

Visualización de funciones complejas; siguiendo a Klein, Smale y Thurston

Alvaro Alvarez-Parrilla¹
Leydi J. González-Cely²
Roberto Gutiérrez-Soto³
Jesús Muciño-Raymundo³
Clío H. Rodríguez-Basulto³

¹ Grupo Alximia SA de CV, Ensenada, Baja California, México
alvaro.uabc@gmail.com

² Instituto de Matemáticas UNAM, Unidad Oaxaca, México
leidyjohannagonzalezcely@gmail.com

³ Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM, Campus Morelia, México
rgutierrez@matmor.unam.mx
muciray@matmor.unam.mx
hurimath@gmail.com

25 de octubre de 2019

Resumen. Nosotros consideramos funciones f analítico complejas, meromorfas y/o con singularidades esenciales en la esfera de Riemann. Bosquejamos tres algoritmos de visualización para ellas. El primero requiere empujar o jalar redes de curvas bajo f . El segundo se debe a Felix Klein; jala colores y produce mosaicos a dos colores que distinguen los puntos críticos y las singularidades esenciales (pero no los ceros y polos simples) de f . Finalmente presentamos un algoritmo que jala colores y distingue ceros, polos, puntos críticos y singularidades esenciales.

1. El problema.

Cerramos los ojos e imaginamos la gráfica de una función real de variable real (un polinomio, una función racional, el coseno, la exponencial, ...). Podemos distinguir sus raíces, sus puntos críticos, máximos, mínimos y asíntotas. La gráfica nos permite reconocer las propiedades de la función a vista de pájaro.

Cuando pasamos a funciones de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 , la situación se hace más complicada. El caso particular de las funciones complejas es nuestro objetivo.

¿Cómo visualizar una función $f(z)$ analítico compleja?

Desde mediados de los años 80's, el uso de la visualización por computadora ha generado una gran cantidad de imágenes *v.g.* [27], [2], que a pesar de su belleza no son siempre fáciles de interpretar. En particular, su atractivo ha impulsado el interés en el área de dinámica holomorfa.

2. Empujando y jalando la red cartesiana.

Nuestro objeto inicial es una función $f(z)$ analítico compleja, para fijar ideas un polinomio es adecuado. La notación para ella es

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}_z &\longrightarrow \mathbb{C}_w \\ z = x + iy &\longmapsto u(x, y) + iv(x, y) = \Re(f(z)) + i\Im(f(z)), \end{aligned}$$

donde \mathcal{D} es un conjunto abierto conexo y $w = f(z)$. Por definición, $f(z)$ complejo analítica significa que ella se expresa en cada punto $z_0 \in \mathcal{D}$ como una serie de potencias convergente en un disco abierto $D(z_0, r) = \{|z - z_0| < r\} \subset \mathcal{D}$.

Proveemos al plano \mathbb{C} de la *red cartesiana* de trayectorias horizontales y verticales

$$\mathcal{F}_1 = \underbrace{\{\Im(z) = y_0 \mid y_0 \in \mathbb{R}\}}_{\text{en negro}}, \quad \mathcal{F}_2 = \underbrace{\{\Re(z) = x_0 \mid x_0 \in \mathbb{R}\}}_{\text{en rojo}},$$

ver figura 1.

Observación 2.1. Propiedades de la red cartesiana $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$.

- i) Por cada punto $z \in \mathbb{C}$, pasan exactamente una trayectoria horizontal de \mathcal{F}_1 y una trayectoria vertical de \mathcal{F}_2 .
- ii) En cada punto las trayectorias horizontales y verticales forman un ángulo de $\pi/2$.
- iii) Las trayectorias horizontales y verticales de la red cartesiana están orientadas, *i.e.* dados dos puntos en una trayectoria podemos decir cual antecede al otro, siguiendo el orden de los ejes \mathbb{R} e $i\mathbb{R}$ en \mathbb{C} .

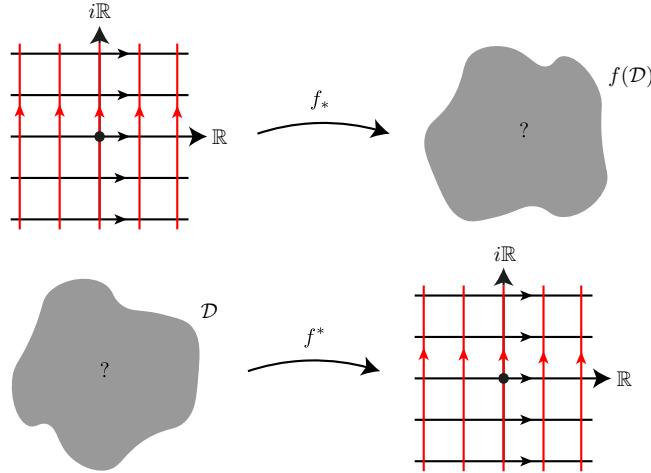


Figura 1: Empujando y jalando la red cartesiana bajo una función.

Operación de empujar una red. Dada nuestra función f , consideramos la red cartesiana $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ en el dominio $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}_z$ y calculamos su imagen bajo f en $f(\mathcal{D}) \subseteq \mathbb{C}_w$.

Las expresiones explícitas para las trayectorias de la red empujada son

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C}_z &&\longrightarrow \mathbb{C}_w \\ x &\longmapsto \underbrace{x + iy_0}_{\mathcal{F}_1} &&\longmapsto \underbrace{u(x + iy_0) + iv(x + iy_0)}_{f_* \mathcal{F}_1}, \\ y &\longmapsto \underbrace{x_0 + iy}_{\mathcal{F}_2} &&\longmapsto \underbrace{u(x_0 + iy) + iv(x_0 + iy)}_{f_* \mathcal{F}_2}. \end{aligned}$$

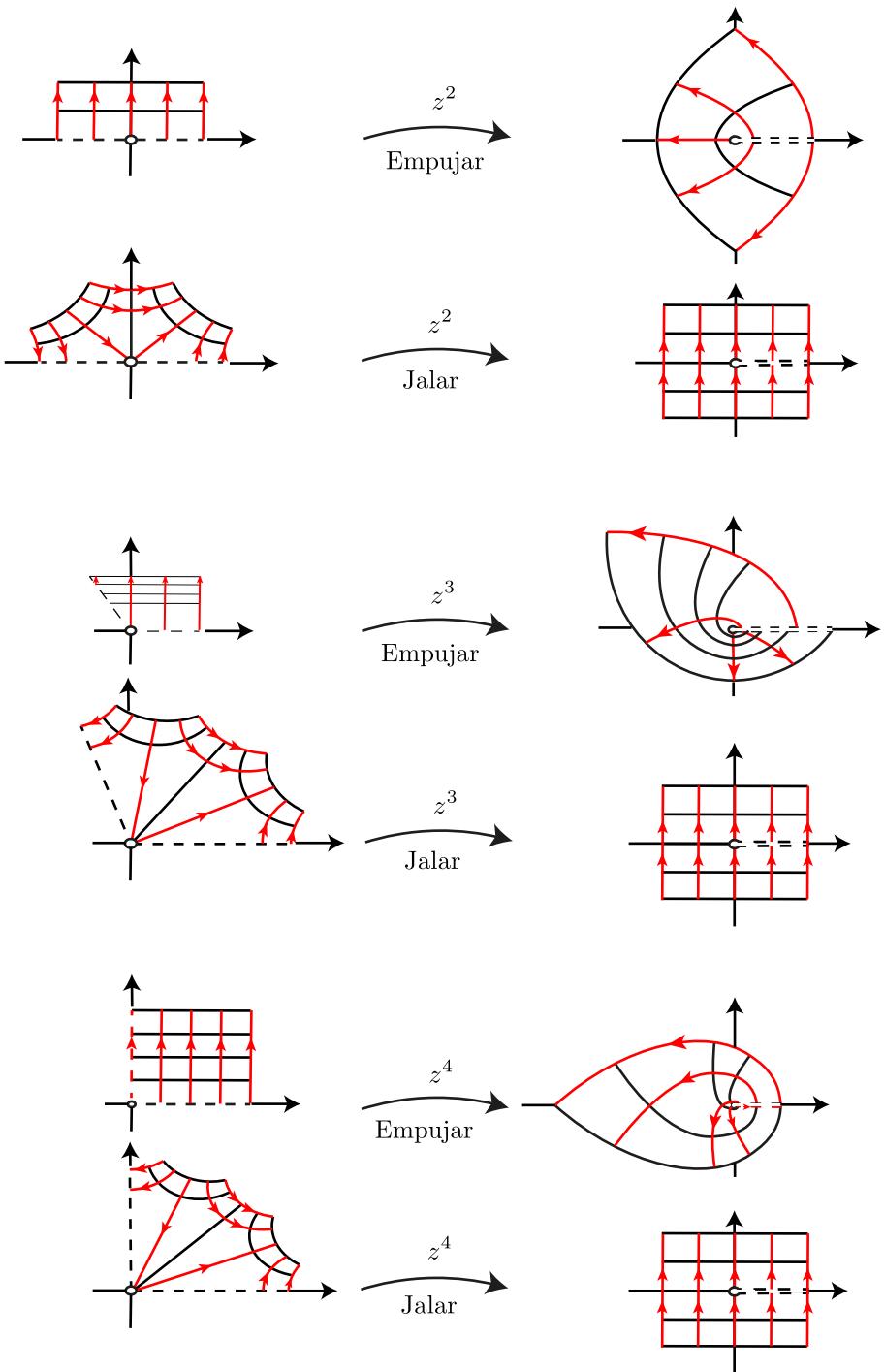


Figura 2: Tres ejemplos para los cuales al jalar la red cartesiana el resultado es una red con las propiedades de la Observación 2.1. Por otra parte al empujar la red cartesiana, las trayectorias resultantes presentan auto intersección, traslapes y/o orientaciones contradictorias. Para $f(z) = z^n$, elegimos como dominio un sector angular abierto que barre $2\pi/n$ radianes.

La notación usual para la operación de empujar es f_* .

Operación de jalar una red. Dada la función f analítico compleja, consideramos la red cartesiana $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ en el contradomio $f(\mathcal{D}) \subseteq \mathbb{C}_w$, calculamos la imagen inversa de ella bajo f en $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}_z$. Las ecuaciones resultantes para las trayectorias de la red jalada son

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_w & \longrightarrow & \mathbb{C}_z \\ \underbrace{\{y_0 = 0\}}_{\mathcal{F}_1} & \longmapsto & \{\operatorname{Im}(f(z)) = y_0\} = \underbrace{\{v(x, y) = y_0\}}_{f^*\mathcal{F}_1}, \\ \underbrace{\{x_0 = 0\}}_{\mathcal{F}_2} & \longmapsto & \{\operatorname{Re}(f(z)) = x_0\} = \underbrace{\{u(x, y) = x_0\}}_{f^*\mathcal{F}_2}. \end{array}$$

Las trayectorias $f^*\mathcal{F}_1, f^*\mathcal{F}_2$ asumen la forma de curvas de nivel (no de trayectorias parametrizadas, como sucede al empujar la red cartesiana). Análogamente, f^* es la notación común para la operación de jalar.

Si f posee función inversa $f^{-1} : f(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{D}$, entonces las operaciones de jalar y empujar son inversa una de la otra en el siguiente sentido

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}_z & \xrightarrow{f} & f(\mathcal{D}) \subseteq \mathbb{C}_w & \xrightarrow{f^{-1}} & \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}_z \\ \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 & \xrightarrow{f_*} & f_*(\mathcal{F}_1), f_*(\mathcal{F}_2) & \xrightarrow{f_*^{-1}} & \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2. \end{array}$$

En breve $f_*^{-1} = f^*$.

Decimos que $z_0 \in \mathcal{D}$ es un **punto regular de f** cuando $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \neq 0$.

Teorema 2.2. (De la función inversa.) *Para una función $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}_w$ analítico compleja, las afirmaciones siguientes son equivalentes.*

- 1) $z_0 \in \mathcal{D}$ es un punto regular de f .
- 2) En un disco abierto de z_0 suficientemente pequeño $D(z_0, r) = \{|z - z_0| < r\} \subseteq \mathcal{D}$, f es invertible y se reescribe salvo cambios de coordenadas como

$$\mathfrak{z} \longmapsto \mathfrak{z}.$$

- 3) Por z_0 pasan exactamente 1 trayectoria de la red jalada $f^*\mathcal{F}_1$.
- 4) Por z_0 pasan exactamente 1 trayectoria de la red jalada $f^*\mathcal{F}_2$.
- 5) En una vecindad abierta de z_0 suficientemente pequeña $D(z_0, r) = \{|z - z_0| < r\}$, la función restringida

$$f : D(z_0, r) \rightarrow f(D(z_0, r))$$

es 1 a 1.

□

La afirmación (2) usa f^{-1} como cambio de coordenadas

$$\begin{array}{ccc} D(z_0, r) \subseteq \mathcal{D} & \xrightarrow{f(z)} & f(D(z_0, r)) \\ \uparrow f^{-1}(\mathfrak{z}) & \nearrow \mathfrak{z} & \\ f(D(z_0, r)) & & \end{array}$$

Nuestra descripción se hace más amplia e interesante al considerar funciones que no son invertibles. Ya que en este caso $f_*\mathcal{F}_1, f_*\mathcal{F}_2$ no necesariamente forman una red en $f(\mathcal{D})$, con las propiedades descritas en la Observación 2.1.

Ejemplo 1. La operación de jalar produce una red, empujar en general la destruye. Consideramos tres funciones

$$f(z) = z^n : \mathcal{D}_n \longrightarrow \mathbb{C}_w \setminus (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}), \quad \text{para } n = 2, 3, 4,$$

donde $\mathcal{D}_n = \{z \mid 0 < \arg(z) < 2\pi/n\}$ son sectores angulares abiertos con vértice en el origen y ángulo $2\pi/n$. Cada f es biyectiva con esa elección del dominio y la imagen.

Al empujar la red cartesiana, obtenemos $f_*\mathcal{F}_1, f_*\mathcal{F}_2$. Una mirada muestra que la red empujada posee trayectorias con direcciones opuestas en el eje real positivo \mathbb{R}^+ , ver figura 2. Esto es, al ampliar un poco más el dominio \mathcal{D}_n para $f(z) = z^n$; la red empujada pierde la propiedad de que por casi todo punto pasan exactamente dos trayectorias orientadas.

Por otra parte, bajo la operación de jalar se obtiene una red que posee trayectorias con una única orientación en \mathcal{D}_n , ver figura 2. Es un ejercicio simple hallar las redes $f^*\mathcal{F}_1, f^*\mathcal{F}_2$ en $\mathcal{D} = \mathbb{C}_z$ y describir su patrón de comportamiento para todo entero $n \geq 2$.

El video [29] muestra el resultado de empujar una red vía $f(z) = z^\alpha$, para $0 < \alpha < 4$ variando en los reales.

La filosofía es “un punto regular $z_0 \in \mathcal{D}$ de f es aquel donde las propiedades de la Observación 2.1 persisten en la red $f^*\mathcal{F}_1, f^*\mathcal{F}_2$ ”.

En lo que sigue jalaremos redes.

3. Puntos críticos y forma normal.

¿Cómo se comporta una red $f^*\mathcal{F}_1, f^*\mathcal{F}_2$ en un punto donde pasan más de dos trayectorias horizontales (*i.e.* en un punto no regular)?

Definición 3.1. Un **punto crítico** $z_\iota \in \mathcal{D}$ de orden $k \geq 1$ para f es aquel donde exactamente las primeras k derivadas de f se anulan, *i.e.*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{df}{dz}(z_\iota) = 0 \\ \vdots \\ \frac{d^k f}{dz^k}(z_\iota) = 0 \\ \frac{d^{k+1} f}{dz^{k+1}}(z_\iota) \neq 0. \end{array} \right.$$

Un **valor crítico** $w_\iota \in \mathbb{C}_w$ de f es la imagen de un punto crítico, *i.e.* $w_\iota = f(z_\iota)$.

El **índice de ramificación de f en z_ι** es $k + 1$.

La definición está en consonancia con el hecho siguiente, f puede escribirse mediante una serie de potencias convergente en una vecindad de z_ι , *i.e.*

$$f(z) = f(z_\iota) + \frac{df}{dz}(z_\iota)(z - z_\iota) + \dots + \frac{1}{k!} \frac{d^k f}{dz^k}(z_\iota)(z - z_\iota)^k + \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^{k+1} f}{dz^{k+1}}(z_\iota)(z - z_\iota)^{k+1} + \dots$$

Si z_ι es punto crítico de f , entonces las primeras k derivadas se anulan y se obtiene la serie

$$f(z) = f(z_\iota) + \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^{k+1} f}{dz^{k+1}}(z_\iota)(z - z_\iota)^{k+1} + \dots$$

La filosofía es “un punto crítico $z_\iota \in \mathcal{D}$ de f es aquel donde algo especial ocurre con la red $f^*\mathcal{F}_1, f^*\mathcal{F}_2$ ”.

Teorema 3.2. (La forma normal local.) Para una función $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_w$ analítico compleja, las afirmaciones siguientes son equivalentes.

1) $z_\iota \in \mathcal{D}$ es un punto crítico de f de orden $k \geq 1$.

2) En un disco abierto de z_ι suficientemente pequeño $D(z_\iota, r) \subseteq \mathcal{D}$, f se escribe salvo cambios de coordenadas como

$$\mathfrak{z} \mapsto \mathfrak{z}^{k+1}.$$

3) Por z_ι pasan exactamente $k+1$ trayectorias de la red $f^*\mathcal{F}_1$.

4) Por z_ι pasan exactamente $k+1$ trayectorias de la red $f^*\mathcal{F}_2$.

5) En una vecindad abierta ponchada de z_ι suficientemente pequeña $D(z_\iota, r) \setminus \{z_\iota\} = \{0 < |z - z_\iota| < r\}$, la función restringida

$$f : D(z_\iota, r) \setminus \{z_\iota\} \longrightarrow f(D(z_\iota, r)) \setminus \{f(z_\iota)\}$$

es $k+1$ a 1.

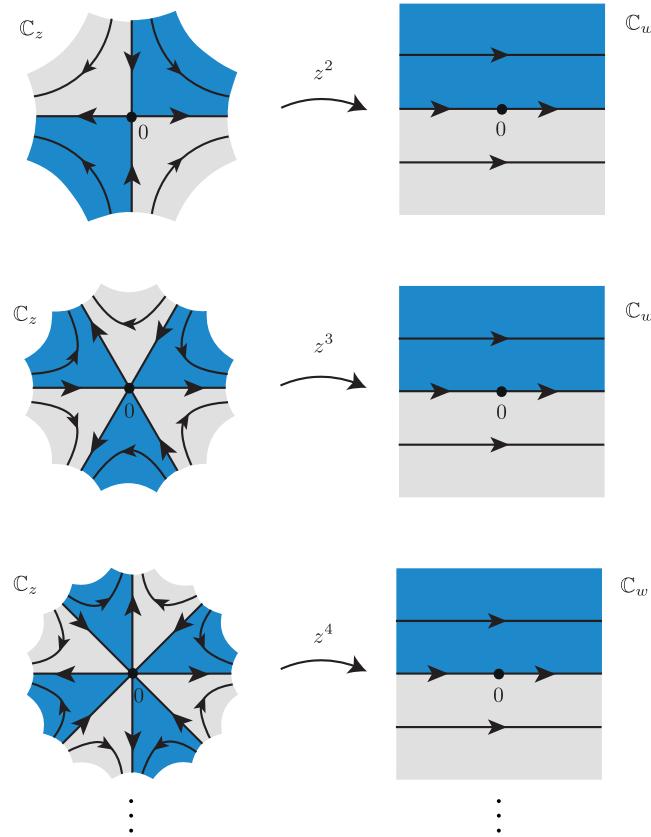


Figura 3: Mosaicos a dos colores para $f(z) = z^k$, hemos coloreado de tal forma que; $z \in \mathbb{C}_z$ es azul si $\Im(z^k) > 0$ y $z \in \mathbb{C}_z$ es gris si $\Im(z^k) < 0$.

Idea de la prueba. La afirmación (2) nos dice que existen dos cambios de coordenadas analítico complejas $g(\mathfrak{z})$ y $w - f(z_\iota)$ tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 D(z_\iota, r) \subseteq \mathcal{D} & \xrightarrow{f(z)} & f(D(z_\iota, r)) \\
 \uparrow g(\mathfrak{z}) & & \downarrow w - f(z_\iota) \\
 \mathcal{D}_2 & \xrightarrow{\mathfrak{z}^{k+1}} & \mathbb{C}
 \end{array}$$

commuta. La construcción de g puede leerse en [22] p. 284. Ver las figuras 3 y 4. \square

Conviene enfatizar la naturaleza de las afirmaciones en el teorema 3.2; (1) es una afirmación analítica, (2) es una condición de simplicidad, (3) y (4) son geométricas, mientras que (5) solo usa conjuntos. Sorprendentemente todas ellas son equivalentes cuando f es analítico compleja.

Es inmediato verificar que los ceros z_i de $f(z)$ de multiplicidad $s \geq 2$ son puntos críticos de orden $s - 1$.

Por ello “los puntos críticos de f son más fácilmente visibles que los ceros simples de f ”.

¿Cómo usar la forma normal para estudiar los polos de una función meromorfa $f(z) : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$?

Mantenemos la notación \mathcal{D} para el dominio, si bien ahora puede contener polos de f . Recordamos que la esfera de Riemann es $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Por definición, tenemos que $f(z)$ posee un polo de multiplicidad $-\kappa \leq -1$ en $z_i \in \mathcal{D}$ si y sólo si $1/f(z)$ posee un cero de multiplicidad $\kappa \geq 1$ en z_i .

Corolario 3.3. (La forma normal local para ceros y polos.)

Para una función $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ meromorfa, la forma normal local alrededor de cada punto $z_0 \in \mathcal{D}$ es

$$z \mapsto \begin{cases} z^s & \text{para } z_0 \text{ cero de multiplicidad } s \geq 1 \\ z & \text{para } z_0 \text{ punto regular} \\ \frac{1}{z^\kappa} & \text{para } z_0 \text{ polo de multiplicidad } -\kappa \leq -1. \end{cases}$$

\square

En resumen, para una función f meromorfa y un punto $z_0 \in \mathcal{D}$ tenemos las implicaciones siguientes

$$\begin{array}{ccc} \begin{matrix} \text{cero o polo de} \\ \text{multiplicidad } 1 \text{ ó } -1 \end{matrix} & \implies & \begin{matrix} \text{punto} \\ \text{regular} \end{matrix} & \implies & \begin{matrix} \text{índice de} \\ \text{ramificación } 1 \end{matrix} \\[10pt] \begin{matrix} \text{cero de} \\ \text{multiplicidad } s \geq 2 \end{matrix} & \implies & \begin{matrix} \text{punto crítico} \\ \text{de orden } s-1 \end{matrix} & & \\[10pt] \begin{matrix} \text{polo de} \\ \text{multiplicidad } -\kappa \leq -2 \end{matrix} & \implies & \begin{matrix} \text{punto crítico} \\ \text{de orden } \kappa-1 \end{matrix} & \left. \begin{matrix} \implies \\ \text{índice de} \\ \text{ramificación } s \text{ ó } \kappa \geq 2. \end{matrix} \right\} \end{array}$$

Por ello se cumple que

$$\{ \text{ceros y polos} \} \cap \{ \text{puntos críticos} \} = \{ \text{ceros y polos de multiplicidad } \pm 1 \}.$$

Nosotros convenimos que la multiplicidad de los polos es negativa. Una ventaja de ello es que toda función racional $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ satisface la igualdad siguiente

$$\sum (\text{multiplicidades de ceros}) + \sum (\text{multiplicidades de polos}) = 0.$$

4. Jalando colores; algoritmo de visualización a la Klein.

En esta sección, nuestro objetivo es presentar un algoritmo de visualización que permita detectar; los puntos críticos de f con sus ordenes.

Ejemplo 2. Consideramos un polinomio f de grado tres con puntos críticos z_1, z_2 de orden 1 y valores críticos $w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2)$. De acuerdo a la forma normal tenemos dos mosaicos locales alrededor de los puntos críticos, ver figura 5. ¿Es posible pegar globalmente esos mosaicos locales de forma continua para formar un mosaico a dos colores bien definido en todo el plano \mathbb{C}_z ? ¿Cómo podemos construir ese mosaico?

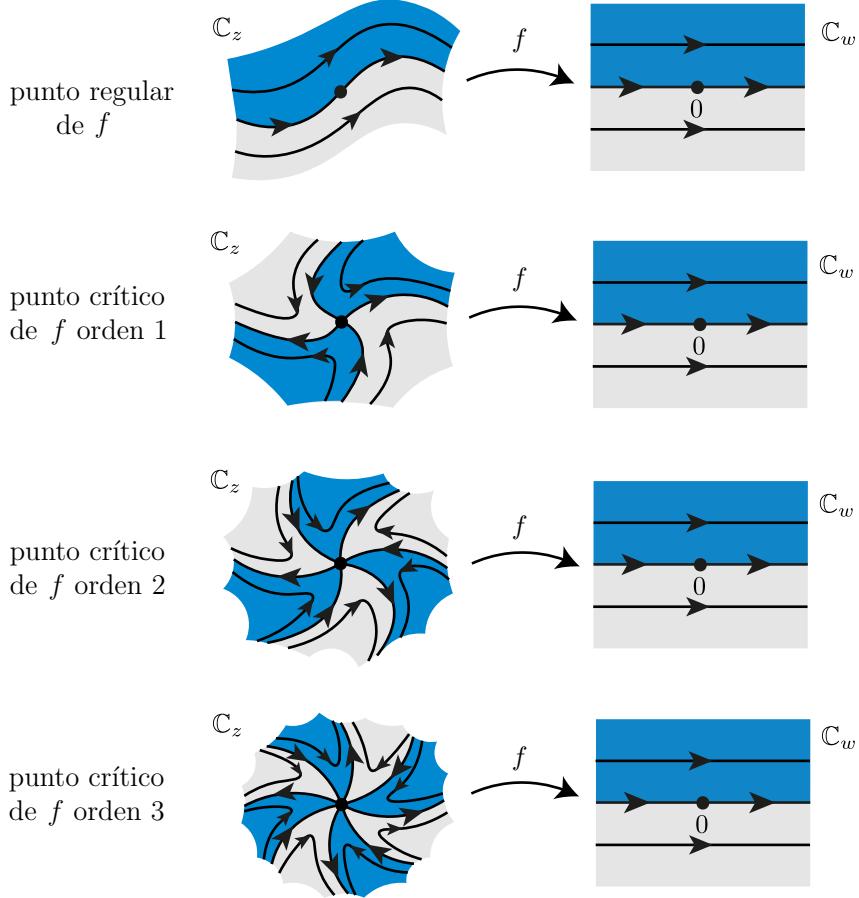


Figura 4: Mosaicos a dos colores en la vecindad de un punto regular y puntos críticos de órdenes 1, 2 y 3 (sin pérdida de generalidad con valor crítico 0).

Algoritmo de visualización a la Klein (para funciones meromorfas en la esfera de Riemann). Consideramos una función meromorfa

$$f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \quad \text{de grado } n \geq 2.$$

Paso 1. Localizamos los puntos críticos de f

$$z_1, \dots, z_\ell \subset \widehat{\mathbb{C}}_z$$

y calculamos sus valores críticos

$$w_1, \dots, w_\ell \subset \widehat{\mathbb{C}}_w.$$

Paso 2. Consideramos una trayectoria orientada $\gamma \subset \widehat{\mathbb{C}}_w$ que pasa una vez por todos los valores críticos de f y que divide la esfera de Riemann en dos dominios abiertos de Jordan

$$\widehat{\mathbb{C}}_w \setminus \gamma = \underbrace{\tau}_{\substack{\text{loseta} \\ \text{azul}}} \cup \underbrace{\tau'}_{\substack{\text{loseta} \\ \text{gris}}}.$$

Convenimos que el dominio de Jordan (o loseta) τ es aquel cuya frontera es recorrida por γ en sentido antihorario y lo coloreamos con azul.

Paso 3. Calculamos la **trayectoria generadora** del mosaico

$$\Gamma = f^* \gamma = \{z \mid f(z) \in \gamma\} \subset \widehat{\mathbb{C}}_z.$$

Usando la continuidad de f y la forma normal es fácil verificar las siguientes propiedades de la trayectoria generadora Γ :

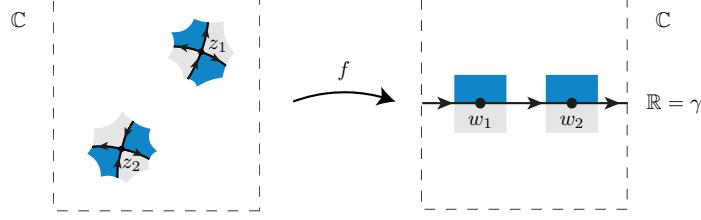


Figura 5: Los mosaicos locales para un polinomio de grado tres deben pegar globalmente para formar un mosaico a la Klein bien definido en todo \mathbb{C}_z .

- 1) es compacta,
- 2) está orientada,
- 3) contiene cada punto crítico de f ,
- 4) divide a $\widehat{\mathbb{C}}_z$ en dominios de Jordan.

Paso 4. Coloreamos las losetas (componentes abiertas conexas) de $\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma$ como sigue:

- i) un punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}_z$ es azul si $f(z)$ está en la loseta azul τ ,
- ii) un punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}_z$ es gris si $f(z)$ está en la loseta gris τ' .

El algoritmo, que nosotros atribuimos a F. Klein (quien presentó bellas figuras, véase [7], [15] y [23]), se puede resumir como:

Teorema 4.1. (F. Klein.) 1) *Toda función meromorfa $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$, de grado $n \geq 2$, provista de una trayectoria γ que recorre sus valores críticos, determina un mosaico a dos colores*

$$\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma = \underbrace{T_1 \cup \dots \cup T_n}_{\text{losetas azules}} \cup \underbrace{T'_1 \cup \dots \cup T'_n}_{\text{losetas grises}}, \quad (1)$$

con n losetas de cada color.

2) La función f restringida a dos losetas adyacentes

$$f : T_\varsigma \cup T'_\varsigma \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w \setminus \gamma$$

es 1 a 1. □

La ecuación (1) formaliza la definición de **mosaico**, donde cada componente conexa abierta de (1) es una **loseta**. La elección de γ y el cálculo de $\Gamma = f^*\gamma$ pueden ser no triviales. Las veces que Γ atraviesa por un punto crítico z_ℓ dependen de la multiplicidad del punto. Para empezar es conveniente el siguiente concepto (o hipótesis).

Definición 4.2. Una función meromorfa $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ es **afortunada** si todos sus valores críticos w_1, \dots, w_ℓ están en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

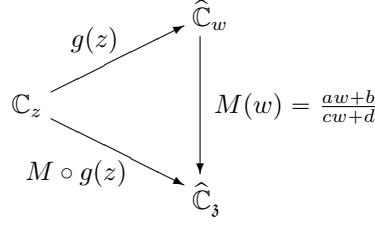
Corolario 4.3. *Para una función meromorfa $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ afortunada, su trayectoria generadora*

$$\Gamma = \{\Im(f(z)) = 0\} \subset \widehat{\mathbb{C}}_z,$$

describe un mosaico a dos colores de \mathbb{C}_z . □

Observamos que Γ proviene de jalar una trayectoria horizontal, por ello $\Gamma \subset \mathbb{C}_z$ es una trayectoria de $f^*\mathcal{F}_1$.

Las transformaciones de Möbius son los automorfismos analíticos complejos de $\widehat{\mathbb{C}}$ y nos permiten llevar cualquier círculo de $\widehat{\mathbb{C}}_w$ en la recta $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Si los valores críticos de $g(z)$ están en un círculo, entonces podemos llevarlos a $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, como sigue:



Por ello y sin pérdida de generalidad, para tal g tenemos que su trayectoria generadora es

$$\Gamma = \{\operatorname{Im}(M \circ g(z)) = 0\} \subset \hat{\mathbb{C}}_z.$$

5. Familias de mosaicos.

Ejemplo 3. *Monomios de grado n .* Consideramos la función

$$z^n : \hat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}_w, \quad n \geq 2,$$

en la esfera de Riemann. Es útil usar notación de parejas

$$(\text{punto, multiplicidad u orden}) \in \hat{\mathbb{C}} \times \mathbb{Z}$$

para polos, ceros y puntos críticos (dichas parejas son llamados *divisores* en geometría algebraica). A continuación agrupamos sus datos.

Tabla. Para $z \mapsto z^n$.

polos, multiplicidad	ceros, multiplicidad	puntos críticos z_ℓ , orden	valores críticos w_ℓ
$(\infty, -n)$	$(0, n)$	$(0, n-1)$ $(\infty, n-1)$	0 ∞

La trayectoria generadora de z^n está formada por n rectas por el origen que forman ángulos π/n , para grado bajo ellas son

$$\begin{aligned}
\{\operatorname{Im}(z^2) = 0\} &= \{2xy = 0\}, \\
\{\operatorname{Im}(z^3) = 0\} &= \{y(\sqrt{3}x - y)(\sqrt{3}x + y) = 0\}, \\
\{\operatorname{Im}(z^4) = 0\} &= \{4xy(x - y)(x + y) = 0\}, \dots
\end{aligned}$$

El mosaico $\hat{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma$ de z^n es una esfera con n gajos azules y n gajos grises, ver las figuras 6 y 7.

Ejemplo 4. *Polinomios de grado 3.* Consideramos en la esfera de Riemann un polinomio afortunado de grado 3 con dos puntos críticos finitos de orden 1, como en la siguiente:

Tabla. Para $z \mapsto \frac{z^3}{3} - z$.

polos, multiplicidad	ceros, multiplicidad	puntos críticos z_ℓ , orden	valores críticos w_ℓ
$(\infty, -3)$	$(0, 1)$ $(\sqrt{3}, 1)$ $(-\sqrt{3}, 1)$	$(-1, 1)$ $(1, 1)$ $(\infty, 2)$	$\frac{2}{3}$ $-\frac{2}{3}$ ∞

Su trayectoria generadora es

$$\{\operatorname{Im}\left(\frac{1}{3}z^3 - z\right) = 0\} = \left\{y\left(-1 + x^2 - \frac{1}{3}y^2\right) = 0\right\} \subset \hat{\mathbb{C}}_z.$$

Ver figura 6.

Ejemplo 5. *Polinomios de grado 4.* Consideramos en la esfera de Riemann dos polinomios afortunados de grado 4, como sigue:

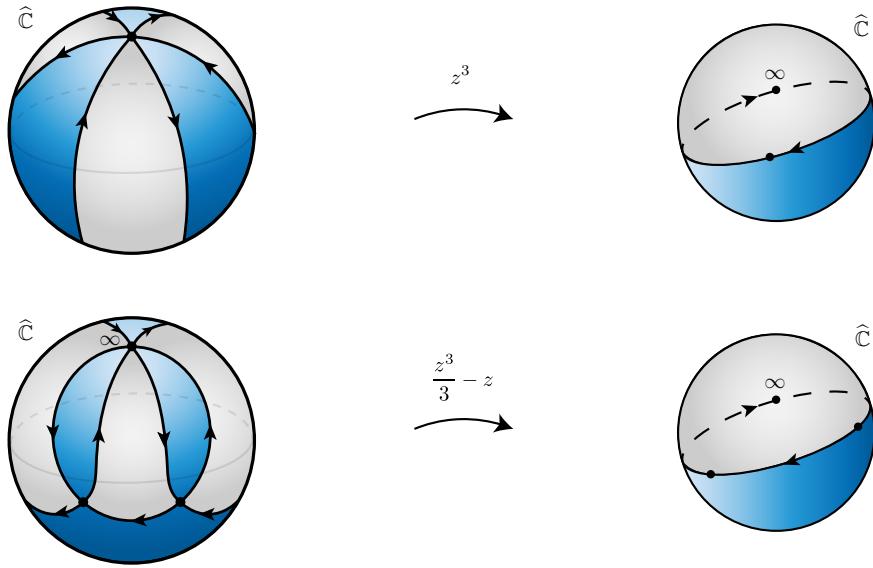


Figura 6: Dos mosaicos de Klein para polinomios de grado 3.

Tabla. Para $z \mapsto \frac{z^4}{4} - \frac{z^2}{2}$.

polos, multiplicidad	ceros, multiplicidad	puntos críticos z_ℓ , orden	valores críticos w_ℓ
$(\infty, -4)$	$(0, 2)$	$(-1, 1)$	$\frac{1}{4}$
	$(\sqrt{2}, 1)$	$(0, 1)$	0
	$(-\sqrt{2}, 1)$	$(1, 1)$	$-\frac{1}{4}$
		$(\infty, 3)$	∞

Es un polinomio afortunado y su trayectoria generadora es

$$\{\Im(\frac{1}{3}z^3 - z) = 0\} = \{xy(-1 + x^2 - y^2) = 0\} \subset \widehat{\mathbb{C}}_z.$$

El polinomio siguiente también es afortunado y posee 3 puntos críticos de orden uno.

Tabla. Para $z \mapsto \frac{z^4}{4} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + z$.

polos, multiplicidad	ceros, multiplicidad	puntos críticos z_ℓ , orden	valores críticos w_ℓ
$(\infty, -4)$	$(0, 1), (c_2, 1)$	$(-1, 1)$	$-\frac{11}{12}$
	$(c_3, 1), (c_4, 1)$	$(1, 2)$	$\frac{5}{12}$
		$(\infty, 3)$	∞

Los puntos críticos son fáciles de calcular, en contraste los ceros poseen expresiones complicadas, por ejemplo

$$c_1 = 4/9 + (7(5)^{2/3}(1 + i\sqrt{3})) / (9(2(107 - 27\sqrt{11}))^{1/3}) + (((1 - i\sqrt{3})(5(107 - 27\sqrt{11}))^{1/3}) / (9(2)^{2/3})).$$

Además su trayectoria generadora es

$$\{\Im(\frac{1}{4}z^4 - \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^2 + z) = 0\} = \{y((x-1)^2(x+1) + (-x + \frac{1}{3})y^2) = 0\}.$$

Ver figura 7.

¿Por qué hemos preferido esos ejemplos de polinomios de grados 3 y 4 en las figuras 6 y 7?

Una primera clasificación de los polinomios de grado n (fijo) en subfamilias usa que ellos poseen $n - 1$ puntos críticos finitos. Cada partición

$$\{k_1, k_2, \dots, k_\ell\}, \quad \text{con } \sum_{j=1}^\ell k_j = n - 1,$$

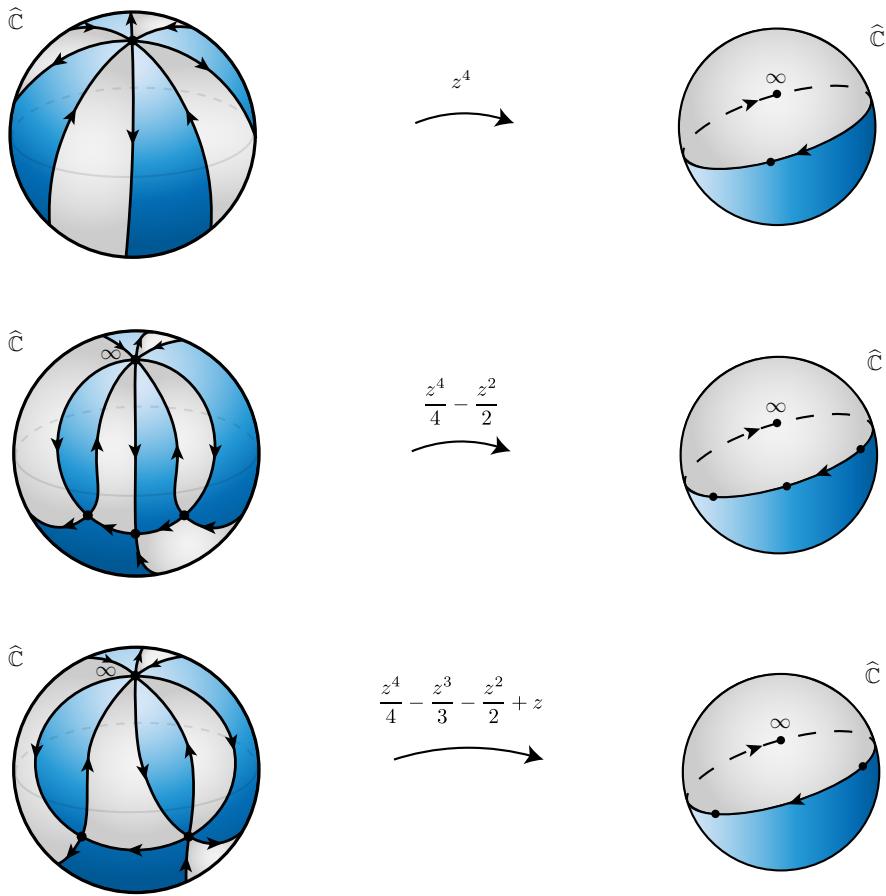


Figura 7: Tres mosaicos de Klein para polinomios de grado 4.

del número $n - 1$ determina una subfamilia de los polinomios complejos de grado n , con puntos críticos finitos de esos órdenes (el orden $n - 1$ del punto $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}_z$ se obvia). Nuestros ejemplos describen las posibles familias de polinomios para grados 2, 3 y 4, de acuerdo a los órdenes de puntos críticos finitos determinados por las particiones del grado correspondiente

grado 2	$\{1\}$
grado 3	$\{1, 1\}, \{2\}$
grado 4	$\{1, 1, 1\}, \{2, 1\}, \{3\}$.

Ejemplo 6. Funciones racionales. Mostramos en la figura 8 cuatro funciones racionales. La primera $f(z) = 1/z$ es una función de Möbius y carece de puntos críticos en $\widehat{\mathbb{C}}_z$, por lo que el algoritmo de Klein no puede aplicarse (si bien dividir la esfera $\widehat{\mathbb{C}}_w$ usando $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y jalar los colores es natural). Los otros tres ejemplos son funciones racionales con coeficientes reales, no afortunadas. Es fácil verificar que sus puntos críticos en \mathbb{C}_z son de orden 1 y vienen en parejas conjugadas complejas, pero no reales.

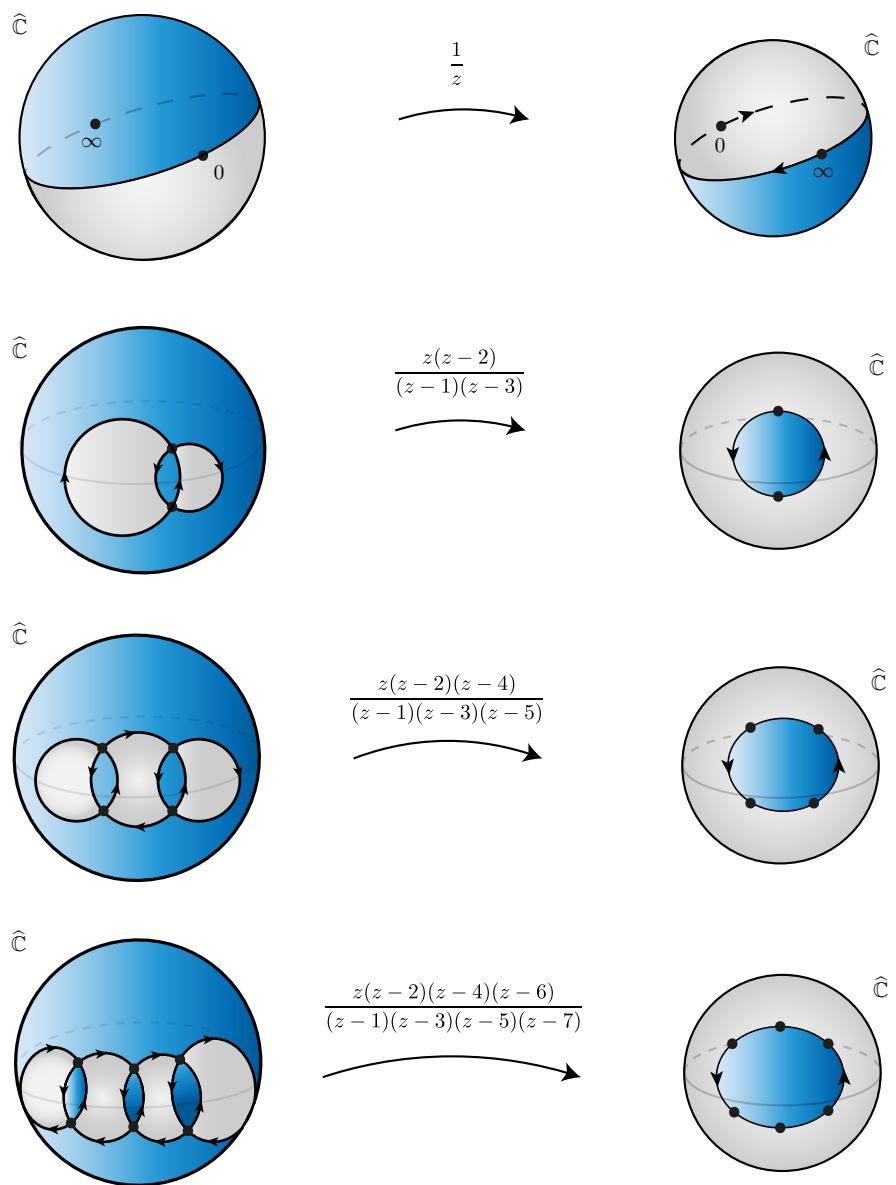


Figura 8: Cuatro mosaicos de Klein para funciones racionales de grados 1 a 4.

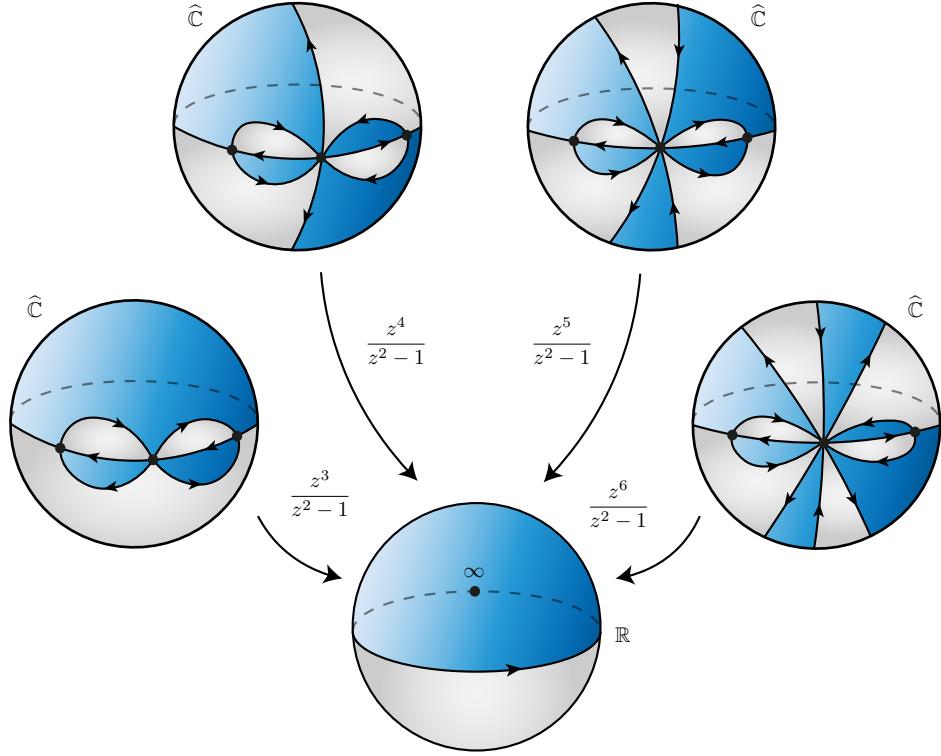


Figura 9: Mosaicos de Klein para funciones racionales afortunadas, *i.e.* con todos sus valores críticos reales.

Ejemplo 7. Funciones racionales afortunadas. Mostramos en la figura 9 cuatro funciones racionales afortunadas. Es un problema abierto describir la topología de los mosaicos que provienen de funciones racionales afortunadas, para todos los grados.

Ejemplo 8. Funciones trascendentes. El algoritmo de Klein puede extenderse para muchas funciones trascendentes con singularidades esenciales aisladas $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ cuando seleccionamos γ adecuadamente.

Consideramos la función exponencial

$$e^z : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Vista en $\widehat{\mathbb{C}}_z$, el punto ∞ es una singularidad esencial aislada. La función exponencial no posee puntos críticos de orden finito en $\widehat{\mathbb{C}}_z$. Podemos decir que posee un punto crítico de orden infinito en $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}_z$, con valores asintóticos $0, \infty \in \widehat{\mathbb{C}}_w$ respectivamente, para mayor detalle ver [6]. Por ello proponemos $\gamma = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y el algoritmo de Klein trabaja, ver figura 10. La trayectoria generadora que resulta es

$$\{\operatorname{Im}(e^z) = 0\} = \{e^x \operatorname{sen}(y) = 0\} \subset \mathbb{C}_z.$$

Como segundo ejemplo, la función

$$\operatorname{sen}(z) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

satisface que sus puntos críticos finitos y sus valores críticos coinciden con los de la función real $\operatorname{sen}(x)$. El seno es una función afortunada y su trayectoria generadora es

$$\{\operatorname{Im}(\operatorname{sen}(z)) = 0\} = \{\cos(x) \operatorname{senh}(y) = 0\} = \left\{ \frac{1}{4} (\operatorname{e}^{-ix} + \operatorname{e}^{ix})(\operatorname{e}^y - \operatorname{e}^{-y}) = 0 \right\} \subset \mathbb{C}_z.$$

En la figura 11 mostramos los mosaicos de las funciones exponencial, el coseno y la cotangente en la esfera de Riemann. En particular, el mosaico de la exponencial y la cotangente son equivalentes bajo los siguientes cambios de coordenadas:

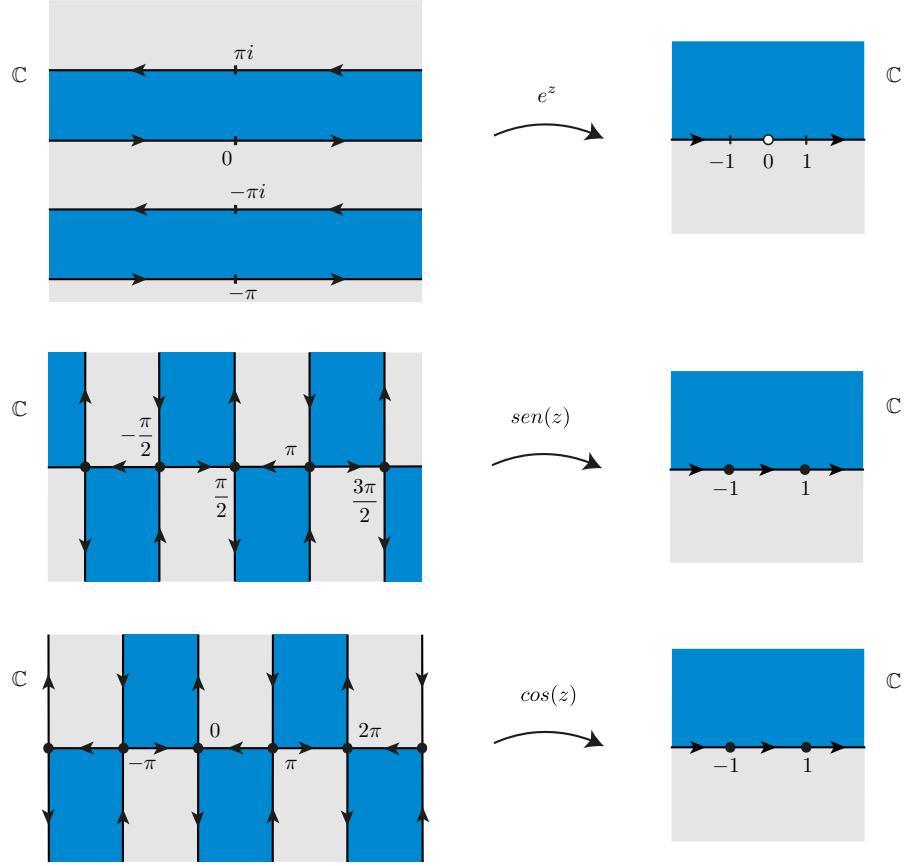


Figura 10: Mosaicos de Klein para tres funciones trascendentales en el plano complejo.

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{e^z} & \widehat{\mathbb{C}} \\ \uparrow 2i\mathfrak{z} & & \downarrow i\frac{w+1}{w-1} \\ \widehat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\cot(\mathfrak{z})} & \widehat{\mathbb{C}} \end{array}$$

ver [21] p. 85.

Observación 5.1. Para construir el mosaico en el caso de tener singularidades esenciales aisladas, es necesario que γ visite una vez cada valor crítico y cada valor asintótico. Véase [6] para la descripción topológica de los valores asintóticos y [1] §3.1, 4.3 para la teoría que surge de jalar la red cartesiana bajo funciones con singularidades esenciales.

Corolario 5.2. *Para $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ con singularidades esenciales aisladas (en el sentido de series de Laurent). Si es posible construir un mosaico de Klein tal que un punto $\mathfrak{e}_0 \in \widehat{\mathbb{C}}_z$ aparece como esquina de una infinidad de losetas del mosaico, entonces \mathfrak{e}_0 resulta ser una singularidad esencial aislada de f .* \square

6. ¿Un converso para el algoritmo de Klein?

El algoritmo de visualización siguiendo a Felix Klein visto mediante un diagrama es como sigue:

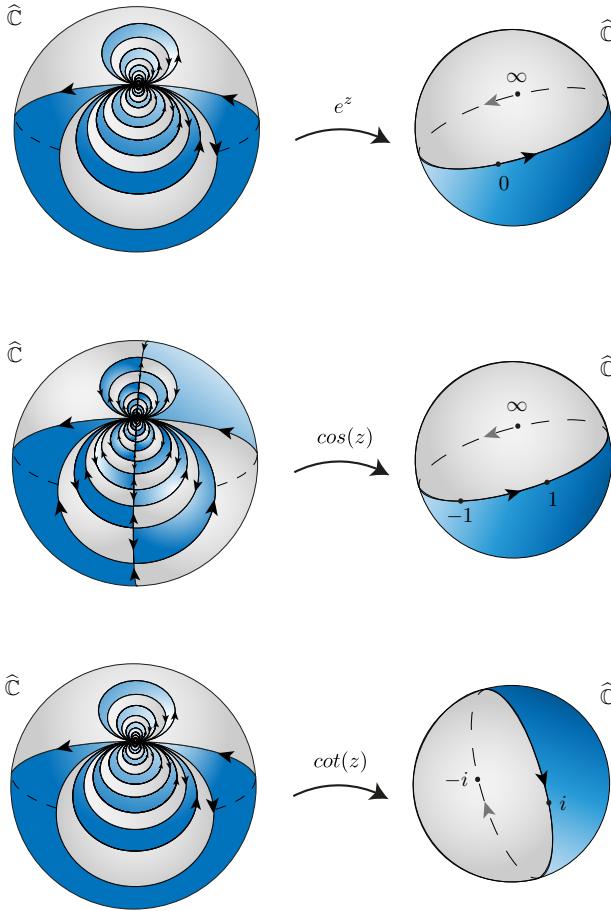
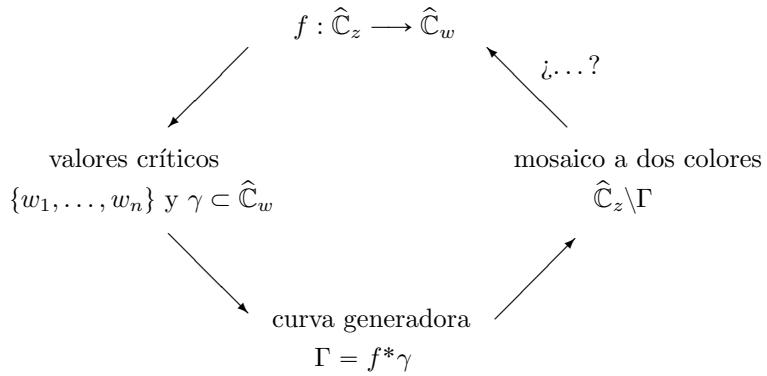


Figura 11: Mosaicos de Klein para funciones trascendentes. En los 3 casos el número de losetas que se acumulan en $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}_z$ es infinito.



Los signos de interrogación nos sugieren la búsqueda de funciones a partir de mosaicos topológicos con losetas de dos colores en el plano o en la esfera de Riemann, ver figura 12. De acuerdo a [11], los mosaicos topológicos (a)–(e) provienen de funciones meromorfas adecuadas.

Un contrejemplo debido a W. P. Thurston. El mosaico (f) en la figura 12 se debe a W. P. Thurston. Este mosaico topológico a dos colores no es equivalente topológicamente al mosaico de una función racional, ver figura 3 en [16].

Un resultado inverso al algoritmo de visualización de Felix Klein, es como sigue.

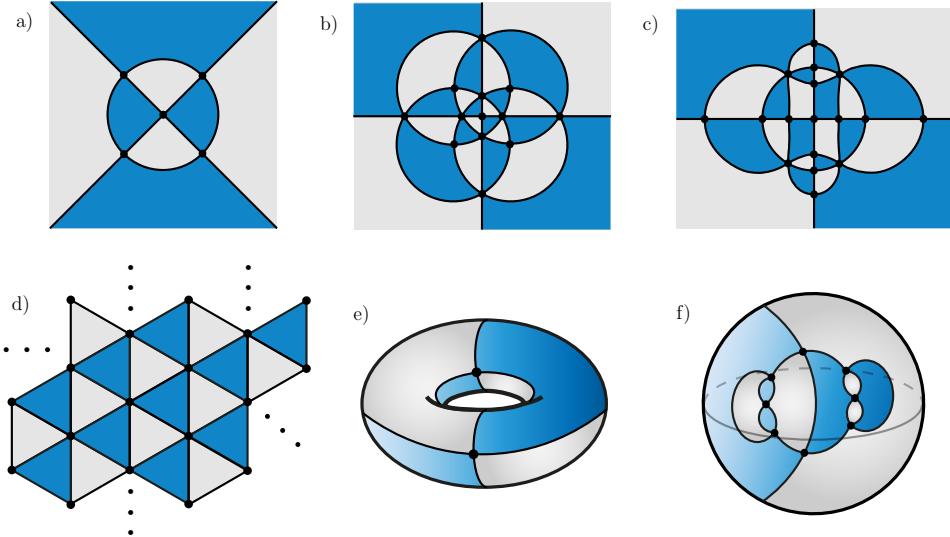


Figura 12: ¿Cuáles de estos mosaicos topológicos a dos colores son equivalentes topológicamente al mosaico de alguna función meromorfa?

Teorema 6.1. (L. J. González-Cely [10]). *Todo mosaico a dos colores en $\widehat{\mathbb{C}}_z$:*

- i) con $n \geq 2$ mosaicos azules y n grises (coloreados alternadamente),
 - ii) donde todas las losetas escapan una vez a $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}_z$,
- es equivalente topológicamente al mosaico de un polinomio complejo

$$P : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$$

de grado n (construido mediante el algoritmo de visualización de Klein, para una trayectoria γ adecuada).

□

7. Jalando la red polar.

En esta sección, nuestro objetivo es presentar un algoritmo de visualización para una función f que permita detectar;

- los ceros de f con sus multiplicidades,
- los polos de f con sus multiplicidades,
- los puntos críticos de f con sus ordenes.

Proveemos a la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ de la *red polar* de trayectorias radiales y circulares

$$\mathcal{R} = \underbrace{\{arg(z) = \theta_0 \mid \theta_0 \in [0, 2\pi)\}}_{\text{en negro}}, \quad \mathcal{C} = \{|z| = r_0 \mid r_0 \in \mathbb{R}^+\}.$$

En la figura 14, hemos dibujado la familia de trayectorias \mathcal{R} en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}_w$. Es conveniente enfatizar que, los círculos maximales que pasan por 0 e ∞ en $\widehat{\mathbb{C}}_w$ se descomponen en dos trayectorias de \mathcal{R} y sus puntos extremos; análogamente a como ocurre con $\mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$.

Observación 7.1. Propiedades de la red polar.

- i) Por cada punto $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pasan exactamente una trayectoria radial de \mathcal{R} y una trayectoria circular de \mathcal{C} .
- ii) Las trayectorias radiales y circulares forman un ángulo de $\pi/2$.
- iii) Las trayectorias radiales \mathcal{R} están orientadas, i.e. dados dos puntos en una trayectoria radial el más cercano al origen antecede al más lejano al origen.

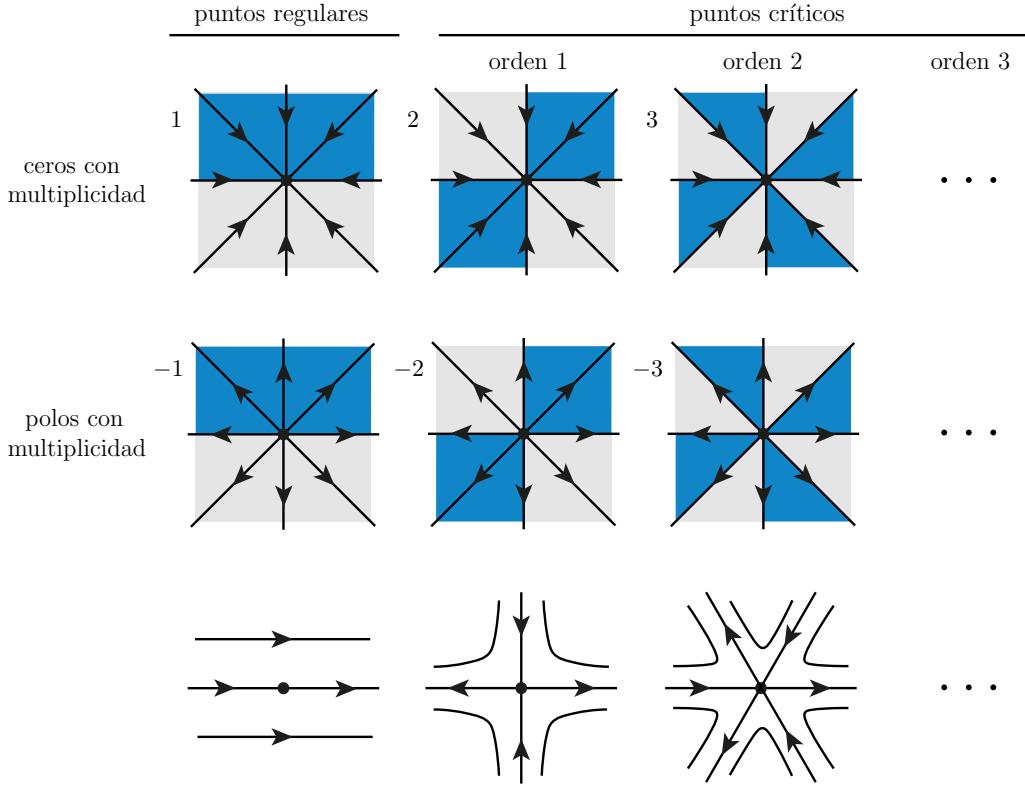


Figura 13: Comportamiento local de $f^*\mathcal{R}$ alrededor de $z_t \in \widehat{\mathbb{C}}_z$. En la primera línea, los ceros de f son pozos (atractores). En la segunda línea, los polos de f son fuentes (repulsoras). En la tercera línea, primera columna punto regular de f , en el resto los puntos críticos de f son multi-sillas con un número par de sectores hiperbólicos. En la tercera línea el color es azul si el valor crítico satisface que $\Im(f(z_t)) > 0$, es gris si $\Im(f(z_t)) < 0$, o tienen colores alternados (como en la figura 4) si $f(z_t) = 0, \infty$. Las columnas 2, 3, ... describen los puntos críticos de orden 1, 2,

Algoritmo de visualización jalando la red polar (para funciones meromorfas en la esfera de Riemann).

Consideramos una función meromorfa

$$f : \widehat{\mathbb{C}}_z \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w, \quad \text{de grado } n \geq 2..$$

Paso 1. Localizamos los ceros y polos de f con sus multiplicidades, los puntos críticos de f

$$z_1, \dots, z_\ell \subset \widehat{\mathbb{C}}_z$$

(con sus ordenes) y calculamos sus valores críticos

$$w_1, \dots, w_\ell \subset \widehat{\mathbb{C}}_w.$$

Paso 2. Definimos dos losetas en $\widehat{\mathbb{C}}_w$ de colores azul y gris para $\{\Re(w) > 0\}$ e $\{\Im(w) < 0\}$ respectivamente, obteniendo

$$\widehat{\mathbb{C}}_w \setminus \{\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \cup \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\} = \underbrace{\tau}_{\substack{\text{loseta} \\ \text{azul}}} \cup \underbrace{\tau'}_{\substack{\text{loseta} \\ \text{gris}}}.$$

Paso 3. Calculamos la **trayectoria generadora** del mosaico

$$\hat{\Gamma} = \{z \mid \Im(f(z)) = 0\} \subset \widehat{\mathbb{C}}_z.$$

Paso 4. Con ello $\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \hat{\Gamma}$ queda descompuesta en losetas que coloreamos como sigue:

- i) un punto $z \in \mathbb{C}_z$ es azul si $\operatorname{Im}(f(z)) > 0$,
- ii) un punto $z \in \mathbb{C}_z$ es gris si $\operatorname{Im}(f(z)) < 0$.

Ver la figura 14.

El algoritmo que nosotros atribuimos a S. Smale (quien lo introduce en sus trabajos con campos de Newton en [25] y posteriormente mejorado por H. Benzinger [5] y A. Alvarez-Parrilla *et al.* [3], [2] §4.4), nos proporciona el siguiente:

Teorema 7.2. (S. Smale.) 1) Toda función meromorfa $f : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$, de grado $n \geq 2$, determina un mosaico a dos colores

$$\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \widehat{\Gamma} = \underbrace{T_1 \cup \dots \cup T_{\hat{n}}}_{\text{losetas azules}} \cup \underbrace{T'_1 \cup \dots \cup T'_{\hat{n}}}_{\text{losetas grises}}, \quad (2)$$

donde $\hat{n} \leq n$, con igualdad si y sólo si f es afortunada.

2) Los ceros f son pozos (atractores) y los polos son fuentes (repulsoras) de las trayectorias $f^*\mathcal{R}$; en esos puntos las losetas alternan sus colores.

3) Los puntos críticos de f (distintos de ceros y/o polos) son multi-sillas de las trayectorias $f^*\mathcal{R}$.

4) Las multiplicidades de los ceros, polos y los ordenes de los puntos críticos están dados como en la figura 13 para las trayectorias de $f^*\mathcal{R}$. \square

Con ello hemos extendido la idea del algoritmo de Klein, incluyendo la detección de singularidades esenciales como en el corolario 5.2.

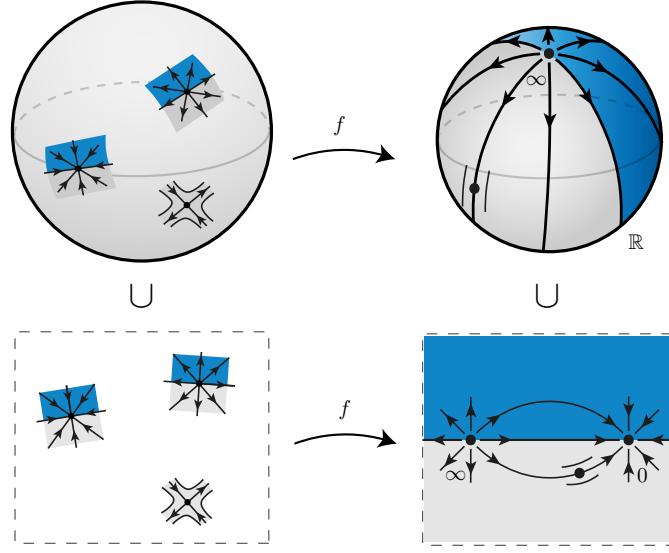


Figura 14: Los mosaicos locales para una función meromorfa deben pegar globalmente para formar un mosaico a la Smale bien definido en todo $\widehat{\mathbb{C}}_z \setminus \widehat{\Gamma}$.

Ejemplo 9. Consideramos la siguiente función racional

$$\frac{z^3 - 1}{z^2} : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$$

y agrupamos sus datos a continuación.

Tabla. Para $z \mapsto \frac{z^3 - 1}{z^2}$.

polos, multiplicidad	ceros, multiplicidad	puntos críticos z_ℓ , orden	valores críticos w_ℓ
(0, -2)	(1, 1)	$(2^{1/3}e^{\frac{\pi}{3}i}, 1)$	$\frac{3}{2^{2/3}}e^{\frac{\pi}{3}i}$
$(\infty, -1)$	$(e^{\frac{2\pi}{3}i}, 1)$	$(2^{1/3}e^{\pi i}, 1)$	$\frac{3}{2^{2/3}}e^{\pi i}$
	$(e^{\frac{4\pi}{3}i}, 1)$	$(2^{1/3}e^{-\frac{\pi}{3}i}, 1)$	$\frac{3}{2^{2/3}}e^{-\frac{\pi}{3}i}$
		(0, 1)	∞

La trayectoria generadora es

$$\hat{\Gamma} = \left\{ \operatorname{Im} \left(\frac{z^3 - 1}{z^2} \right) = 0 \right\} = \{y(x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x) = 0\} \subset \hat{\mathbb{C}}_z,$$

ella consta del eje real y un óvalo simétrico respecto a dicho eje, que pasa por 0, $-2^{1/3}$.

Es instructivo considerar la composición $(1/w) \circ ((z^3 - 1)/z^2)$ y verificar como cambian los ceros, polos y puntos críticos.

Tabla. Para $z \mapsto \frac{z^2}{z^3 - 1}$.

polos, multiplicidad	ceros, multiplicidad	puntos críticos z_ℓ , orden	valores críticos w_ℓ
(1, -1)	(0, 2)	$(2^{1/3}e^{\frac{\pi}{3}i}, 1)$	$\frac{2^{2/3}}{3}e^{\frac{2\pi}{3}i}$
$(e^{\frac{2\pi}{3}i}, -1)$	$(\infty, 1)$	$(2^{1/3}e^{\pi i}, 1)$	$\frac{2^{2/3}}{3}e^{\pi i}$
$(e^{\frac{4\pi}{3}i}, -1)$		$(2^{1/3}e^{-\frac{\pi}{3}i}, 1)$	$\frac{2^{2/3}}{3}e^{\frac{\pi}{3}i}$
		(0, 1)	0

La figura 15 muestra los mosaicos a la Smale y a la Klein para $(z^3 - 1)/z^2$.

Aplicando los algoritmos de Klein y Smale; f meromorfa en $\hat{\mathbb{C}}$ es afortunada si y sólo si $\Gamma = \hat{\Gamma}$ es posible para una elección adecuada de γ .

8. Breves palabras del desarrollo de esta técnica.

Como guía para la literatura del lector interesado, hacemos los siguientes comentarios (necesariamente incompletos).

- Hasta donde sabemos F. Klein fue pionero en construir mosaicos asociados a funciones analítico complejas, elaboró bellas figuras que pueden admirarse en [7], ver también [15] y [23].
- A. H. Schwarz estudió mosaicos de $\hat{\mathbb{C}}$ que provienen de ecuaciones diferenciales complejas de segundo orden, en particular de la ecuación hipergeométrica de Gauss, ver [24], [28] y más recientemente [12].
- R. Nevanlinna estableció un diccionario entre; funciones analítico complejas, mosaicos y gráficas discretas, ver [19], [20] capítulo XI, §2 y [21] capítulo 6.
- Motivados por problemas variacionales J. Jenkins [13] y K. Strebel [26] introdujeron las redes de trayectorias horizontales y verticales para diferenciales cuadráticas. S. Kerckhoff *et al.* [14], observaron que esas foliaciones son flujos de billares (1-formas holomorfas). En [18] se enunció la equivalencia entre diferenciales cuadráticas, 1-formas y campos complejos (en la categoría racional compleja). Recientemente en [1], la equivalencia se extiende para funciones en el caso analítico complejo con singularidades esenciales.
- Más recientemente, G. V. Belyi introdujo el estudio de superficies de Riemann compactas S y mosaicos formados por copias de un triángulo euclíadiano fijo; lo que ahora se conoce como funciones de Belyi y teoría de dibujos de niños, [4] y [17] capítulo 2.

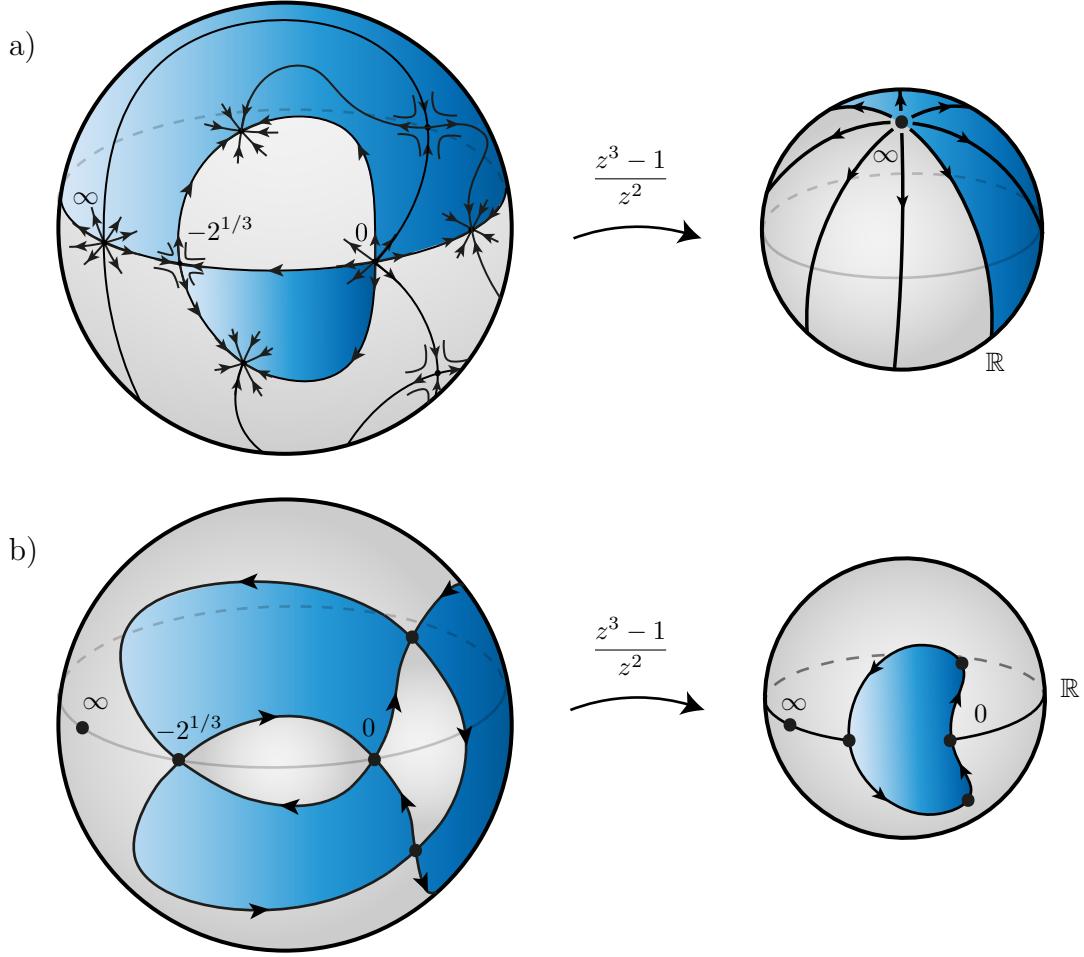


Figura 15: Mosaicos para la función meromorfa $f(z) = (z^3 - 1)/z^2$ de grado $n = 3$ y no afortunada. a) Mosaico a la Smale $\widehat{\mathbb{C}_z} \setminus \widehat{\Gamma}$ obtenido jalando la red polar bajo f , aparecen $2\hat{n} = 4$ losetas. b) Mosaico a la Klein $\widehat{\mathbb{C}_z} \setminus \Gamma$ para la misma función, aparecen $2n = 6$ losetas de acuerdo al teorema 4.1. Evidentemente $\widehat{\Gamma} \neq \Gamma$.

- La idea de jalar la red polar se debe a S. Smale. El resultado de jalar el campo radial atractor bajo una función, $f^*(-x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y})$ se conoce como campo de Newton asociado a f y tiene la propiedad de que el ω -límite de sus trayectorias coincide con los ceros de f . Ver [25], [3], [1] §3.2 y [2]. Ello produce un “método de Newton continuo” para hallar ceros de funciones analítico complejas.
- A. Eremenko y A. Gavrielyov probaron en [9] el siguiente resultado. Si todos los puntos críticos de una función racional f pertenecen a un círculo \mathcal{C} en la esfera de Riemann, entonces $f(\mathcal{C})$ es también un círculo. Esta es nuestra motivación para el concepto de función meromorfa afortunada.
- W. P. Thurston había enunciado desde mediados de los 80's un resultado profundo de caracterización combinatoria de la dinámica racional; ver el enunciado y la prueba en A. Douady y J. H. Hubbard [8]. El mismo formuló la pregunta: ¿cuándo un mosaico en la esfera proviene de una función racional? Ver S. Koch y T. Lei [16].
- Al jalar mediante f las redes cartesianas o polares se obtienen campos vectoriales analítico complejos en $\widehat{\mathbb{C}_z}$; que a priori tienen ceros, polos, singularidades esenciales y puntos de acumulación de las tres anteriores clases. El resultado inverso es válido; “todo campo analítico complejo singular en una superficie de Riemann que posee ceros, polos, singularidades esenciales y puntos de acumulación puede obtenerse

jalando la red cartesiana o la red polar, para funciones adecuadas”, ver [1] §3.

- El trabajo de A. Guillot [12] muestra otras bellas relaciones entre campos vectoriales complejos y estructuras geométricas.

Agradecimiento. A Iván González Ballesteros quién colaboró en la presentación de las figuras.

Referencias

- [1] A. Alvarez–Parrilla, J. Muciño–Raymundo, *Dynamics of singular complex analytic vector fields with essential singularities I*, Conform. Geom. Dyn., 21 (2017), 126–224. <http://dx.doi.org/10.1090/ecgd/306>
- [2] A. Alvarez–Parrilla, J. Muciño–Raymundo, S. Solorza and C. Yee–Romero, *Singular complex analytic vector fields on Riemann surfaces and visualization without numerical integration*, por aparecer en: Workshop in holomorphic Dynamics, Inst. Mat. UNAM (2019). <https://arxiv.org/abs/1811.04157>
- [3] A. Alvarez–Parrilla, A. Gómez–Arciga, A. Riesgo–Tirado, *Newton vector fields on the plane and on the torus*, Complex Variables and Elliptic Equations, Vol. 54 No. 5 (2009) 449–461. <https://doi.org/10.1080/17476930902755658>
- [4] G. V. Belyi, *On Galois extensions of a maximal cyclotomic field*. Math. USSR Izvestija 193, (1980), num. 14, 247–256. <https://doi.org/10.1070/IM1980v014n02ABEH001096>
- [5] H. E. Benzinger: *Plane autonomous systems with rational vector fields*, Trans. Amer. Math. Soc. 326 (1991), num. 2, 465–483. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1991-0992604-1>
- [6] W. Bergweiler, A. Eremenko, *On the singularities of the inverse to a meromorphic function of finite order*, Revista Matemática Iberoamericana, Vol 11, num. 2 (1995), num. 2, 375–373. <https://doi.org/10.4171/RMI/176>
- [7] E. Chislenko, Y. Tschinkel, *The Felix Klein Protocols*. Notices of the AMS (2007), 960–970. <https://www.ams.org/notices/200708/tx070800960p.pdf>
- [8] A. Douady, J. H. Hubbard, *A proof of Thurston’s topological characterization of rational functions*, Acta Math., 171, 2 (1993), 263–297. <https://doi.org/10.1007/BF02392534>
- [9] A. Eremenko, A. Gabrielov, *Rational functions with real critical points and the B. and M. Shapiro conjecture in real enumerative geometry*, Ann. of Math. (2) 155 (2002), no. 1, 10–129. <https://doi.org/10.2307/3062151>
- [10] L. J. González–Cely, *Combinatorial aspectos of complex polynomials and tessellations of the Riemann sphere*, Preprint (2019).
- [11] L. J. González–Cely, J. Muciño–Raymundo, *Tessellations and singular complex analytic functions*, Preprint (2019).
- [12] A. Guillot, *Complex differential equations and geometric structures in curves*, in: Hernández–Lamoneda L., et al. (eds) Geometrical Themes Inspired by the N –body Problem. Lecture Notes in Mathematics, vol 2204. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-71428-8_1
- [13] J. Jenkins, *Univalent Functions and Conformal Mapping*, Ergebnisse Der Mathematik Und Ihrer Grenzgebiete, Springer–Verlag, Berlin, 1958.
- [14] S. Kerckhoff, H. Masur, J. Smillie, *Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials*, Ann. of Math. 2, 124 (1986), no. 2, 293–311. <https://doi.org/10.2307/1971280>
- [15] F. Klein, *Lectures on the Icosahedron and the Solution of Equations of the Fifth Degree*, Second ed., Dover Publications, Inc., New York, N.Y. (1956).

- [16] S. Koch, T. Lei, *On balanced planar graphs, following W. Thurston*, Arxiv (2015). <https://arxiv.org/pdf/1502.04760.pdf>
- [17] S. K. Lando, A. K. Zvonkin, *Graphs on Surfaces and their Applications*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 141. Low-Dimensional Topology, II. Springer-Verlag, Berlin, 2004. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-38361-1>
- [18] J. Muciño-Raymundo, C. Valero-Valdés, *Bifurcations of meromorphic vector fields on the Riemann sphere*, Ergodic Theory Dynam. Systems **15** (1995), no. 6, 1211–1222. <https://doi.org/10.1017/S0143385700009883>
- [19] R. Nevanlinna, *Über Riemannsche flächen mit endlich vielen windungspunkten*, Acta Math. **58**, 1 (1932) 295–373. <https://doi.org/10.1007/BF02547780>
- [20] R. Nevanlinna, *Analytic Functions*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 162, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1970. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-85590-0>
- [21] R. Nevanlinna, V. Paatero, *Introduction to Complex Analysis*, Birkhäuser Verlag Basel, 1964.
- [22] R. Remmert, *Theory of Complex Functions*, Springer-Verlag, New York (1991). <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0939-3>
- [23] C. H. Rodríguez-Basulto. *Método de Newton y mosaicos en la esfera de Riemann*, Poster, XLI Congreso Nacional de la Soc. Mat. Mex. 2008. http://matmor.unam.mx/~muciray/licenciatura/Poster_valle.pdf
- [24] H. A. Schwarz, *Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt*, J. Reine Angew. Math. **75** (1873), 292–335. <https://doi.org/10.1515/crll.1873.75.292>
- [25] S. Smale, *A convergent process of price adjustment and global Newton methods*, J. Math. Econom., 3, 2 (1976), 107–120. [https://doi.org/10.1016/0304-4068\(76\)90019-7](https://doi.org/10.1016/0304-4068(76)90019-7)
- [26] K. Strelbel, *Quadratic Differentials*, Springer-Verlag (1984). <https://doi.org/10.1007/978-3-662-02414-0>
- [27] E. Wegert, *Visual Complex Functions An Introduction with Phase Portraits*, Springer Basel (2012). <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0180-5>
- [28] M. Yoshida, *Fuchsian Differential Equations*, Aspects of Mathematics, E 11, Vieweg & Sohn, Braunschweig (1987). <https://doi.org/10.1007/978-3-663-14115-0>
- [29] Video en Youtube, Autor: phuebu1. <https://www.youtube.com/watch?v=NTz5P8ofE3o>