $arg_0((x_0, y_0)) = \frac{3}{4}\pi$ y $arg_0((x_1, y_1)) = \frac{1}{4}\pi$. La reflexión determinada es

$$Re_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente verificamos que $Re_{\frac{\pi}{2}}(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$. En efecto

$$Re_{\frac{\pi}{2}}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Proposición 2.3.5. *El conjunto de reflexiones preserva:*

- i) distancias,
- ii) áreas,
- iii) ángulos,
- iv) rectas,
- v) el origen.

Demostración. Mostramos únicamente que las reflexiones preservan ángulos.

iii) Hay que mostrar la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \measuredangle(Re_\theta(\mathbf{u}), Re_\theta(\mathbf{w})) &= \arccos \left(\frac{\langle Re_\theta(\mathbf{u}), Re_\theta(\mathbf{w}) \rangle}{\|Re_\theta(\mathbf{u})\| \|Re_\theta(\mathbf{w})\|} \right) = \arccos \left(\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{w}\|} \right) \\ &= \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Usando i) tenemos que

$$\|Re_\theta(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\| \quad \text{y} \quad \|Re_\theta(\mathbf{w})\| = \|\mathbf{w}\|.$$

Falta mostrar que las reflexiones preservan el producto punto, en efecto

$$\begin{aligned} \langle Re_\theta(\mathbf{u}), Re_\theta(\mathbf{w}) \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle (\cos(2\theta)u_1 + \sin(2\theta)u_2, \sin(2\theta)u_1 - \cos(2\theta)u_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\cos(2\theta)w_1 + \sin(2\theta)w_2, \sin(2\theta)w_1 - \cos(2\theta)w_2) \\
&= \cos^2(2\theta)u_1w_1 + \cos(2\theta)\sin(2\theta)u_1w_2 + \cos(2\theta)\sin(2\theta)u_2w_1 + \sin^2(2\theta)u_2w_2 + \\
&\quad \sin^2(2\theta)u_1w_1 - \cos(2\theta)\sin(2\theta)u_1w_2 - \cos(2\theta)\sin(2\theta)u_2w_1 + \cos^2(2\theta)u_2w_2 \\
&= (u_1w_1 + u_2w_2)(\cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta)) \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle.
\end{aligned}$$

Con lo cual concluimos la prueba. \square

2.4. Transformaciones ortogonales

Definición 2.4.1. El conjunto de *transformaciones ortogonales* de \mathbb{R}^2 es

$$O(2, \mathbb{R}) = \{A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid A \in SO(2, \mathbb{R}) \text{ o } A \in O(2, \mathbb{R})_-\}. \quad (2.6)$$

El acrónimo “*O*” proviene de “*Orthogonal*”.

Lema 2.4.2. *El conjunto de transformaciones ortogonales $O(2, \mathbb{R})$ es un grupo no conmutativo.*

Demostración. La composición de dos transformaciones ortogonales es otra transformación ortogonal. Sabemos que para rotaciones

$$Ro_{\theta_2} \circ Ro_{\theta_1} = Ro_{\theta_1+\theta_2} \in O(2, \mathbb{R})$$

y para reflexiones

$$Re_{\theta_2} \circ Re_{\theta_1} = Ro_{\theta_2-\theta_1} \in O(2, \mathbb{R}).$$

Además

$$\begin{aligned}
Re_{\theta_1} \circ Ro_{\theta_2} &= Re_{\theta_1-\theta_2} \in O(2, \mathbb{R}), \\
Ro_{\theta_2} \circ Re_{\theta_1} &= Re_{\theta_2+\theta_1} \in O(2, \mathbb{R}).
\end{aligned} \quad (2.7)$$

La propiedad asociativa se satisface para transformaciones ortogonales cualesquiera.

La transformación ortogonal que cumple ser el elemento neutro es la identidad $Id = Ro_0$.

Cada $A \in O(2, \mathbb{R})$ posee una inversa $A^{-1} \in O(2, \mathbb{R})$, hay dos casos.

- Si $A = Ro_\theta$, entonces $A^{-1} = Ro_{-\theta}$.
- Si $A = Re_\theta$, entonces $A^{-1} = A$.

Por lo tanto $O(2, \mathbb{R})$ es un grupo. Observamos en (2.7) que $O(2, \mathbb{R})$ no es conmutativo. \square

Observación 2.4.3. *El conjunto de rotaciones $SO(2, \mathbb{R})$ es un subgrupo de $O(2, \mathbb{R})$.*

2.5. Isometrías

Definición 2.5.1. El conjunto de *isometrías* de \mathbb{R}^2 es

$$Iso(\mathbb{R}^2) = \{\mathfrak{I} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid \mathfrak{I}(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{v}, A \in O(2, \mathbb{R}), \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2\}, \quad (2.8)$$

también llamadas *transformaciones rígidas*.

Una *isometría* de \mathbb{R}^2 es la composición de una transformación ortogonal A y una traslación $T_{\mathbf{v}}$

$$T_{\mathbf{v}} \circ A.$$

Mostramos que

$$T_{\mathbf{v}} \circ A \neq A \circ T_{\mathbf{v}}. \quad (2.9)$$

Para esto, consideramos a $A = Ro_{\frac{\pi}{2}}$ y a $T_{\mathbf{v}} = T_{-(0,1)}$. Tomamos el punto $p = (1, 0)$. La imagen del punto p bajo la transformación $T_{\mathbf{v}} \circ A$ es

$$(T_{\mathbf{v}} \circ A)(1, 0) = T_{\mathbf{v}}(A(1, 0)) = T_{\mathbf{v}}(0, 1) = (0, 1) - (0, 1) = (0, 0).$$

Por otro lado, la imagen del punto p bajo la transformación $A \circ T_{\mathbf{v}}$ es

$$(A \circ T_{\mathbf{v}})(1, 0) = A(T_{\mathbf{v}}(1, 0)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, existe otra traslación $T_{\mathbf{w}}$ tal que

$$A \circ T_{\mathbf{w}} = T_{\mathbf{v}} \circ A. \quad (2.10)$$

Proponemos $\mathbf{w} = A^{-1}(\mathbf{v})$

$$A \circ T_{\mathbf{w}}(x, y) = A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{w}\right) = A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + A^{-1}(\mathbf{v})\right) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{v} = (T_{\mathbf{v}} \circ A)(x, y).$$

Observamos que (2.10) muestra dos formas de escribir una isometría.

Ejemplo 16. *Las traslaciones, rotaciones y reflexiones son isometrías.*

Las isometrías $\mathfrak{I}(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{v}$ envían vectores tangentes en vectores tangentes como sigue

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_* : T_{p_0} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow T_{\mathfrak{I}(p_0)} \mathbb{R}^2 \\ (p_0, \mathbf{u}) &\longmapsto (\mathfrak{I}(p_0), A(\mathbf{u})). \end{aligned}$$

Lema 2.5.2. *El conjunto de isometrías $Iso(\mathbb{R}^2)$ es un grupo no conmutativo.*

Demostración. La composición de dos isometrías es otra isometría. Si

$$\mathfrak{I}_1(x, y) = A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{u}, \quad \mathfrak{I}_2(x, y) = A_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{w} \in Iso(\mathbb{R}^2),$$

entonces

$$(\mathfrak{I}_2 \circ \mathfrak{I}_1)(x, y) = \mathfrak{I}_2(A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{u}) = (A_2 A_1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + A_2(\mathbf{u}) + \mathbf{w} \in Iso(\mathbb{R}^2).$$

La propiedad asociativa se satisface para isometrías cualesquiera.

La isometría que cumple ser el elemento neutro es la identidad $\mathfrak{I} = Id$.

La inversa de una isometría $\mathfrak{I}(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{u} \in Iso(\mathbb{R}^2)$ es

$$\mathfrak{I}^{-1}(x, y) = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - A^{-1}(\mathbf{u}).$$

Con lo cual concluimos que $Iso(\mathbb{R}^2)$ es un grupo. Notemos que las reflexiones hacen que dicho grupo no sea conmutativo. \square

Lema 2.5.3. *Las traslaciones, las transformaciones ortogonales y las isometrías preservan el producto punto.*

Demostración. Para traslaciones tenemos que

$$\begin{aligned} \langle (T_{\mathbf{v}})_*(p_0, \mathbf{u}), (T_{\mathbf{v}})_*(p_0, \mathbf{w}) \rangle &= \langle (T_{\mathbf{v}}(p_0), \mathbf{u}), (T_{\mathbf{v}}(p_0), \mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \\ &= \langle (p_0, \mathbf{u}), (p_0, \mathbf{w}) \rangle. \end{aligned}$$

En la demostración de la Proposición 2.3.5, mostramos que las reflexiones preservan el producto punto, es decir

$$\langle (Re_\theta)_*(p_0, \mathbf{u}), (Re_\theta)_*(p_0, \mathbf{w}) \rangle = \langle (p_0, \mathbf{u}), (p_0, \mathbf{w}) \rangle.$$

Para las rotaciones la demostración es similar. Así,

$$\langle (Ro_\theta)_*(p_0, \mathbf{u}), (Ro_\theta)_*(p_0, \mathbf{w}) \rangle = \langle (p_0, \mathbf{u}), (p_0, \mathbf{w}) \rangle.$$

Finalmente verificamos que toda isometría $\mathfrak{I} = T_{\mathbf{v}} \circ A$, con $T_{\mathbf{v}}$ una traslación y A una transformación ortogonal, preserva el producto punto

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{I}_*(p_0, \mathbf{u}), \mathfrak{I}_*(p_0, \mathbf{w}) \rangle &= \langle T_{\mathbf{v}}(A(p_0, \mathbf{u})), T_{\mathbf{v}}(A(p_0, \mathbf{w})) \rangle = \langle A(p_0, \mathbf{u}), A(p_0, \mathbf{w}) \rangle \\ &= \langle (p_0, \mathbf{u}), (p_0, \mathbf{w}) \rangle. \end{aligned} \quad \square$$

Proposición 2.5.4. *Las isometrías de \mathbb{R}^2 preservan:*

- i) *distanzas,*
- ii) *áreas,*
- iii) *ángulos,*
- iv) *rectas.*

Demostración. Mostramos únicamente que las isometrías preservan distancias. En efecto, para $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ vectores en \mathbb{R}^2 tenemos que

$$\begin{aligned} d(\mathfrak{I}(\mathbf{w}), \mathfrak{I}(\mathbf{u})) &= \sqrt{\langle \mathfrak{I}(\mathbf{w}) - \mathfrak{I}(\mathbf{u}), \mathfrak{I}(\mathbf{w}) - \mathfrak{I}(\mathbf{u}) \rangle} \\ &= \sqrt{\langle \mathbf{w} - \mathbf{u}, \mathbf{w} - \mathbf{u} \rangle} \\ &= d(\mathbf{w}, \mathbf{u}). \end{aligned}$$

□

Proposición 2.5.5. *Una transformación que preserva distancias es necesariamente un elemento de $Iso(\mathbb{R}^2)$.*

La demostración de esta proposición se puede consultar en [3, Proposición, p. 34].

Lema 2.5.6. *Una isometría \mathfrak{I} es determinada de manera única por tres puntos no colineales $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$, $p_3 = (x_3, y_3)$ y sus imágenes $p_4(x_4, y_4)$, $p_5 = (x_5, y_5)$, $p_6 = (x_6, y_6)$ respectivamente bajo ella.*

Demostración. Dividimos la prueba en los siguientes tres pasos.

Paso uno. Consideramos los triángulos

$$\Delta_1 = \{p_1, p_2, p_3\} \text{ y } \Delta_2 = \{p_4, p_5, p_6\}.$$

Supongamos que los tres lados del triángulo Δ_1 tienen longitudes distintas

$$d(p_1, p_2) = \delta_1; \quad d(p_2, p_3) = \delta_2; \quad d(p_3, p_1) = \delta_3.$$

Como la isometría \mathfrak{I} preserva distancias, entonces los tres lados del triángulo Δ_2 cumplen que

$$d(p_4, p_5) = \delta_1; \quad d(p_5, p_6) = \delta_2; \quad d(p_6, p_4) = \delta_3.$$

Paso dos. Sin perdida de generalidad, seleccionamos en Δ_1 el lado de longitud δ_1 . La isometría

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (Ro_{-\theta_1} \circ T_{-p_1})(x, y), \quad \theta_1 = arg_0(T_{-p_1}(p_2)), \end{aligned}$$

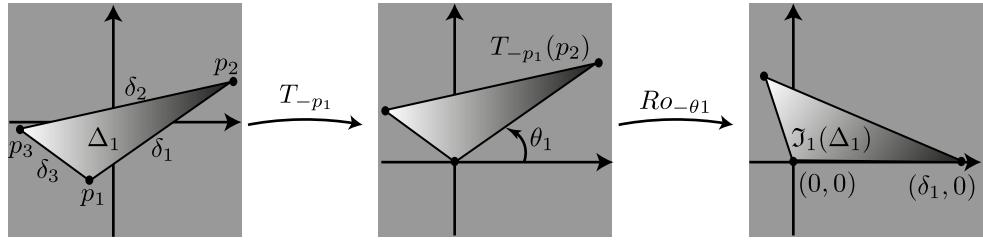


Figura 2.2: Isometría.

lleva el lado seleccionado en la parte positiva del eje x , donde

$$\mathfrak{J}_1(p_1) = (0, 0) \quad \text{y} \quad \mathfrak{J}_1(p_2) = (\delta_1, 0),$$

ver Figura 2.2.

Adicionalmente, la isometría

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (Ro_{-\theta_2} \circ T_{-p_4})(x, y), \quad \theta_2 = arg_0(T_{-p_4}(p_5)), \end{aligned}$$

lleva el lado de longitud δ_1 del triángulo Δ_2 en el eje x , donde

$$\mathfrak{J}_2(p_4) = (0, 0) \quad \text{y} \quad \mathfrak{J}_2(p_5) = (\delta_1, 0).$$

Paso tres. Estudiamos las imágenes de los puntos p_3 bajo la isometría \mathfrak{J}_1 y p_6 bajo la isometría \mathfrak{J}_2 . Consideramos dos círculos, C_1 de radio δ_3 con centro en $(0, 0)$ y C_2 de radio δ_2 con centro en $(\delta_1, 0)$. La intersección de los dos círculos C_1 y C_2 son dos puntos, ver Figura 2.3, además

$$\{\mathfrak{J}_1(p_3) \cup \mathfrak{J}_1(p_6)\} \subset C_1 \cap C_2.$$

Aparecen dos casos.

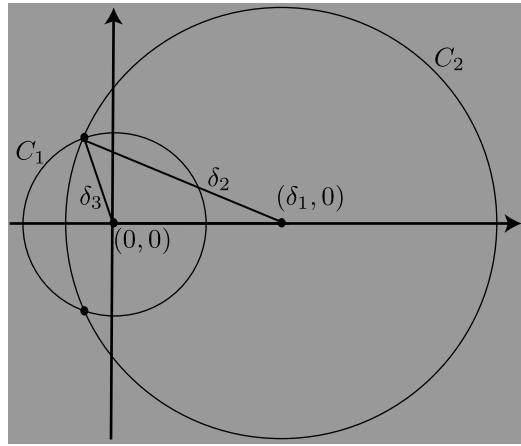
Caso uno. Los puntos $\mathfrak{J}_1(p_3)$ y $\mathfrak{J}_1(p_6)$ son iguales.

En este caso,

$$\mathfrak{J}_1(\Delta_1) = \mathfrak{J}_2(\Delta_2).$$

Así, la isometría buscada es

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (\mathfrak{J}_2^{-1} \circ \mathfrak{J}_1)(x, y). \end{aligned}$$

Figura 2.3: Imágenes de los puntos p_3 bajo la isometría \mathfrak{I}_1 .

Caso dos. Los puntos $\mathfrak{I}_1(p_3)$ y $\mathfrak{I}_1(p_6)$ son distintos.
En este caso aplicamos la reflexión

$$Re_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \theta = 0,$$

al triángulo Δ_2 , obteniendo

$$Re_\theta(\mathfrak{I}_2(\Delta_2)) = \mathfrak{I}_1(\Delta_1).$$

De esta manera, la isometría buscada es

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}' : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (\mathfrak{I}_2^{-1} \circ Re_\theta \circ \mathfrak{I}_1)(x, y), \quad \theta = 0. \end{aligned}$$

□

Las propiedades de preservar e invertir orientación descomponen al conjunto $Iso(\mathbb{R}^2)$ en dos subconjuntos.

i) El conjunto de *isometrías de \mathbb{R}^2 que preservan orientación* es

$$Iso_+(\mathbb{R}^2) = \{\mathfrak{I} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid \mathfrak{I}(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{v}, \quad A \in SO(2, \mathbb{R}), \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2\}.$$

ii) El conjunto de *isometrías de \mathbb{R}^2 que invierten orientación* es

$$Iso_-(\mathbb{R}^2) = \{\mathfrak{I} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid \mathfrak{I}(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{v}, \quad A \in O_-(2, \mathbb{R}), \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2\}.$$

Las rotaciones son isometrías que preservan orientación y las reflexiones son isometrías que invierten orientación.

Lema 2.5.7. *El conjunto $Iso_+(\mathbb{R}^2)$ es un subgrupo no conmutativo del grupo $Iso(2, \mathbb{R})$.* \square

Observación 2.5.8. *El conjunto $Iso_-(\mathbb{R}^2)$ no es grupo.*

2.6. Transformaciones lineales

Definición 2.6.1. El conjunto de *transformaciones lineales invertibles* de \mathbb{R}^2 es

$$GL(2, \mathbb{R}) = \left\{ A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right), \ a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ \det(A) \neq 0 \right\}. \quad (2.11)$$

El acrónimo “*GL*” proviene de “*General Linear*”.

Ejemplo 17. Las rotaciones y reflexiones son transformaciones lineales.

Las transformaciones lineales envían vectores tangentes en vectores tangentes como sigue

$$\begin{aligned} A : T_{p_0} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow T_{A(p_0)} \mathbb{R}^2 \\ (p_0, \mathbf{u}) &\longmapsto (A(p_0), A(\mathbf{u})). \end{aligned}$$

Lema 2.6.2. *El conjunto de transformaciones lineales $GL(2, \mathbb{R})$ es un grupo no conmutativo.*

Demostración. La composición de dos transformaciones lineales invertibles es otra transformación lineal invertible. Si $A, B \in GL(2, \mathbb{R})$, entonces $AB, BA \in GL(2, \mathbb{R})$ y además $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$.

La propiedad asociativa se satisface para transformaciones lineales invertibles cualesquiera.

La transformación lineal que cumple ser el elemento neutro es

$$A = Id \in GL(2, \mathbb{R}).$$

La inversa de una transformación lineal A es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix},$$

donde $\det(A) = ac - bd$. Con lo cual concluimos que $GL(2, \mathbb{R})$ es un grupo. En (2.7) observamos que $GL(2, \mathbb{R})$ no es conmutativo. \square

Observación 2.6.3. *El grupo $O(2, \mathbb{R})$ es un subgrupo de $GL(2, \mathbb{R})$.*

Lema 2.6.4. *Una transformación lineal invertible A es determinada de manera única por dos puntos linealmente independientes $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$ y sus imágenes $p_3 = (x_3, y_3)$, $p_4 = (x_4, y_4)$, también linealmente independientes, respectivamente bajo ella.*

Demostración. Consideramos las transformaciones lineales

$$A_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_2 = \begin{pmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

La transformación lineal A_1 lleva el triángulo canónico

$$\Delta_c = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$$

en el triángulo

$$\Delta_1 = \{(0, 0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$$

y la transformación lineal A_2 lleva el triángulo canónico en el triángulo

$$\Delta_2 = \{(0, 0), (x_3, y_3), (x_4, y_4)\}.$$

Naturalmente la inversa de la transformación lineal A_1 lleva el triángulo Δ_1 en el triángulo canónico, ver Figura 2.4.

Así, la transformación buscada es

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto A_2 A_1^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Corolario 2.6.5. *Existen exactamente dos transformaciones lineales invertibles que llevan*

$$\Delta_1 = \{(0, 0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)\} \quad \text{en} \quad \Delta_2 = \{(0, 0), (x_3, y_3), (x_4, y_4)\}.$$

Demostración. La primera trasformación lineal es A , como se muestra en la demostración del Lema 2.6.4.

Aplicamos la reflexión

$$Re_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

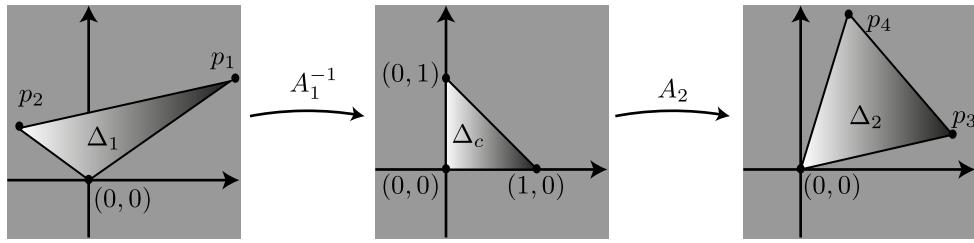


Figura 2.4: Transformación lineal.

al triángulo $\Delta_c = \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$, ella intercambia $(1,0)$ con $(0,1)$. Así, la segunda transformación lineal es

$$\begin{aligned} A' : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto A_2 R e_{\frac{\pi}{4}} A_1^{-1} \left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right). \end{aligned}$$

□

Observación 2.6.6. *Las transformaciones lineales invertibles de \mathbb{R}^2 preservan:*

- i) *rectas,*
- ii) *el origen.*

Las propiedades de preservar e invertir orientación descomponen al conjunto $GL(2, \mathbb{R})$ en dos subconjuntos.

i) El conjunto de *transformaciones lineales invertibles de \mathbb{R}^2 que preservan orientación* es

$$GL_+(\mathbb{R}) = \{A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid A \in GL(2, \mathbb{R}), \det(A) > 0\}.$$

ii) El conjunto de *transformaciones lineales invertibles de \mathbb{R}^2 que invierten orientación* es

$$GL_-(\mathbb{R}) = \{A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid A \in GL(2, \mathbb{R}), \det(A) < 0\}.$$

Las rotaciones son transformaciones lineales que preservan orientación, ellas poseen determinante igual a 1. Las reflexiones son transformaciones lineales que invierten orientación, ellas poseen determinante igual a -1.

Lema 2.6.7. *El conjunto $GL_+(2, \mathbb{R})$ es un subgrupo no conmutativo del grupo $GL(2, \mathbb{R})$.* □

Observación 2.6.8. *El conjunto $GL_-(2, \mathbb{R})$ no es grupo.*

2.7. Transformaciones afines

Definición 2.7.1. El conjunto de *transformaciones afines* de \mathbb{R}^2 es

$$Afín(\mathbb{R}^2) = \left\{ \phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid \phi(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{v}, \ A \in GL(2, \mathbb{R}), \ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \right\}. \quad (2.12)$$

Una *transformación afín* de \mathbb{R}^2 es la composición de una transformación lineal invertible A y una traslación $T_{\mathbf{v}}$

$$T_{\mathbf{v}} \circ A.$$

Mostramos que

$$T_{\mathbf{v}} \circ A \neq A \circ T_{\mathbf{v}}. \quad (2.13)$$

Para esto, consideramos a $A = Ro_{\frac{\pi}{2}}$ y a $T_{\mathbf{v}} = T_{-(0,1)}$. Tomamos el punto $p = (1, 0)$, ver el caso de isometrías. Sin embargo, existe otra traslación $T_{\mathbf{w}}$ tal que

$$A \circ T_{\mathbf{w}} = T_{\mathbf{v}} \circ A. \quad (2.14)$$

Proponemos $\mathbf{w} = A^{-1}(\mathbf{v})$

$$A \circ T_{\mathbf{w}}(x, y) = A \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{w} \right) = A \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + A^{-1}(\mathbf{v}) \right) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{v} = (T_{\mathbf{v}} \circ A)(x, y).$$

Observamos que (2.14) muestra dos formas de escribir una transformación afín.

Las transformaciones afines $\phi(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{v}$ envían vectores tangentes en vectores tangentes como sigue

$$\begin{aligned} \phi : T_{p_0} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow T_{\phi(p_0)} \mathbb{R}^2 \\ (p_0, \mathbf{u}) &\longmapsto (\phi(p_0), A(\mathbf{u})). \end{aligned}$$

Lema 2.7.2. *El conjunto de transformaciones afines $Afín(\mathbb{R}^2)$ es un grupo no conmutativo.*

La demostración es similar a la de isometrías, ver la demostración del Lema 2.5.2.

Lema 2.7.3. *Consideramos dos triángulos con área no cero*

$$\Delta_1 = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\} \quad y \quad \Delta_c = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}.$$

Existen 6 transformaciones afines ϕ_ι que llevan el triángulo Δ_1 al triángulo Δ_c , es decir,

$$\phi_\iota(\Delta_1) = \Delta_c, \quad \iota \in \{1, \dots, 6\}.$$

Demostración. Los siguientes tres pasos, proporcionan por parejas las seis transformaciones afines.

Paso uno. Seleccionamos un vértice en Δ_1 . Sin perdida de generalidad suponemos (x_1, y_1) . Aplicamos la traslación $T_{-(x_1, y_1)}$ al triángulo Δ_1 , obteniendo el triángulo

$$T_{-(x_1, y_1)}(\Delta_1) = \{(0, 0), (x_2 - x_1, y_2 - y_1), (x_3 - x_1, y_3 - y_1)\}.$$

Paso dos. Las transformaciones lineales

$$A_{11} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_{12} = \begin{pmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

satisfacen que

$$A_{11}^{-1}(T_{-(x_1, y_1)}(\Delta_1)) = \Delta_c = A_{12}^{-1}(T_{-(x_1, y_1)}(\Delta_1)).$$

Observamos que $A_{11}^{-1} \neq A_{12}^{-1}$.

Paso tres. Aplicamos los pasos uno y dos a los vértices (x_2, y_2) y (x_3, y_3) en Δ_1 .

Finalmente, las seis transformaciones afines que llevan el triángulo Δ_1 al triángulo Δ_c son

$$\begin{aligned} \phi_\iota : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (A_{\alpha\iota} \circ T_{-(x_\alpha, y_\alpha)})(x, y), \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\alpha \in \{1, 2, 3\}, \quad \iota \in \{1, 2\}.$$

Las transformaciones afines mandan vértices en vértices. Cada transformación afín ϕ_ι determina una permutación de los vértices y viceversa, dados tres puntos en el plano, hay seis permutaciones, ellas corresponden a las seis transformaciones encontradas. \square

Teorema 2.7.4. *Las transformaciones afines mandan triángulos de área no cero, en triángulos de área no cero.*

Demostración. Consideramos dos triángulos en el plano

$$\Delta_1 = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\} \quad \text{y} \quad \Delta_2 = \{(x_4, y_4), (x_5, y_5), (x_6, y_6)\},$$

ambos con área no cero.

De las seis transformaciones afines que llevan Δ_1 en Δ_c , como se muestran en (2.15), fijamos una de ellas, supongamos ϕ_1 . Consideramos las seis transformaciones afines ψ_i^{-1} que llevan Δ_c en Δ_2 . Las seis transformaciones afines son

$$\begin{aligned}\varphi_i : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (\psi_i^{-1} \circ \phi_1)(x, y), \quad i \in \{1, \dots, 6\}.\end{aligned}$$

□

Corolario 2.7.5. *Una transformación afín ϕ es determinada de manera única por tres puntos no colineales $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ y sus imágenes $(x_4, y_4), (x_5, y_5), (x_6, y_6)$ respectivamente bajo ella.* □

Observación 2.7.6. *Las transformaciones afines de \mathbb{R}^2 preservan:*

i) *rectas.*

Las propiedades de preservar e invertir orientación descomponen al conjunto $Afín(\mathbb{R}^2)$ en dos subconjuntos.

i) El conjunto de *transformaciones afines de \mathbb{R}^2 que preservan orientación* es

$$Afín_+(\mathbb{R}^2) = \{\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid \phi(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{v}, \quad A \in GL_+(2, \mathbb{R}), \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2\}.$$

ii) El conjunto de *transformaciones afines de \mathbb{R}^2 que invierten orientación* es

$$Afín_-(\mathbb{R}^2) = \{\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid \phi(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{v}, \quad A \in GL_-(2, \mathbb{R}), \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2\}.$$

Las rotaciones son transformaciones afines que preservan orientación y las reflexiones son transformaciones afines que invierten orientación.

Lema 2.7.7. *El conjunto $Afín_+(\mathbb{R}^2)$ es un subgrupo no conmutativo del grupo $Afín(2, \mathbb{R})$.* □

Observación 2.7.8. *El conjunto $Afín_-(\mathbb{R}^2)$ no es grupo.*

— · · —

Como resumen presentamos la siguiente tabla, que nos dice algunas propiedades que satisfacen los conjuntos y grupos de transformaciones estudiados en el Capítulo 2.

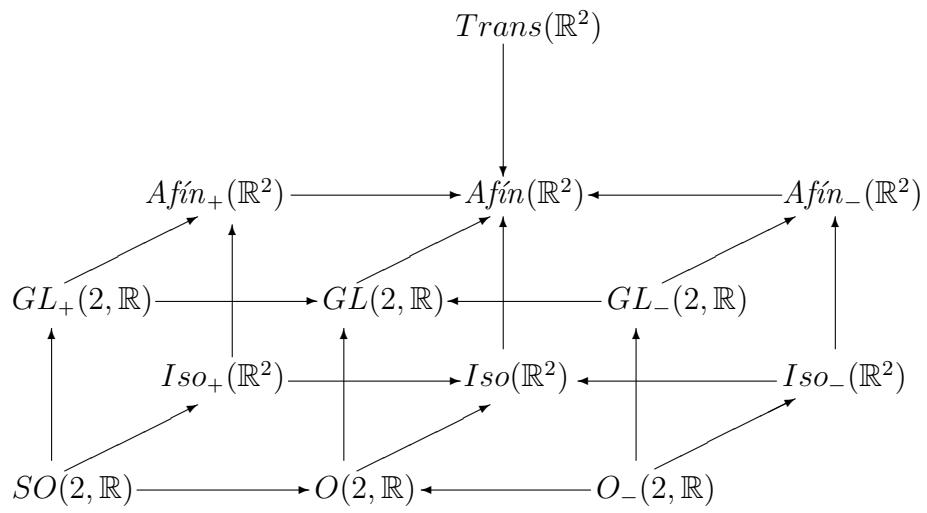
notación	grupo/ comm.	Se preserva;					
		distan- cias	ángulos	áreas	líneas rectas	el origen	orienta- ción
$Trans(\mathbb{R}^2)$	✓/✓	✓	✓	✓	✓	✗	✓
$SO(2, \mathbb{R})$	✓/✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$O_-(2, \mathbb{R})$	✗/✗	✓	✓	✓	✓	✓	✗
$O(2, \mathbb{R})$	✓/✗	✓	✓	✓	✓	✓	✗
$Iso(2, \mathbb{R})$	✓/✗	✓	✓	✓	✓	✗	✗
$Iso_+(2)$	✓/✗	✓	✓	✓	✓	✗	✓
$Iso_-(2, \mathbb{R})$	✗/✗	✓	✓	✓	✓	✗	✗
$GL(2, \mathbb{R})$	✓/✗	✗	✗	✗	✓	✓	✗
$GL_+(2, \mathbb{R})$	✓/✗	✗	✗	✗	✓	✓	✓
$GL_-(2, \mathbb{R})$	✗/✗	✗	✗	✗	✓	✓	✗
$Afín(\mathbb{R}^2)$	✓/✗	✗	✗	✗	✓	✗	✗
$Afín_+(\mathbb{R}^2)$	✓/✗	✗	✗	✗	✓	✗	✓
$Afín_-(\mathbb{R}^2)$	✗/✗	✗	✗	✗	✓	✗	✗

(2.16)

Naturalmente, la “✗” en la tabla significa que no todas las transformaciones del conjunto preservan dicha propiedad.

Debido a que los conjuntos $O_-(2, \mathbb{R})$, $Iso_-(\mathbb{R}^2)$, $GL_-(2, \mathbb{R})$ y $Afín_-(\mathbb{R}^2)$ no son grupos, ellos no son comunes en la literatura. Sin embargo, consideramos incluirlos con el fin de tener más claridad.

Finalmente, el siguiente diagrama muestra las contenções de los conjuntos y grupos estudiados en el Capítulo 2. Para representar que $G \subseteq H$ en el diagrama, usamos que $G \longrightarrow H$.



Capítulo 3

Superficies

Estudiamos superficies topológicas con y sin frontera. Exponemos ejemplos de espacios topológicos que poseen la propiedad de ser superficie topológica, como por ejemplo un cono de un manto. También mencionamos algunos espacios topológicos que no son superficies topológicas como por ejemplo el cono de dos mantos.

3.1. Nociones elementales

El producto cartesiano n -dimensional \mathbb{R}^n provisto de la topología usual τ_u es un *espacio topológico*.

El *disco abierto* de centro en $p_0 \in \mathbb{R}^n$ y radio $r \in \mathbb{R}^+$ es el conjunto

$$D(p_0, r) = \{x \mid \|x - p_0\| < r\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Una *base* para la topología usual es

$$\beta = \{D(p_0, r) \mid p_0 \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}^+\} \subset \tau_u.$$

Los abiertos de \mathbb{R}^n son uniones arbitrarias de elementos de la base β .

Una *base numerable de abiertos* para la topología usual es

$$\beta' = \{D(q, r) \mid q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}^+\} \subset \tau_u.$$

Dos construcciones de topologías:

Primera construcción. Dado un subconjunto S de \mathbb{R}^n . Una topología para S es

$$\tau_S = \{U \cap S \mid U \in \tau_u\}.$$

Ella es la *topología inducida* en S por la topología usual de \mathbb{R}^n .

Naturalmente, una base de abiertos numerable para la topología inducida es

$$\beta'' = \{D(q, r) \cap S \mid D(q, r) \in \beta'\}. \quad (3.1)$$

El espacio topológico (S, τ_S) es un *subespacio* de (\mathbb{R}^n, τ_u) .

Segunda construcción. Dado un subconjunto S de \mathbb{R}^n y una relación de equivalencia “ \sim ” en S , la función de proyección a clases de equivalencia

$$\begin{array}{rcl} \pi : S & \longrightarrow & S/\sim \\ p & \longmapsto & [p] \end{array}$$

existe por teoría de conjuntos, donde $[]$ denotan las clases de equivalencia. Una topología para el conjunto de clases de equivalencia S/\sim es

$$\tau_c = \{U \subset S/\sim \mid \pi^{-1}(U) \in \tau_S\}.$$

esto es, $U \subset S/\sim$ es abierto si y sólo si su preimagen bajo π es abierto en S . La topología τ_c es la *topología cociente*.

El espacio topológico $(S/\sim, \tau_c)$ es llamado *espacio topológico cociente*.

Definición 3.1.1. Una función entre espacios topológicos

$$\begin{array}{rcl} \varphi : (X, \tau) & \longrightarrow & (Y, \tau') \\ p & \longmapsto & \varphi(p) \end{array}$$

es continua si y sólo si la imagen inversa de cualquier abierto $U \in Y$ es abierto en X , es decir, si $U \in \tau'$, entonces $\varphi^{-1}(U) \in \tau$.

Lema 3.1.2. 1. La función de proyección a clases de equivalencia,

$$\begin{array}{rcl} \pi : (S, \tau_S) & \longrightarrow & (S/\sim, \tau_c) \\ p & \longmapsto & [p], \end{array}$$

es continua.

2. Si β es una base para la topología de S , entonces $\pi(\beta)$ es base para la topología de S/\sim .

3. Si β es una base numerable de abiertos para la topología de S , entonces $\pi(\beta)$ es base numerable de abiertos para la topología de S/\sim .

- Demostración.* 1. Por definición sabemos que $U \subset S/\sim$ es abierto si y sólo si su preimagen bajo π es abierto en S , así π es continua.
 2. Consideramos un abierto $U \subset S/\sim$. Por la continuidad de π tenemos que $\pi^{-1}(U) \subset S$ es abierto, él es unión de abiertos de la base β

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{B \in \beta} B.$$

Aplicamos π a la igualdad anterior

$$\pi(\pi^{-1}(U)) = \pi\left(\bigcup_{B \in \beta} B\right).$$

Como π es sobreyectiva, tenemos que

$$U = \bigcup_{B \in \beta} \pi(B).$$

Por ello, $\pi(\beta)$ es base de S/\sim .

3. Recordamos la siguiente definición. *Un conjunto C es numerable si y sólo si existe una función*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow C \\ n &\longmapsto f(n) \end{aligned}$$

sobreyectiva. Como β es numerable, existe una función sobreyectiva

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \beta \\ n &\longmapsto B_n, \end{aligned}$$

donde B_n es un abierto en la base β . Sabemos que la función de proyección es sobreyectiva, por ello, la función composición,

$$\begin{aligned} \pi \circ f : \mathbb{N} &\longrightarrow \pi(\beta) \\ n &\longmapsto \pi(B_n), \end{aligned}$$

es sobreyectiva. Por lo tanto $\pi(\beta)$ es numerable. \square

Observación 3.1.3. Todo subconjunto S de \mathbb{R}^3 provisto de la topología inducida τ_S posee las siguientes propiedades

- i) (S, τ_S) es espacio topológico,
- ii) (S, τ_S) es de Hausdorff,
- iii) τ_S posee una base numerable de abiertos.

Definición 3.1.4. Un *homeomorfismo* entre dos espacios topológicos (X, τ_1) y (Y, τ_2) es una función,

$$\begin{aligned}\varphi : X &\longrightarrow Y \\ p &\longmapsto \varphi(p),\end{aligned}$$

- i) biyectiva,
- ii) continua y
- iii) con inversa, φ^{-1} , continua.

Por simplicidad, escribimos a los espacios topológicos (X, τ_1) y (Y, τ_2) solamente como X e Y respectivamente, siempre y cuando no haya confusión con la topología que tenga cada uno.

Definición 3.1.5. Un espacio topológico (S, τ_S) es *localmente homeomorfo* a \mathbb{R}^2 si para cada punto $q_0 \in S$ existen un abierto $U \subset S$ que contiene a q_0 y un homeomorfismo

$$\begin{aligned}\varphi : U \subset S &\longrightarrow D(p_0, r) \subset \mathbb{R}^2 \\ p &\longmapsto \varphi(p)\end{aligned}$$

tal que

$$\varphi(q_0) = p_0.$$

Ejemplo 18. *Un anillo abierto*

$$\mathcal{A}_{r,R} = \{(x, y) \mid r < x^2 + y^2 < R, \quad r, R \in \mathbb{R}^+\} \subset \mathbb{R}^2$$

es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^2 .

Seleccionamos un punto q_0 en $\mathcal{A}_{r,R}$. Para $r' \in \mathbb{R}^+$ suficientemente pequeña, consideramos el disco abierto $D(q_0, r') \subset \mathcal{A}_{r,R}$. La función identidad

$$\begin{aligned}Id : D(q_0, r') \subset \mathcal{A} &\longrightarrow D(q_0, r') \subset \mathbb{R}^2 \\ p &\longmapsto p\end{aligned}$$

es un homeomorfismo. Por lo tanto $\mathcal{A}_{r,R}$ es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 19. *El disco abierto de centro en el origen y radio $r \in \mathbb{R}^+$*

$$D(\bar{0}, r) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < r\} \subset \mathbb{R}^2$$

es homeomorfo a \mathbb{R}^2 .

Consideramos la función

$$\begin{aligned}\varphi : D(\bar{0}, r) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \frac{r(x, y)}{\sqrt{r^2 - \|(x, y)\|^2}},\end{aligned}$$

donde $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la norma del punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $r(x, y)$ es el producto por escalar. Su función inversa es

$$\begin{aligned}\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow D(\bar{0}, r) \\ (x, y) &\longmapsto \frac{r(x, y)}{\sqrt{r^2 + \|(x, y)\|^2}}.\end{aligned}$$

Verificamos que $(\varphi^{-1} \circ \varphi)(x, y) = (x, y)$, en efecto

$$\begin{aligned}(\varphi^{-1} \circ \varphi)(x, y) &= \frac{r \left(\frac{r(x, y)}{\sqrt{r^2 + \|(x, y)\|^2}} \right)}{\sqrt{r^2 - \left\| \frac{r(x, y)}{\sqrt{r^2 + \|(x, y)\|^2}} \right\|^2}} = \frac{\frac{r^2(x, y)}{\sqrt{r^2 + \|(x, y)\|^2}}}{\sqrt{r^2 - \frac{r^2 \|(x, y)\|^2}{r^2 + \|(x, y)\|^2}}} \\ &= \frac{r^2(x, y)}{\sqrt{r^4}} = (x, y).\end{aligned}$$

De manera similar se verifica que $(\varphi \circ \varphi^{-1})(x, y) = (x, y)$. Observamos que φ y φ^{-1} son continuas. Por ello φ es un homeomorfismo. Por lo tanto, $D(\bar{0}, r)$ es homeomorfo a \mathbb{R}^2 .

Haciendo uso de la traslación $T_{p_0} \in Trans(\mathbb{R}^2)$, cualquier disco abierto $D(p_0, r)$ es homeomorfo a \mathbb{R}^2 .

3.2. Superficies topológicas

Definición 3.2.1. Una *superficie topológica*

$$S = (S, \tau)$$

- i) es un espacio topológico,
- ii) es de Hausdorff,
- iii) posee una base numerable de abiertos y
- iv) es localmente homeomorfa a \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 20. El anillo abierto del Ejemplo 18 y el disco abierto del Ejemplo 19 son superficies topológicas.

Ejemplo 21. *Un cono de un manto*

$$\mathcal{C}_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

es una superficie topológica.

El cono de un manto \mathcal{C}_1 provisto de la topología inducida satisface i), ii) y iii), esto es por la Observación 3.1.3. Falta mostrar que \mathcal{C}_1 es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^2 . Consideramos un punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ en \mathcal{C}_1 . Introducimos la función de proyección sobre el plano xy , este lo denotamos como \mathbb{R}_{xy}^2 ,

$$\begin{aligned}\pi : \mathcal{C}_1 \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}_{xy}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y).\end{aligned}$$

Tomamos un disco abierto $D(\pi(p_0), r) \subset \mathbb{R}_{xy}^2$, ver Figura 3.1.

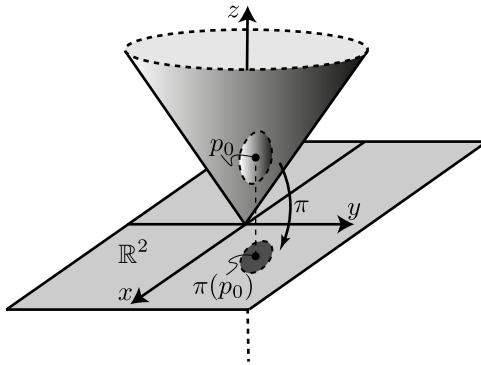


Figura 3.1: Cono de un manto.

Como π es continua, la imagen inversa del disco abierto bajo π ,

$$U = \pi^{-1}(D(\pi(p_0), r)) \cap \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_1,$$

es abierto en \mathcal{C}_1 . La función

$$\begin{aligned}\varphi : U \subset \mathcal{C}_1 &\longrightarrow D((x_0, y_0)) \subset \mathbb{R}_{xy}^2 \\ p &\longmapsto \varphi(p) = \pi(p)\end{aligned}$$

es un homeomorfismo. Por lo tanto, el cono de un manto es una superficie topológica.

El ejemplo anterior se puede generalizar como se muestra en el siguiente corolario.

Corolario 3.2.2. *La gráfica de una función continua*

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y), \end{aligned}$$

donde D es abierto, es una superficie topológica.

Demostración. La demostración es análoga en el ejemplo anterior. Consideramos un punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ en la gráfica de la función f , denotada por G . Tomamos un disco abierto de centro en el punto $\pi(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y radio $r \in \mathbb{R}^+$ suficientemente pequeño, es decir $D((x_0, y_0), r) \subset D$. Como la función de proyección π es continua, tenemos que la intersección, de la imagen inversa del disco abierto $D((x_0, y_0), r)$ bajo π con G , es abierta en G . Finalmente,

$$\begin{aligned} \pi : \pi^{-1}(D((x_0, y_0), r)) \cap G &\longrightarrow D((x_0, y_0), r) \\ (x, y, z) &\longmapsto \pi(x, y, z) = (x, y) \end{aligned}$$

es un homeomorfismo y por la Observación 3.1.3 concluimos la demostración. \square

Para apreciar mejor el concepto de superficie topológica veamos los siguientes ejemplos negativos.

El siguiente ejemplo satisface i), iii) y iv) pero no ii).

Ejemplo 22. *Un espacio topológico que no es de Hausdorff.* Tomamos dos copias del plano cartesiano, estas son

$$P_1 = \{(x, y, z) \mid z = 1\} \text{ y } P_{-1} = \{(x, y, z) \mid z = -1\}.$$

Consideramos la unión disjunta de dichos planos

$$X = P_1 \coprod P_{-1} \subset \mathbb{R}^3.$$

Damos al conjunto X la topología inducida τ_X de la topología usual \mathbb{R}^3 . Definimos una relación de equivalencia “ \sim ” en X como sigue

$$(x, y, 1) \sim (x', y', -1) \iff y, y' > 0 \text{ y } (x, y) = (x', y'),$$

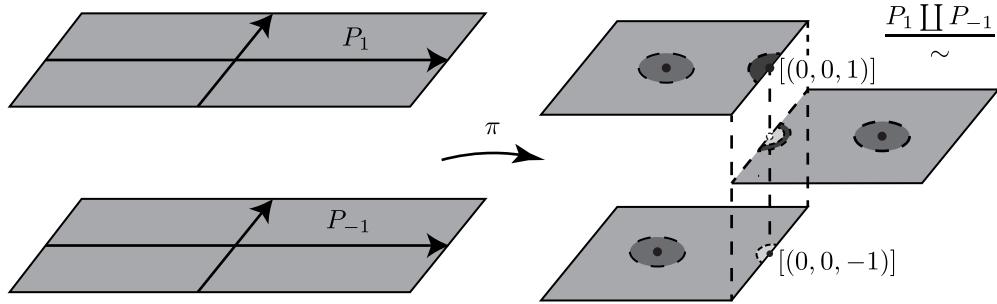


Figura 3.2: Plano no Hausdorff.

en otro caso \$(x, y, z)\$ en \$X\$ es equivalente sólo con él mismo.

Introducimos la función de proyección a clases de equivalencia

$$\begin{aligned}\pi : X &\longrightarrow X/\sim \doteq Y \\ p &\longmapsto [p]\end{aligned}.$$

Por el Lema 3.1.2 inciso 3, el espacio cociente \$Y\$ posee una base numerable de abiertos. Claramente, \$Y\$ es localmente homeomorfo a \$\mathbb{R}^2\$, ver Figura 3.2. Finalmente mostramos que \$Y\$ no es de Hausdorff. Seleccionamos dos puntos distintos en \$Y\$

$$[q_0] = [(0, 0, 1)] \neq [(0, 0, -1)] = [q_1].$$

Consideramos los abiertos

$$U = \{(x, y, 1) \mid x^2 + y^2 < r_1^2, r_1 \in \mathbb{R}^+\} \subset Y \text{ y}$$

$$V = \{(x, y, -1) \mid x^2 + y^2 < r_2^2, r_2 \in \mathbb{R}^+\} \subset Y.$$

Notemos que \$[q_0] \in U\$, \$[q_1] \in V\$ y su intersección \$U \cap V\$ es no vacía, ver Figura 3.2. Por lo tanto \$Y\$ no es superficie topológica.

El siguiente ejemplo satisface i), ii) y iv) pero no iii).

Ejemplo 23. *Un conjunto de planos con altura irracional.* Para cada número irracional \$z_0 \in \mathbb{I}\$ tomamos una copia del espacio topológico \$(\mathbb{R}^2, \tau_u)\$, este es denotado como \$P_{z_0}\$. Consideramos la unión disjunta de todos los planos \$P_{z_0}\$ de la siguiente manera.

$$X = \coprod_{z_0 \in \mathbb{I}} P_{z_0} = \coprod_{z_0 \in \mathbb{I}} \{(x, y, z_0) \mid z_0 \in \mathbb{I}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

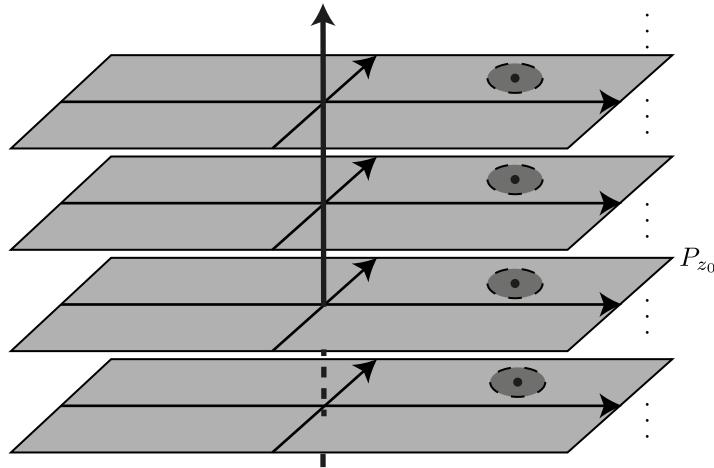


Figura 3.3: Un conjunto de planos irracionales.

Cada elemento de la topología de X es unión de abiertos de cada plano P_{z_0} . Notemos que un disco abierto 2-dimensional

$$D(q_0, r) = \{(x, y, z_0) \mid x^2 + y^2 < r, z_0 \in \mathbb{I} \text{ fijo}\} \subset P_{z_0}$$

es abierto en X . Claramente X es espacio topológico, es de Hausdorff y es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^2 .

Mostramos que X no posee una base numerable de abiertos. Consideramos el abierto

$$U = \coprod_{z_0 \in \mathbb{I}} D((x_0, y_0, z_0), r) \subset X,$$

ver Figura 3.3. Como el conjunto de números irracionales es no numerable, no existe una colección de abiertos numerable tal que su unión sea U . Por ello, τ no posee una base numerable de abiertos. Por lo tanto, X no es superficie topológica.

El siguiente ejemplo satisface i), ii) y iii) pero no iv).

Ejemplo 24. *Un cono de dos mantos*

$$\mathcal{C}_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2\} \subset \mathbb{R}^3.$$

El cono de dos mantos provisto de la topología inducida satisface i), ii) y iii), esto es por la Observación 3.1.3. Mostramos que \mathcal{C}_2 no es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^2 . Por contradicción. Supongamos que para el origen $\bar{0} \in \mathcal{C}_2$ existe un abierto $U \subset \mathcal{C}_2$ que lo contiene y un homeomorfismo

$$\varphi : U \subset \mathcal{C}_2 \longrightarrow D(p_0, r) \subset \mathbb{R}^2$$

tal que $\varphi(\bar{0}) = p_0$. Hacemos uso de una propiedad topológica¹, la conexidad. Notemos que $D((p_0), r) \setminus \{p_0\}$ es conexo, pero $U \setminus \{\bar{0}\}$ no es conexo, esto produce la contradicción. Por lo tanto, \mathcal{C}_2 no es superficie topológica.

3.3. Superficies topológicas con frontera

Denotamos un medio plano o semiplano superior con frontera como

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \mid 0 \leq y\} \subset \mathbb{R}^2.$$

La frontera de \mathbb{H}^2 es

$$\partial\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \mid y = 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

El conjunto \mathbb{H}^2 no es superficie topológica, pero da origen a otra clase natural de “superficies topológicas”.

Definición 3.3.1. *El medio disco abierto con diámetro* es

$$D(\bar{0}, r) \cap \mathbb{H}^2.$$

Observación 3.3.2. *El medio disco abierto con diámetro $D(\bar{0}, r) \cap \mathbb{H}^2$ es homeomorfo a \mathbb{H}^2 . Naturalmente, haciendo uso de una isometría, cualquier medio disco abierto con diámetro es homeomorfo a \mathbb{H}^2 . El homeomorfismo es como en el Ejemplo 19.*

Definición 3.3.3. Una superficie topológica con frontera

$$S = (S, \tau)$$

- i) es un espacio topológico,
- ii) es de Hausdorff,
- iii) posee una base numerable de abiertos y
- iv) es localmente homeomorfa a \mathbb{R}^2 o a \mathbb{H}^2 .

¹Una propiedad topológica es aquella propiedad que se preserva bajo homeomorfismos.

Con esta definición, $\overline{D(\bar{0}, r)} \subset \mathbb{R}^2$ es una superficie topológica con frontera.

Ejemplo 25. *El disco cerrado*

$$\overline{D(\bar{0}, r)} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq r\} \subset \mathbb{R}^2$$

es una superficie topológica con frontera la circunferencia de radio r .

Para probar que $\overline{D(\bar{0}, r)}$ es una superficie topológica con frontera introducimos coordenadas polares. Consideramos el plano cartesiano menos un rayo

$$P = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

y el rectángulo

$$R = \{(\rho, \theta) | 0 < \rho, -\pi < \theta < \pi\} \subset \mathbb{R}^2$$

como muestra la Figura 3.4.

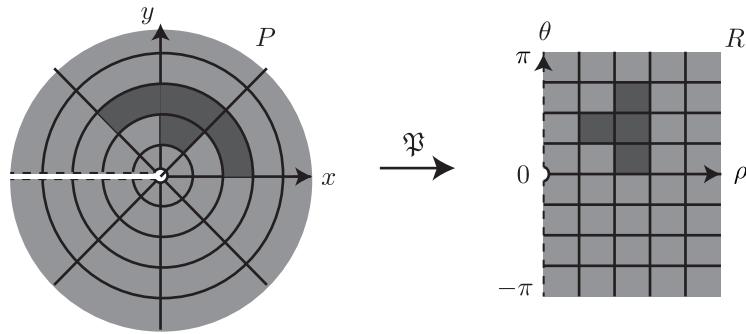


Figura 3.4: Coordenadas polares

La función de coordenadas polares es

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} : P &\longrightarrow R \\ (x, y) &\longmapsto (\sqrt{x^2 + y^2}, \arg_{-\pi}(x, y)) \end{aligned}$$

con inversa

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}^{-1} : R &\longrightarrow P \\ (\rho, \theta) &\longmapsto (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \end{aligned}$$

es un homeomorfismo.

Para probar que el disco cerrado es superficie con frontera, mostramos únicamente que para todo punto q_0 en su frontera, $\overline{D(\bar{0}, r)}$ es localmente homeomorfo a \mathbb{H}^2 .

Aplicamos la rotación $Ro_{-\theta}$, $\theta = \arg_0(q_0)$, al disco cerrado $\overline{D(\bar{0}, r)}$, llevando el punto q_0 a $(r, 0)$, ver Figura 3.5 inciso a). Quitamos un rayo al disco cerrado $Ro_{-\theta}(\overline{D(\bar{0}, r)})$, esto es

$$P = Ro_{-\theta}(\overline{D(\bar{0}, r)}) \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Aplicamos al conjunto P la función \mathfrak{P} , obteniendo el rectángulo

$$R = \{(\rho, \theta) \mid 0 < \rho \leq r, -\pi < \theta < \pi\} \subset \mathbb{R}^2,$$

con $\mathfrak{P}(r, 0) = (r, 0) \in R$ ver Figura 3.5 inciso b).

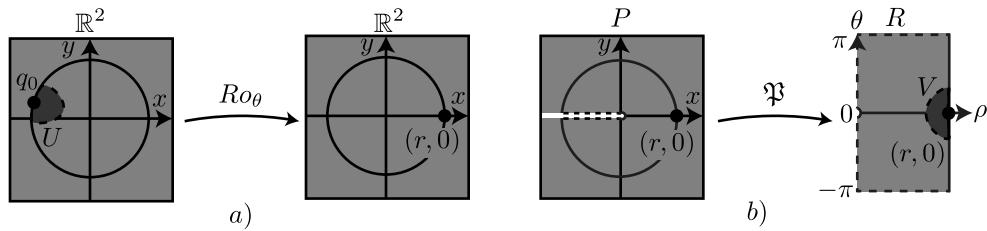


Figura 3.5: a) rotación Ro_θ y b) la función de coordenadas polares \mathfrak{P} .

Consideramos el abierto

$$V = D((r, 0), r_0) \cap R \subset R, \text{ con } r_0 < r, \pi$$

y su imagen inversa

$$(Ro_\theta \circ \mathfrak{P}^{-1})(V) = U.$$

La función

$$\begin{aligned} \varphi : U \subset \overline{D(\bar{0}, r)} &\longrightarrow V \subset R \\ (x, y) &\longmapsto (\mathfrak{P} \circ Ro_{-\theta})(x, y) \end{aligned}$$

es el homeomorfismo deseado. Por lo tanto, el disco cerrado $\overline{D(\bar{0}, r)}$ es una superficie topológica con frontera.

Ejemplo 26. *Un anillo cerrado*

$$\mathcal{A}_{r,R} = \{(x, y) \mid r \leq x^2 + y^2 \leq R\} \subset \mathbb{R}^2$$

es una superficie topológica con frontera.

Usando coordenadas polares, el anillo menos un rayo

$$\mathcal{A}_{r,R} \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

se puede transformar en un rectángulo

$$R = \{(\rho, \theta) \mid r < \rho < R, -\pi < \theta < \pi\} \subset \mathbb{R}^2.$$

La prueba es similar al ejemplo anterior.

Ejemplo 27. *Un triángulo*

$$\Delta \subset \mathbb{R}^2,$$

provisto de

- i) tres vértices v_1, v_2, v_3 ,
 - ii) tres aristas a_1, a_2, a_3 y
 - iii) una cara Δ con área positiva,
- es una superficie topológica con frontera $\partial\Delta = v_1 \cup a_1 \cup v_2 \cup a_2 \cup v_3 \cup a_3$.

Para probar que el triángulo es superficie con frontera, mostramos únicamente que para cada vértice v_α , Δ es localmente homeomorfo a \mathbb{H}^2 .

Consideramos el sector angular $\mathcal{S} = D(v_\alpha, r) \cap \Delta$, donde r cumple que $\mathcal{S} \subset \Delta$, notemos que \mathcal{S} es abierto. Supongamos que el ángulo del sector angular \mathcal{S} es β . Aplicamos una isometría \mathcal{I} al abierto \mathcal{S} , llevando un lado del sector angular \mathcal{S} en el eje x , como muestra la Figura 3.6.

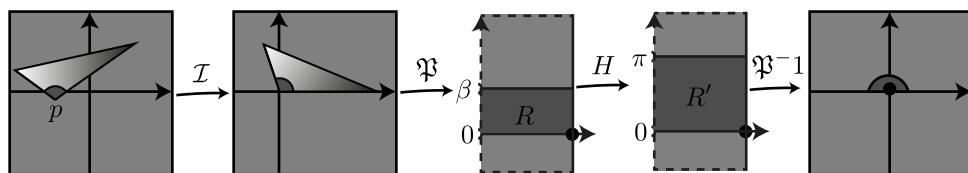


Figura 3.6: Función composición $\mathfrak{P}^{-1} \circ H \circ \mathfrak{P} \circ \mathcal{I}$.

Hacemos un cambio de coordenadas rectangulares a coordenadas polares bajo la función \mathfrak{P} . La imagen del sector angular $\mathcal{I}(\mathcal{S})$ bajo \mathfrak{P} es el rectángulo

$$R = \{(\rho, \theta) | \rho < r, 0 \leq \theta \leq \beta\} \subset \mathbb{R}^2,$$

como muestra la Figura 3.6, él es abierto. A R le aplicamos la función

$$\begin{aligned} H : R &\longrightarrow R' = \{(\rho, \theta) | \rho < r, 0 \leq \theta \leq \pi\} \subset \mathbb{R}^2 \\ (\rho, \theta) &\longmapsto (\rho, \frac{\pi}{\beta}\theta), \end{aligned}$$

para obtener el rectángulo R' . Finalmente, bajo la función \mathfrak{P}^{-1} llevamos el rectángulo R' al medio disco con frontera como muestra la Figura 3.6. De lo anterior concluimos que Δ es superficie topológica con frontera.

De manera similar al ejemplo anterior, tenemos que un *polígono* $P \subset \mathbb{R}^2$ es una superficie topológica con frontera.

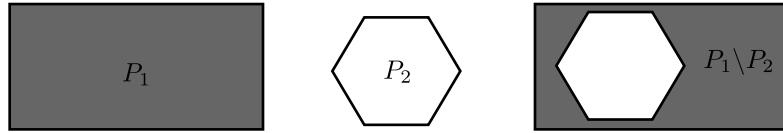


Figura 3.7: Región poligonal.

También, una *región poligonal* construida de la siguiente manera *un polígono* $P_1 \subset \mathbb{R}^2$ *menos otro polígono* $P_2 \subset \mathbb{R}^2$, con $\partial P_1 \cap \partial P_2 = \phi$, como muestra la Figura 3.7, es una superficie topológica con frontera.

Lema 3.3.4. *Si $S \subset \mathbb{R}^2$ una superficie topológica con frontera D , entonces la gráfica de una función continua*

$$\begin{aligned} f : S \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y), \end{aligned}$$

es una superficie topológica con frontera $f(D)$, ver Figura 3.8.

La demostración se sigue del Corolario 3.2.2.

Los siguientes ejemplos no satisfacen una condición de la definición de superficie topológica con frontera.

El siguiente ejemplo satisface i), iii) y iv) pero no ii).

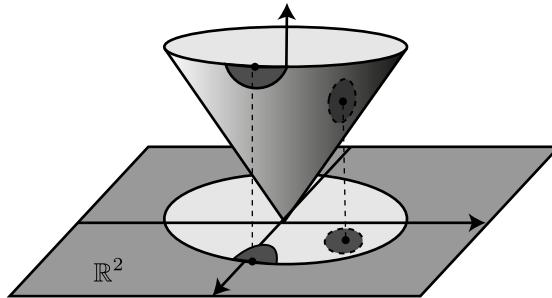


Figura 3.8: Gráfica de una función con frontera.

Ejemplo 28. Una banda no de Hausdorff.

Tomamos dos bandas en \mathbb{R}^3 $B_1 = [-1, 1] \times \mathbb{R} \times \{1\}$ y $B_{-1} = [-1, 1] \times \mathbb{R} \times \{-1\}$. Consideramos la unión

$$X = B_1 \cup B_{-1} = [-1, 1] \times \mathbb{R} \times \{1\} \coprod [-1, 1] \times \mathbb{R} \times \{-1\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Definimos una relación de equivalencia “~” en X como sigue

$$(x, y, 1) \sim (x', y', -1) \iff y, y' > 0 \text{ y } (x, y) = (x', y'),$$

en otro caso (x, y, z) en X es equivalente sólo con él mismo. Introducimos la función de proyección a clases de equivalencia

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow X/\sim \doteq Y \\ p &\longmapsto [p]. \end{aligned}$$

El espacio topológico Y no es una superficie topológica con frontera.

Basta seguir la idea del Ejemplo 22.

El siguiente ejemplo satisface i), ii) y iv) pero no iii).

Ejemplo 29. Un conjunto de bandas irracionales

$$X = \coprod_{z_0 \in \mathbb{I}} \{(x, y, z_0) \mid -1 \leq x \leq 1, z_0 \in \mathbb{I}\} \subset \mathbb{R}^3$$

no es una superficie topológica con frontera. Basta seguir la idea del Ejemplo 23.

El siguiente ejemplo satisface i), ii) y iii) pero no iv).

Ejemplo 30. El *moño*

$$\mathcal{M} = \{xy \leq 0\} \subset \mathbb{R}^2,$$

(que es el segundo y cuarto cuadrante del plano, unión los ejes de coordenadas) no es una superficie topológica con frontera. Basta seguir la idea del Ejemplo 24.

3.4. Ensamblado de triángulos

Conviene precisar que para nosotros *pegar* o *ensamblar* conjuntos significa lo siguiente. Consideramos la unión disjunta de n conjuntos

$$\coprod_{\alpha=1}^n U_\alpha,$$

introducimos en ella una relación de equivalencia \sim .

La proyección a clases de equivalencia

$$\begin{aligned} \pi : \coprod_{\alpha=1}^n U_\alpha &\longrightarrow \frac{\coprod_{\alpha=1}^n U_\alpha}{\sim} \\ p &\longmapsto [p] \end{aligned}$$

existe por teoría elemental de conjuntos. El corchete $[]$ denota las clases de equivalencia.

El conjunto de clases de equivalencia

$$\frac{\coprod_{\alpha=1}^n U_\alpha}{\sim}$$

con la topología cociente es el *pegado* de los conjuntos U_α bajo la relación de equivalencia \sim .

Esto es a nivel de conjuntos, ahora vamos a extenderlo a nivel topológico.

De ahora en adelante consideramos a un *triángulo* como en el Ejemplo 27. Es indispensable considerar que las caras y las aristas de un triángulo están orientados. Una *orientación* en la cara Δ de un triángulo equivale a una orientación de las aristas de su frontera. Hay dos posibilidades.

- Una orientación es *positiva*, si recorremos la frontera del triángulo en sentido contrario de las manecillas del reloj. En este caso las aristas orientadas las denotamos por a_α . La manera de etiquetar a los vértices y a las aristas es como muestra la Figura 3.9, inciso a).
- Una orientación es *negativa*, si recorremos la frontera del triángulo en sentido a las manecillas del reloj. En este caso las aristas orientadas las denotamos por a_α^{-1} . La manera de etiquetar a los vértices y a las aristas es como muestra la Figura 3.9, inciso b).

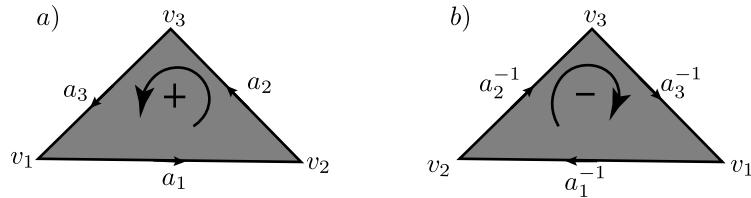


Figura 3.9: Orientaciones de un triángulo.

Consideramos dos triángulos

$$\Delta_1 = \{v_1, v_2, v_3\} \text{ y } \Delta_2 = \{v_4, v_5, v_6\}.$$

Señalamos dos aristas

- $a_\alpha \subset \Delta_1$ con extremo inicial v_α y con extremo final $v_{\alpha+1}$ y
- $a_\beta \subset \Delta_2$ con extremo inicial v_β y con extremo final $v_{\beta+1}$.

Si $\alpha = 3$ y $\beta = 6$, entonces definimos $v_{\alpha+1} = v_1$ y $v_{\beta+1} = v_4$.

Hay cuatro posibilidades de ensamblar Δ_1 con Δ_2 lo largo de las aristas a_α y a_β , ver Figura 3.10.

Observación 3.4.1. *Si los triángulos no son orientados, entonces hay dos posibilidades de ensamblar Δ_1 con Δ_2 lo largo de las aristas a_α y a_β .*

- i) Los triángulos poseen orientación positiva, ver inciso a).
- ii) El triángulo Δ_1 posee orientación positiva y Δ_2 orientación negativa, ver inciso b).
- iii) El triángulo Δ_1 posee orientación negativa y Δ_2 orientación positiva, ver inciso c).
- iv) Los triángulos poseen orientación negativa, ver inciso d).

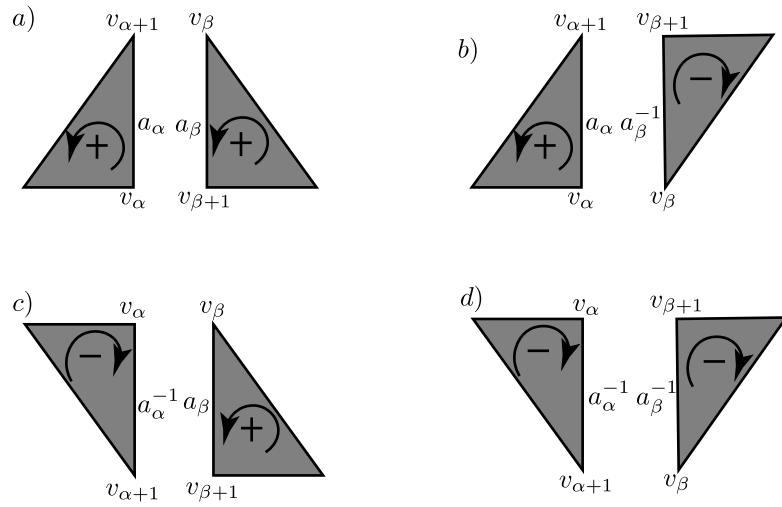


Figura 3.10: Formas de pegar dos triángulos orientados.

Mostramos como ensamblar los triángulos Δ_1 y Δ_2 .

- i) Tomamos el caso en que los dos triángulos poseen orientación positiva.
Introducimos una función lineal

$$\begin{aligned} I_{\alpha\beta} : a_\alpha &\longrightarrow a_\beta \\ p &\longmapsto I_{\alpha\beta}(p), \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde

$$I_{\alpha\beta}(v_\alpha) = v_{\beta+1} \quad \text{y} \quad I_{\alpha\beta}(v_\alpha + 1) = v_\beta.$$

Dicha función lineal $I_{\alpha\beta}$ determina una relación de equivalencia \sim en $\Delta_1 \coprod \Delta_2$ como sigue. Dados $p \in a_\alpha$ y $q \in a_\beta$

$$p \sim q \iff I_{\alpha\beta}(p) = q,$$

en otro caso todo punto $p \in \Delta_1$ o $q \in \Delta_2$ es equivalente sólo con él mismo.

El conjunto de clases de equivalencia

$$\frac{\Delta_1 \coprod \Delta_2}{\sim}$$

es el ensamblado de los dos triángulos a lo largo de una arista. Para el caso *iv)* el ensamblado de los dos triángulos es similar.

iii) Ahora tomamos el caso en que Δ_1 posee orientación negativa y Δ_2 orientación positiva.

Introducimos una función lineal

$$\begin{aligned} I_{\alpha^{-1}\beta} : a_\alpha^{-1} &\longrightarrow a_\beta \\ p &\longmapsto I_{\alpha^{-1}\beta}(p), \end{aligned}$$

donde

$$I_{\alpha^{-1}\beta}(v_\alpha) = v_\beta \quad \text{y} \quad I_{\alpha^{-1}\beta}(v_\alpha + 1) = v_{\beta+1}.$$

La función lineal $I_{\alpha^{-1}\beta}$ determina una relación de equivalencia \sim en $\Delta_1 \coprod \Delta_2$ como en el caso anterior.

El conjunto de clases de equivalencia

$$\frac{\Delta_1 \coprod \Delta_2}{\sim} \tag{3.3}$$

es el ensamblado de los dos triángulos a lo largo de una arista.

Lema 3.4.2. *De ensambladura para aristas.* *El conjunto de clases de equivalencia (3.3)*

$$\frac{\Delta_1 \coprod \Delta_2}{\sim} \doteq S,$$

con la topología cociente es una superficie topológica con frontera.

Demostración. Sin perdida de generalidad consideramos el caso en que los dos triángulos poseen orientación positiva. La demostración para los otros tres casos es análoga.

Para el triángulo Δ_1 existe una transformación afín ϕ_1 , ver Lema 2.7.4, tal que $\phi_1(\Delta_1)$ es el triángulo $\Delta_c = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$ y $\phi_1(a_\alpha)$ es la arista de $(0,1)$ a $(1,0)$.

Análogamente, para el triángulo Δ_2 existe una transformación afín ϕ_2 tal que $\phi_2(\Delta_2)$ es el triángulo $\Delta_3 = \{(0,1), (1,0), (1,1)\}$ y $\phi_2(a_\beta)$ es el segmento de recta de $(0,1)$ a $(1,0)$.

Ambas transformaciones afines satisfacen la igualdad de sus imágenes

$$\phi_1(a_\alpha) = \phi_2(a_\beta).$$

Consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1 \coprod \Delta_2 & \xrightarrow{\pi} & S \\ \Phi \downarrow & & \nearrow \mathcal{R} \\ [0,1] \times [0,1], & & \end{array} \quad (3.4)$$

donde la función Φ está determinada por ϕ_1 y ϕ_2 como sigue

$$\begin{aligned} \Phi : \Delta \coprod \Delta &\longrightarrow [0,1] \times [0,1] \\ p &\longmapsto \begin{cases} \phi_1(p) & \text{si } p \in \Delta_1 \\ \phi_2(p) & \text{si } p \in \Delta_2 \end{cases} \end{aligned}$$

y la función \mathcal{R} , que la llamamos de reconocimiento, está determinada como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : [0,1] \times [0,1] &\longrightarrow S \\ (x,y) &\longmapsto \begin{cases} \pi \circ \phi_1^{-1}(x,y) & \text{si } y \leq -x + 1 \\ \pi \circ \phi_2^{-1}(x,y) & \text{si } y > -x + 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Afirmamos que \mathcal{R} es un homeomorfismo.

Observamos que para todo punto p_0 en la arista de $(1,0)$ a $(0,1)$, Φ^{-1} no es función. Es claro observar que $\Phi^{-1}(p_0)$ posee dos imágenes $\phi_1^{-1}(x,y) \in \Delta_1$ y $\phi_2^{-1}(x,y) \in \Delta_2$. Afortunadamente, al aplicarles π obtenemos que

$$\pi(\phi_1(x_0, y_0)) = \pi(\phi_2(x_0, y_0)).$$

Así, \mathcal{R} está bien definida.

Haciendo un razonamiento análogo a \mathcal{R} , su inversa \mathcal{R}^{-1} , está bien definida. Consideramos un abierto $U \subset S$. Para mostrar que \mathcal{R} es continua consideramos dos casos.

Caso uno : Supongamos sin pérdida de generalidad que U está en el interior de $\pi(\Delta_1)$. Recordemos que U es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en $\Delta_1 \coprod \Delta_2$. Como ϕ_1 y ϕ_2 son homeomorfismos, tenemos que $\Phi(\pi^{-1}(U)) \doteq \mathcal{R}^{-1}(U)$ es abierto en $[0,1] \times [0,1]$.

Caso dos: Si U intersecta a $\pi(a_\alpha) = \pi(a_\beta)$, entonces $\pi^{-1}(U)$ es unión de dos abiertos disjuntos $V \subset \Delta_1$ y $W \subset \Delta_2$, es decir

$$\pi^{-1}(U) = V \coprod W.$$

Finalmente $\Phi(V \coprod W) = \Phi(\pi^{-1}(U)) \doteq \mathcal{R}^{-1}(U)$ es abierto en $[0, 1] \times [0, 1]$. De lo anterior, \mathcal{R} es un homeomorfismo. Como $[0, 1] \times [0, 1]$ es superficie topológica con frontera, concluimos que S también lo es. \square

En el resto de este trabajo, la mayor parte es ensamblar triángulos a lo largo de una arista. A priori las etiquetas para las aristas y vértices de dos triángulos Δ_1 y Δ_2 no son las mismas. Por simplicidad, dos aristas ensambladas las etiquetamos con la misma letra a_α . Recordemos que hay dos casos principales:

1. Identificar a_α con a_α .
2. Identificar a_α con a_α^{-1} .

Ahora vamos a ensamblar más de dos triángulos.

Consideramos una colección finita de triángulos orientados

$$\{\Delta_1, \dots, \Delta_\alpha, \Delta_{\alpha+1}, \dots, \Delta_n\} \quad n \geq 3.$$

De cada triángulo Δ_α , seleccionamos un vértice y las dos aristas que inciden en él.

Etiquetamos el vértice seleccionado como v_α y las aristas como a_α y $a_{\alpha+1}$ en Δ_α . Si $\alpha = n$, entonces definimos $a_{\alpha+1} = a_1$. La arista a_α se ubica recorriendo la frontera del triángulo Δ_α en sentido antihorario. La Figura 3.11 ilustra como etiquetar la dos aristas a_α y $a_{\alpha+1}$.

Ensamblamos por parejas las $2n$ aristas seleccionadas. Las funciones lineales

$$\begin{aligned} I_{\alpha^{\pm 1}\alpha^{\pm 1}} : a_\alpha^{\pm 1} &\longrightarrow a_\alpha^{\pm 1} \\ p &\longmapsto I_{\alpha^{\pm 1}\alpha^{\pm 1}}(p), \end{aligned} \tag{3.6}$$

determinan una relación de equivalencia \sim . El índice ± 1 depende de la orientación de cada triángulo. La relación de equivalencia es

- 1) Todos los vértices seleccionados v_1, \dots, v_n se identifican en un sólo punto q .
- 2) La arista $a_\alpha \subset \Delta_\alpha$ que tiene extremo v_α se identifica con la arista $a_\alpha \subset \Delta_{\alpha+1}$ que tiene extremo $v_{\alpha+1}$.

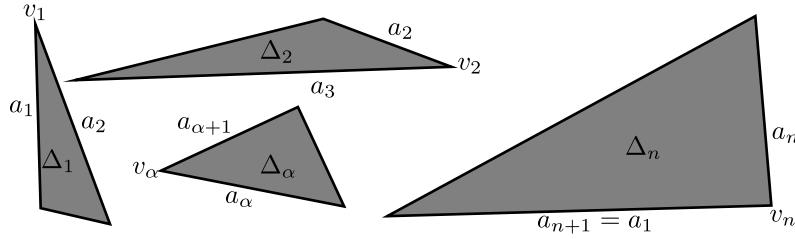


Figura 3.11: Etiquetación de las dos aristas $a_\alpha, a_{\alpha+1}$ que inciden en el vértice v_α .

3) Se realiza esta identificación de manera cíclica, es decir, la arista $a_{n+1} \subset \Delta_n$ que tiene extremo v_n se identifica con la arista $a_1 \subset \Delta_1$ que tiene extremo v_1 .

El conjunto de clases de equivalencia

$$\frac{\coprod_{\alpha=1}^n \Delta_\alpha}{\sim} \quad (3.7)$$

es el ensamblado de los $n \geq 3$ triángulos, ver Figura 3.12.

Lema 3.4.3. De ensambladura para vértices. *El conjunto de clases de equivalencia (3.7)*

$$\frac{\coprod_{\alpha=1}^n \Delta_\alpha}{\sim} \doteq S,$$

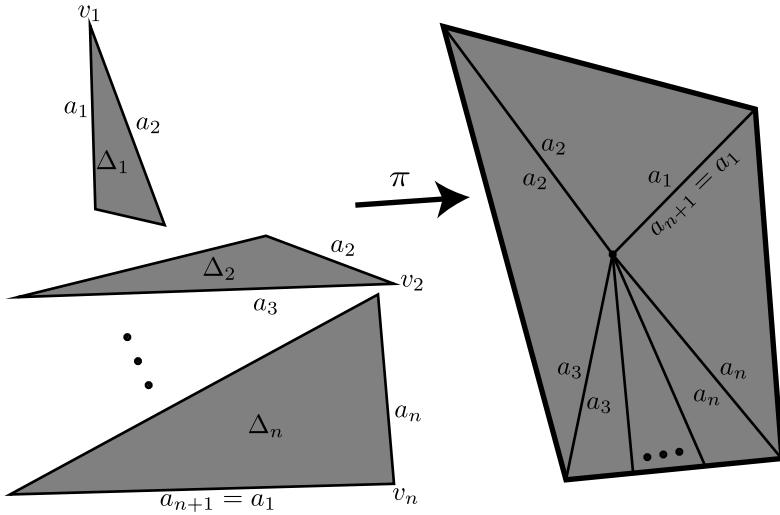
con la topología cociente es una superficie topológica con frontera.

Demostración. Seguimos la idea de la demostración del Lema 3.4.2.

Como los triángulos $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ no son del mismo tamaño, procedemos de la siguiente manera. Para cada triángulo Δ_α existe una transformación afín ϕ_α , ver Lema 2.7.4, tal que $\phi_1(\Delta_\alpha)$ es el triángulo isósceles de vértices en el círculo unitario, estos son

$$\{(0, 0), (\cos(2\pi(\alpha - 1)/n), \sin(2\pi(\alpha - 1)/n)), (\cos(2\pi\alpha/n), \sin(2\pi\alpha/n))\}.$$

Consideramos el siguiente diagrama

Figura 3.12: Ensamblado de $n \leq 3$ triángulos.

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{\alpha=1}^n \Delta_\alpha & \xrightarrow{\pi} & S \\
 \downarrow \Phi & & \nearrow \mathcal{R} \\
 P & &
 \end{array} \tag{3.8}$$

donde P es un polígono regular en \mathbb{R}^2 con centro en el origen y un vértice en $(1, 0)$.

La función Φ usa a ϕ_α para toda $1 \leq \alpha \leq n$

$$\begin{aligned}
 \Phi : \coprod_{\alpha=1}^n \Delta_\alpha &\longrightarrow P \\
 r &\longmapsto \phi_\alpha(r) \text{ si } r \in \Delta_\alpha.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

La función de reconocimiento

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R} : P &\longrightarrow S \\
 p &\longmapsto \pi(\phi_\alpha^{-1}(p)) \quad p \in \Delta_\alpha
 \end{aligned}$$

está bien definida y es biyección.

Para mostrar la continuidad de \mathcal{R} , basta con tomar un abierto $U \subset S$ tal que $q \in U$.

Es claro que, $\pi^{-1}(U)$ es unión de abiertos disjuntos $V_\alpha \subset \Delta_\alpha$ para toda $\alpha \in \{1, \dots, n\}$, por ello

$$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup V_\alpha$$

es abierto. Así, $\Phi(\bigsqcup V_\alpha) = \Phi(\pi^{-1}(U)) \doteq \mathcal{R}^{-1}(U)$ es abierto en P .

Finalmente, como P es superficie topológica con frontera, concluimos que S también lo es, con lo cual queda terminada la prueba. \square

3.5. Construcción de superficies topológicas a partir de un cuadrado

Finalmente probamos dos lemas que nos ayudan a construir nuevas superficies topológicas con y sin frontera, como por ejemplo un cilindro, una banda de Möbius, una esfera, un toro, un plano proyectivo y una botella de Klein.

Usamos los dos lemas anteriores 3.3 y 3.7 para construir nuevas superficies topológicas con o sin frontera. Consideramos el cuadrado con frontera $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, obtenido de ensamblar dos triángulos orientados, él es una superficie topológica con frontera. En detalle $[0, 1] \times [0, 1]$ posee

- una cara $(0, 1) \times (0, 1)$
- una frontera

$$\partial([0, 1] \times [0, 1]) = [0, 1] \times \{0\} \cup [0, 1] \times \{1\} \cup \{0\} \times [0, 1] \cup \{1\} \times [0, 1].$$

Existen varias maneras de pegar la frontera para obtener diferentes superficies topológicas con o sin frontera.

La notación $(a, b) \sim (c, d)$ significa que los puntos (a, b) y (c, d) en la frontera de $[0, 1] \times [0, 1]$ son equivalentes y un punto $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$ es equivalente sólo con él mismo.

Definición 3.5.1. Una *superficie triangulada* es un espacio cociente

$$S = \frac{\coprod_{\alpha \in \mathcal{I}} \Delta_\alpha}{\sim}, \quad (3.10)$$

donde en la unión disjunta de los triángulos, la relación de equivalencia proviene del ensamblado de las aristas

$$p \sim q \iff \begin{cases} p \in \partial \Delta_\alpha \text{ está identificado con } q \in \partial \Delta_\beta \\ i.e. I_{\alpha\beta}(p) = q. \end{cases}$$

en otro caso p está relacionada sólo con él mismo.

Por abuso de notación los conceptos de superficie topológica y superficie triangulada son usados como equivalentes.

Ejemplo 31. *El toro.* Consideramos en $[0, 1] \times [0, 1]$ la relación de equivalencia

$$(x, 0) \sim (x, 1), \quad (0, y) \sim (1, y), \quad 0 \leq x, y \leq 1.$$

La superficie topológica que obtenemos es el toro

$$\frac{[0, 1] \times [0, 1]}{\sim} \stackrel{\sim}{=} \mathbb{T}^2,$$

ver Figura 3.13.

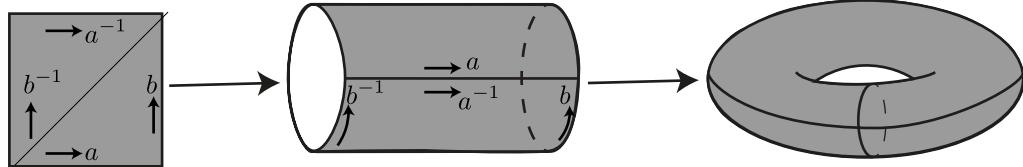


Figura 3.13: Construcción del toro.

El conjunto $[0, 1] \times [0, 1]/\sim$ es un espacio topológico de Hausdorff con base numerable de abiertos.

Para $[p] = [(x_0, y_0)] \in [0, 1] \times [0, 1]/\sim$, $x_0, y_0 \neq 0, 1$, consideremos el abierto U que contenga a $[p]$ de tal manera que $\pi^{-1}(U) = D(p, r)$, $r = \min\{distancias\ de\ p\ a\ cada\ arista\}$. Claramente en el punto $[p]$, el espacio $[0, 1] \times [0, 1]/\sim$ es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^2 .

Para $[p] = [(0, y)]$, $0 \leq y \leq 1$. La imagen inversa de un abierto que contenga a p bajo π , será la unión de dos medios discos en el cuadrado. Por el lema de ensambladura para aristas, $[0, 1] \times [0, 1]/\sim$ es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^2 .

Si tomamos $[p] = [(0, 1)]$, entonces por el lema de ensambladura para vértices, $[0, 1] \times [0, 1]/\sim$ es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^2 .

De lo anterior, $[0, 1] \times [0, 1]/\sim$ es una superficie topológica. La frontera de \mathbb{T}^2 es vacía.

Los siguientes ejemplos también son superficies topológicas, algunas con frontera.

Ejemplo 32. *El cilindro.* Consideramos en $[0, 1] \times [0, 1]$ la relación de equivalencia

$$(0, y) \sim (1, y), \quad 0 \leq y \leq 1.$$

La superficie topológica que obtenemos es el cilindro, ver Figura 3.14. La frontera de $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ es homeomorfo a la unión de dos círculos.

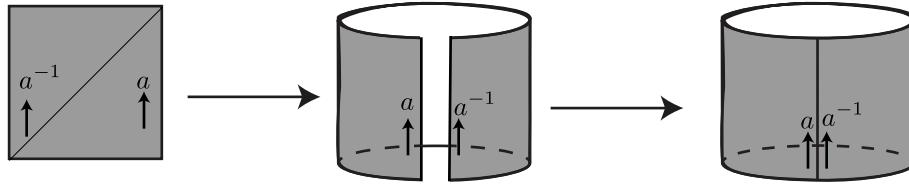


Figura 3.14: Construcción del cilindro.

Ejemplo 33. *La banda de Möbius.* Consideramos en $[0, 1] \times [0, 1]$ la relación de equivalencia

$$(0, y) \sim (1, 1 - y), \quad 0 \leq y \leq 1.$$

La superficie topológica que obtenemos es la banda de Möbius.

$$\frac{[0, 1] \times [0, 1]}{\sim} \doteq \mathbb{BM},$$

ver Figura 3.15. Su frontera es homeomorfo a un círculo \mathbb{S}^1 .

Ejemplo 34. *La esfera.* Consideramos en $[0, 1] \times [0, 1]$ la relación de equivalencia

$$(x, 0) \sim (0, y), \quad (1, y) \sim (x, 1), \quad 0 \leq x, y \leq 1.$$

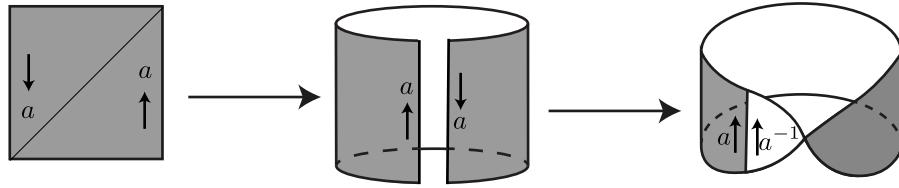


Figura 3.15: Construcción de la banda de Möbius.

La superficie topológica que obtenemos es la esfera

$$\frac{[0, 1] \times [0, 1]}{\sim} \doteq \mathbb{S}^2,$$

ver Figura 3.16. La frontera de \mathbb{S}^2 es vacía.

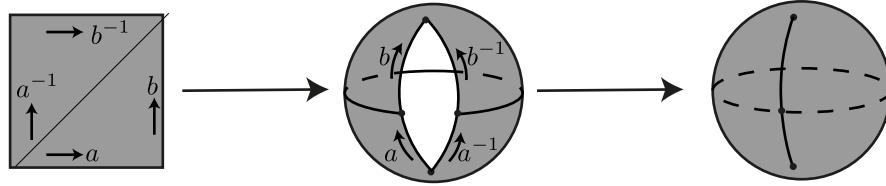


Figura 3.16: Construcción de la esfera.

Ejemplo 35. *El plano proyectivo real.* Consideramos en $[0, 1] \times [0, 1]$ la relación de equivalencia

$$(0, y) \sim (1, 1 - y), \quad (0, x) \sim (1 - x, 1), \quad 0 \leq x, y \leq 1.$$

La superficie que obtenemos es el plano proyectivo real.

$$\frac{[0, 1] \times [0, 1]}{\sim} \doteq \mathbb{RP}^2,$$

ver Figura 3.17. La frontera de \mathbb{RP}^2 es vacía.

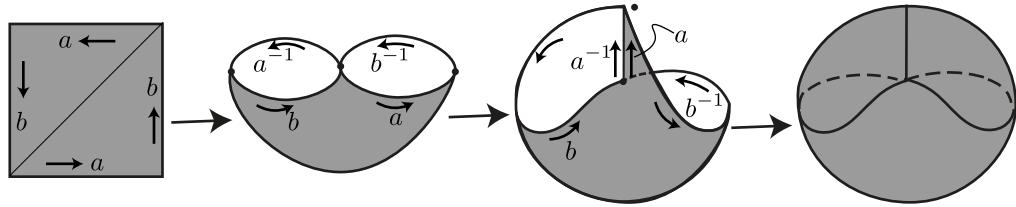


Figura 3.17: Construcción del plano proyectivo real.

Ejemplo 36. *La botella de Klein.* Consideramos en $[0, 1] \times [0, 1]$ la relación de equivalencia

$$(0, y) \sim (1, 1 - y), \quad (x, 0) \sim (x, 1), \quad 0 \leq x, y \leq 1.$$

La superficie topológica que obtenemos es la botella de Klein.

$$\frac{[0, 1] \times [0, 1]}{\sim} \doteq \mathbb{BK},$$

ver Figura 3.18. La frontera de \mathbb{BK} es vacía.

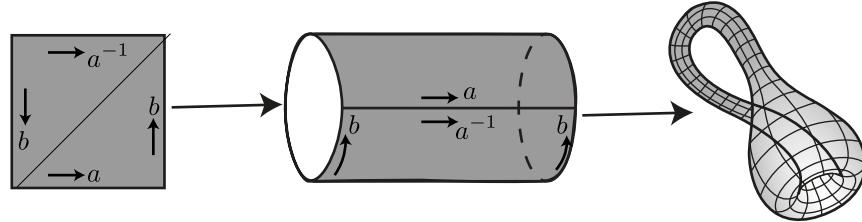


Figura 3.18: Construcción de la botella de Klein.

Definición 3.5.2. Consideramos una superficie triangulada S .

- S es *sin frontera* si todos los lados de los triángulos que la forman están identificados.
- S tiene *frontera* si algún lado de un triángulo no fue identificado.

- S es *compacta* si posee un número finito de triángulos.
- S es *no compacta* si posee un número infinito de triángulos.
- S es *orientable* si no contiene una banda de Möbius como sub-superficie triangulada.
- S es *no orientable* si contiene una banda de Möbius como sub-superficie triangulada.

Ejemplo 37. ■ *El cilindro es una superficie topológica con frontera, compacta y orientable.*

- *La banda de Möbius es una superficie topológica con frontera, compacta y no orientable.*
- *La esfera es una superficie topológica sin frontera, compacta y orientable.*
- *El toro es una superficie topológica sin frontera, compacta y orientable.*
- *El plano proyectivo es una superficie topológica sin frontera, compacta y no orientable.*
- *La botella de Klein es una superficie topológica sin frontera, compacta y no orientable.*

Bibliografía

- [1] H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Algebra*, Wiley, Tenth Edition, U. S. A. (2010).
- [2] J. E. Marsden, A. J. Tromba, *Cálculo Vectorial*, PEARSON EDUCATION, Quinta Edición, Estados Unidos (2004).
- [3] A. I. Ramírez Galarza, J. Seade Kuri, *Introducción a la geometría avanzada*, las prensas de ciencias, tercera reimpresión, México (2016).