La obra matemática de Sevín Recillas Pishmish (1943-2005)

Alexis García Zamora
Unidad Académica de Matemáticas-UAZ
alexis@mate.reduaz.mx

A los que conocíamos la vitalidad y energía de Sevín Recillas, su muerte, el pasado 20 de junio, a sus casi 62 años nos parece un acontecimiento no sólo lamentable, sino también prematuro.

Su pérdida es motivo de duelo especial para todos los que alguna vez fuimos sus alumnos ó nos consideramos sus allegados académicos. La influencia del legado que Sevín nos dejó, es en la actualidad incalculable. Su partida está tan cerca en el tiempo que no podríamos juzgar ahora con objetividad su verdadero significado para las matemáticas en México.

Estas páginas son un intento por sintetizar la obra matemática publicada de Sevín Recillas. Otra parte importantísima de su creación científica quedó dispersa en cartas, en conversaciones, en intervenciones en seminarios. Este es también mi sincero y sencillo homenaje a la persona que influyó decisivamente en mi formación académica y humana.

0. Introducción: superficies de Riemann compactas y variedades Jacobianas

En esta sección establecemos brevemente los conceptos fundamentales en que está basada toda la obra de Sevín Recillas.

El término superficie de Riemann compacta, será libremente intercambiado por el de curva algebraica no singular, irreducible y proyectiva definida sobre $\mathbb{C}$, o simplemente una curva. Dada una aplicación holomorfa entre curvas

$$f : X \to Y,$$

el grado n de f se define como el número de puntos en la preimagen de un punto general $y \in Y$. Este número está bien definido, los puntos y tal que su preimagen consta de menos puntos se llaman valores de ramificación. Existe una manera de contar "multiplicidades" en las preimagenes y de este modo n iguala a la cardinalidad de la preimagen de cualquier punto. f se llama usualmente cubriente de grado n de Y.

Fijemos $Y = \mathbb{P}^1$, esto es, Y es la esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, entonces:

1) si X admite una aplicación holomorfa $X \to \mathbb{P}^1$ de grado 1, entonces X es isomorfa a $\mathbb{P}^1$ y se llama racional,

2) si X admite $f : X \to \mathbb{P}^1$ de grado 2, entonces X se llama hiperelíptica,

3) si X admite $f : X \to \mathbb{P}^1$ de grado 3, entonces X se llama trigonal,

4) si X admite $f : X \to \mathbb{P}^1$ de grado 4, entonces X se llama tetragonal.

Una notación clásica para los casos 2)- 4) es decir que X tiene, respectivamente, un g_2^1, g_3^1 ó g_4^1. Estas propiedades son especiales si consideramos curvas de género alto. Por ejemplo, si $g_X = 1, 2$, entonces X es siempre hiperelíptica. Si $g_X = 3$, entonces X es trigonal pero en general no es hiperelíptica. La curva general de género 7 no es hiperelíptica, trigonal, ni tetragonal.

Asociada a toda superficie de Riemann X, de género al menos 1, existe su variedad Jacobiana JX, un toro complejo que se define como $H^0(X, \Omega_X^1)^*/H_1(X, \mathbb{Z})$, la inclusión $H_1(X, \mathbb{Z}) \subset H^0(X, \Omega_X^1)^*$ es la inducida por la sucesión exacta ([31]):

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^* \to 0, \qquad 0.1$$

y la dualidad: $H^0(X, \Omega_X^1)^* \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X)$. La integración sobre una base de $H^0(X, \Omega_X^1) \simeq \mathbb{C}^g$ define una inmersión holomorfa:

$$a : X \to JX,$$

conocida como la aplicación de Abel.

JX no es sólo un toro complejo. Usando un argumento clásico sobre "factores de automorfía" es posible construir la llamada función theta de Riemann. En términos más modernos, esto significa que existe un fibrado en rectas holomorfo sobre JX que tiene exactamente una sección holomorfa no cero, salvo multiplicación por constantes. Es decir, JX es una variedad abeliana principalmente polarizada, de acuerdo a la siguiente:

Definición 0.1: A una pareja (A, L), con A un toro complejo proyectivo y L un fibrado en rectas holomorfo amplio sobre A, con $h^0(A, L) \neq 0$ se le llama una variedad abeliana. Si además $h^0(A, L) = 1$ se llama variedad abeliana principalmente polarizada, y L se llama polarización principal.

La variedad Jacobiana JX tiene la propiedad de parametrizar haces lineales holomorfos de grado cero, módulo isomorfismos. Esta interpretación se deriva una vez más de la sucesión exacta 0.1, toda vez que $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ parametriza a las clases de haces lineales holomorfos y la aplicación:

$$c_1 : H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^2(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z},$$

envía un haz lineal en su grado, es decir, en el número de ceros de una sección holomorfa general.

Finalmente, será esencial considerar los espacios de moduli $\mathcal{M}_g$ y $\mathcal{A}_g$. Estas variedades algebraicas parametrizan clases de equivalencia de superficies de Riemann compactas de género g y variedades abelianas principalmente polarizadas de dimensión g ([33]). Sus dimensiones son, respectivamente, $3g-3$ y $\frac{(g+1)g}{2}$. La asignación:

$$X \to JX,$$

define un morfismo algebraico:

$$t : \mathcal{M}_g \to \mathcal{A}_g.$$

Tenemos el célebre ([31]):

Teorema de Torelli. *La aplicación t es inyectiva.*

Con estos antecedentes podemos adentrarnos en las contribuciones fundamentales de Sevín Recillas a la teoría de curvas y sus jacobianas.

1. La construcción de Recillas y la fibra de la aplicación de Prym

Dada una aplicación holomorfa $f : X \to Y$ entre dos superficies de Riemann compactas el levantado de haces lineales define una aplicación:

$$f^* : JY \to JX.$$

La imagen $f^*JY \subset JX$, define un subtoro complejo de JX. Se sigue de un teorema clásico de Poincaré que existe un "complemento" para f^*JY. Esto es, existe $P \subset JX$, variedad abeliana, tal que:

$$+ : P \times f^*JY \to JX$$

es sobre y $P \cap f^*JY$ es finito. Esta P sería la definición más general posible de variedad de Prym asociada a una aplicación f.

Sin embargo, los casos realmente importantes ocurren cuando P resulta ser principalmente polarizada (ver definición 0.1).

Entre estos casos se encuentra la situación en que f es de grado 2 y no ramificada. Un resultado elemental de la teoría de superficies de Riemann, el teorema de Riemann-Hurwitz, nos indica que en tal caso $g_X = 2g_Y - 1$. En este caso, si denotamos por L_θ la polarización principal de JX, entonces $L_\theta|_P = M^{\otimes 2}$, donde M es una polarización principal para P ([29], [34]).

Un problema esencial aquí es determinar cuándo (P, M) es isomorfa a la variedad jacobiana de alguna superficie de Riemann. Es con este problema con que está relacionada la célebre construcción de Recillas. En 1974 ([3]), Sevín Recillas, que llevaba apenas un año de doctorado, demostró el siguiente teorema:

Teorema de Recillas. *Sea C una curva trigonal de género g y $\tilde{C} \to C$ un cubriente $2:1$ no ramificado. Existe una curva X tetragonal de género $g_C - 1$ tal que $JX \simeq P(\tilde{C}/C)$. Inversamente, la variedad jacobiana de cualquier curva tetragonal es isomorfa a la variedad de Prym de un cubriente doble no ramificado de una curva trigonal.*

En este enunciado, $P(\tilde{C}/C)$ denota la variedad de Prym (principalmente polarizada) asociada al cubriente $\tilde{C} \to C$. Tan importante como el teorema es la demostración del mismo, conocida como la construcción de Recillas.

La demostración hace uso, fundamentalmente, de dos hechos: el criterio de Masiewicki, que permite identificar cuándo una curva $(\tilde{C}, *)$, con $*$ una involución holomorfa, y un morfismo $\phi : \tilde{C} \to A$, A una variedad abeliana principalmente polarizada, determinan un isomorfismo $P(\tilde{C}/*) \simeq A$; y la existencia de ciertas aplicaciones definidas entre espacios de Hurwitz ([2]).

Los espacios de Hurwitz parametrizan clases de isomorfismos de cubrientes $\alpha : C \to \mathbb{P}^1$, con el género de C, el número de valores de ramificación, y el grado de α fijos.

Una aplicación α de este tipo está determinada por un homomorfismo de grupos $\pi_1(\mathbb{P}^1 - B) \to S_n$, con B el conjunto de valores de ramificación de α y S_n el grupo de permutaciones de n letras.

Recillas combinó este modo de construir cubrientes de $\mathbb{P}^1$ con ciertos homomorfismos naturales de $S_n \to S_m$, para algunos m que dependen de n, y de este modo dedujo la existencia de morfismos dominantes (esto es, de imagen densa) entre diferentes espacios de Hurwitz.

Concretamente, en la demostración del teorema, utilizó la existencia de un morfismo dominante

$$K : H(4,s) \to H(3,s),$$

donde $H(n,s)$ denota el espacio de cubrientes de $\mathbb{P}^1$ de grado n con s valores de ramificación. Este morfismo K está determinado por el cociente $S_4 \to S_3$ con núcleo el grupo de Klein.

Debemos resaltar que la teoría de los espacios de Hurwitz era totalmente novedosa al principio de la década de los 70. Su utilización por parte de Sevín es una prueba más de la gran actualidad y originalidad de sus trabajos.

Un caso de la construcción de Recillas es particularmente importante: el caso $g_C = 4$, y consecuentemente $g_X = 3$. Sea R_4 el espacio parametrizando parejas (C, i), con C una curva de género 4 e i un cubriente doble de C. La variedad de Prym es entonces una variedad abeliana principalmente polarizada de dimensión 3 y obtenemos una aplicación:

$$\mathcal{P} : R_4 \to \mathcal{A}_3.$$

Una consecuencia del Teorema de Torelli es que el elemento general de $\mathcal{A}_3$ es una variedad jacobiana de una curva de género 3. Esta aplicación $\mathcal{P}$, conocida como la aplicación de Prym, es dominante, precisamente por la construcción de Recillas, ya que toda curva de género 4 es trigonal, y toda curva de género 3 es tetragonal. Como

$$\dim R_4 = \dim \mathcal{M}_4 = 9$$

y

$$\dim \mathcal{A}_3 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6,$$

la fibra general de $\mathcal{P}$ será de dimensión 3. Tiene sentido entonces preguntarse por una descripción de esta fibra.

En uno de sus trabajos más hermosos ([13]), mezcla de resultados clásicos, técnicas novedosas y cuidadosos cálculos, Sevín demostró que para $A \in \mathcal{A}_3$ genérica, $A = JX$, la fibra de la aplicación de Prym es biracionalmente equivalente a $K(X)$, la variedad de Kummer de JX, que se define como $K(X) := JX/\{\pm 1\}$.

Estudiar con detalle la fibra de esta aplicación, para toda $A \in \mathcal{A}_3$ y obtener una descripción biregular de $\mathcal{P}^{-1}(A)$ fue una de las obsesiones matemáticas de Sevín. La tesis doctoral de Laura Hidalgo Solís estuvo dedicada a este tema.

2. Resultados varios sobre curvas especiales

Entre la segunda mitad de la década de los 70 y finales de los 80, Sevín Recillas publicó varios trabajos sobre propiedades de curvas especiales, es decir, familias de curvas caracterizadas por ciertas propiedades que definen cerrados en $\mathcal{M}_g$.

Para Sevín las matemáticas estuvieron siempre estrechamente unidas a la amistad. Sus colaboradores y personas afines académicamente eran casi siempre sus amigos. Entre los nombres de sus amigos, cercanos también desde el punto de vista profesional, habría que mencionar en primer lugar a G. R. Kempf (una sugerencia de Kempf permitió a Sevín completar la demostración del teorema explicado en la sección anterior).

Varios de los trabajos de la época que ahora reseñamos fueron en coatuoría con su amigo el geometra italiano Andrea del Centina. Sólo como una muestra del trabajo de Sevín en esta época señalemos el trabajo ([9]), donde Recillas y del Centina caracterizan a las curvas elípticas-hiperelípticas. Estas son curvas Y que admiten una aplicación $2:1$:

$$Y \to E,$$

con $g_E = 1$. Una curva de género 1 se llama elíptica.

La caracterización en cuestión es difícil de explicar en este breve espacio, pues implica introducir varios conceptos de la teoría de curvas algebraicas. Basta decir que esta formulada en términos de la existencia de ciertas curvas en JY contenidas en subvariedades con propiedades especiales de tangencias.

Una vez más, este resultado está relacionado con una novedosa teoría de aquellos años: la teoría de Brill-Noether.

3. Jacobianas con acciones de grupo y descomposiones asociadas

Este tema fue el último al que se dedicó Sevín, y sin duda uno de los más fructíferos de su carrera. Tiene, además, una dimensión humana particular, pues está vinculado a la amistad que lo unió a los integrantes del grupo de geometría compleja chileno y a los geometras del departamento de Matemáticas de la Universidad de Salamanca, por un lado, y al Prof. Herbert Lange, por otro.

La idea de este programa de investigación surgió de conversaciones de Sevín con J. L. Verdier. Recuerdo que cuando llegué a México, en 1991, había dos documentos que Sevín repetidamente me hacía notar. Uno era un artículo de Narashiman y Seshadri sobre el divisor Theta generalizado, el otro, una carta de Verdier, donde esbozaba una respuesta al problema de descomposición de Jacobianas con acción de grupo.

El problema es relativamente sencillo de describir. Sea X una superficie de Riemann, $g_X \geq 3$, tal que el grupo de automorfismos holomorfos de X:

$$G = Aut(X) \neq id.$$

El conjunto $\{X \in \mathcal{M}_g \mid Aut(X) \neq \{id\}\}$ es un cerrado.

Todo $\sigma \in Aut(X)$ induce un automorfismo $\bar{\sigma} \in Aut(X)$, de hecho:

$$Aut(JX)/\{\pm 1\} \simeq G.$$

También tenemos una acción inducida de G en $H^0(X, \Omega^1_X) \simeq T_0 JX$, el espacio tangente a JX en el punto 0. Como $H^0(X, \Omega^1_X)$ es un espacio vectorial de dimensión g sobre $\mathbb{C}$, la acción de G lo descompone en suma directa de subespacios invariantes:

$$T_0 JX = V_1 \oplus \ldots \oplus V_l.$$

Surgen entonces varios problemas naturales: determinar cuántos y de qué dimensión son estos subespacios, estudiar si son espacios tangentes de subvariedades abelianas de JX, las posibles interpretaciones geométricas de estas subvariedades, y, en particular, determinar si son variedades de Prym de algún cubriente.

A la respuesta a estos problemas dedicó Sevín los últimos años de su vida. Con una mezcla de argumentos geométricos y de teoría de representaciones de grupos, y con la colaboración de distintos matemáticos, obtuvo una multitud de resultados en estos temas, desarrollando ejemplos y técnicas de cálculo. Entre sus colaboradores de esta etapa se cuentan Rubí Rodríguez, H. Lange, A. Rojas, A. Carocca, A. Sánchez Argáez (que realizó su tesis doctoral en este tema), J. M. Muñoz Porras y F. Plaza ([17], [21], [23] a la [28]).

Una revisión de todos estos trabajos (y de otros todavía que todavía no se publican) y una conceptualización generalizadora de ellos es sin duda tarea esencial y todavía por realizar.