



Boletín de la UNAM
Campus Morelia
No. 88 · Nov./Dic. 2020

ARTÍCULO

LA PARADOJA DEL HIPERJUEGO

Dr. Osvaldo Guzmán González
Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM

Desde que empecé a estudiar lógica matemática y teoría de conjuntos, sentí un gran interés por las paradojas. Una paradoja es una construcción del pensamiento que conduce a una contradicción inesperada, probándola de un razonamiento aparentemente correcto y partiendo de premisas aparentemente correctas. Una de las paradojas más conocidas, es la *paradoja del mentiroso*. Consideremos la siguiente afirmación (que llamaremos M1):

M1: Este enunciado es falso

Ahora nos preguntamos... ¿Es M1 verdadera o falsa? Veamos ambas opciones, en caso de que sea verdadera, esto dice que M1 es verdadera y, por lo

tanto, M1 es falsa. Ahora, si M1 fuera falsa, entonces es falso que M1 sea falsa, por lo que M1 es verdadera. De esta manera, tenemos que ¡M1 es falsa si y sólo si es verdadera! que es una contradicción. ¿Cómo podríamos resolver esta paradoja? Una posible solución sería rechazar que un enunciado tenga que ser verdadero o falso y declaramos que M1 no es ni verdadera ni falsa (lo cual abreviamos como "M1 no tiene valor de verdad"). Esta parece una buena solución, sin embargo, solo estamos cortando una cabeza a la Hidra pues esta solución solo crea más problemas. Ahora consideremos el enunciado M2:

M2: Este enunciado es falso o no tiene valor de verdad

CONTENIDO

ARTÍCULO

LA PARADOJA DEL HIPERJUEGO 1

GRAN ANGULAR

RECIBE CATEDRA MARCOS MOSHINSKY EL DR. JESÚS
ALBERTO TOALÁ, INVESTIGADOR DEL IRYA 4

ESTUDIANTES

CUASICRISTALES Y SIMETRÍAS PROHIBIDAS 5

BREVES DEL CAMPUS 6

PARA CONOCER MÁS 8

LIBROS

LA INCREÍBLE HISTORIA DE 8-VENADO,
GARRA DE JAGUAR. CONQUISTADOR DEL FIN
DEL MUNDO 8



¿Qué pasa con este enunciado? Primero, notemos que M2 debe tener un valor de verdad, pues en caso contrario M2 sería verdadera... ¡Por lo que tendría un valor de verdad! Usando el mismo razonamiento que antes, llegamos a que M2 no puede ser verdadera ni falsa. De esta manera, aunque nuestra propuesta solución resuelve el problema con M1, seguimos teniendo una paradoja con M2.

En esta publicación, expondremos la **paradoja del Hyperjuego**, la cual fue descubierta por el matemático William Zwicker y es realmente asombrosa. Esta paradoja habla sobre juegos de dos jugadoras (las cuales llamaremos Alicia y Dorothy). Los juegos cumplen las siguientes propiedades:

1. Alicia y Dorothy juegan alternadamente. Primero tira Alicia, después Dorothy, luego Alicia de nuevo...
2. Cada jugadora tiene completo conocimiento de las jugadas anteriores de ambas.
3. No hay ningún tipo de azar en el juego.
4. No hay empates, al final del juego, se declara una y solo una ganadora.

El juego del gato y el ajedrez no entran en la descripción anterior pues es posible empatar en ambos juegos, sin embargo, si acordamos que en caso de un empate le damos la victoria a Dorothy (por ser la segunda en jugar), entonces ya entran dentro de nuestra descripción. Notemos que no mencionamos algo sobre la longitud de los juegos, estos pueden ser de longitud arbitrariamente grande... ¡Incluso pueden tener longitud infinita! En un juego infinito, Alicia y Dorothy continuarán jugando por toda la eternidad... y al final del tiempo, se decidirá quién fue la ganadora. Diremos que un juego es **bien fundado** si este siempre termina en una cantidad finita de pasos. Por ejemplo, el juego del gato es bien fundado. En el ajedrez, existe la llamada “regla de los cincuenta movimientos”, que dice que, si en los últimos 50 movimientos de cada jugador ningún peón se ha movido y ninguna pieza ha sido capturada, entonces el juego termina (y según nuestras reglas, le daremos la victoria a Dorothy). Con esta regla, el ajedrez es un juego bien fundado, pero sin esta, no lo es (observe que, en un juego no bien fundado, puede haber partidas que solo tomen una cantidad finita de tiempo en terminar, pero hay al menos una que toma una infinidad de tiempo).

DIRECTORIO



Universidad Nacional
Autónoma de México

UNAM

RECTOR

Dr. ENRIQUE GRAUE WIECHERS

SECRETARIO GENERAL

Dr. LEONARDO LOMELI VANEGAS

SECRETARIO ADMINISTRATIVO

Dr. LUIS AGUSTÍN ÁLVAREZ ICAZA
LONGORIA

ABOGADA GENERAL

Dra. MÓNICA GONZÁLEZ CONTRÓ

COORDINADOR DE LA
INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA
Dr. WILLIAM LEE ALARDIN

CAMPUS MORELIA

CONSEJO DE DIRECCIÓN

Dr. ABEL CASTORENA MARTÍNEZ
Dr. AVTANDIL GOGICHAISHVILI
Dra. MARÍA ANA BEATRIZ MASERA CERUTTI
Dr. DIEGO PÉREZ SALICRUP
Dr. JOEL VARGAS ORTEGA
Dr. MARIO RODRÍGUEZ MARTÍNEZ
Dr. ANTONIO VIEIRA MEDRANO
Dr. LUIS ALBERTO ZAPATA GONZÁLEZ

COORDINADOR DE SERVICIOS ADMINISTRATIVOS

Lic. CLAUDIA LENINA SÁNCHEZ HERNÁNDEZ

JEFE UNIDAD DEVINCULACIÓN

F.M. RUBÉN LARIOS GONZÁLEZ

CONSEJO EDITORIAL

Dra. YSEÑIA ARREDONDO LEÓN
Lic. RODRIGO DE LEÓN GIRÓN
Mtra. LENNY GARCIDUEÑAS HUERTA
Mtra. DANIELA LÓPEZ
Dr. RIGOBERTO LÓPEZ JUÁREZ
Dr. JUAN CARLOS MORA CHAPARRO
C. M. D. I. ADRIÁN OROZCO GUTIÉRREZ
Dr. EDGARDO ROLDÁN PENSADO
M. EN C. LEONOR SOLÍS ROJAS
Dr. JESÚS ALBERTO TOALA SANZ

EDICIÓN

ROLANDO PRADO ARANGUA

CONTENIDOS

Mtra. LAURA SILLAS RAMÍREZ

DISEÑO Y FORMACIÓN

ROLANDO PRADO ARANGUA

BUM BOLETÍN DE LA UNAM CAMPUS

MORELIA ES UNA PUBLICACIÓN EDITADA POR LA
UNIDAD DE VINCULACIÓN DEL CAMPUS
DIRECCIÓN U.N.A.M. CAMPUS MORELIA:
ANTIGUA CARRETERA A PATZCUARO NO.
8701 COL. EX-HACIENDA DE SAN JOSÉ DE LA
HUERTA C.P. 58190 MORELIA, MICHOACÁN,
MÉXICO
TELÉFONO UNIDAD DE VINCULACIÓN:
(443) 322-38-62
CORREOS ELECTRÓNICOS:
vinculacion@csam.unam.mx
PÁGINA DE INTERNET:
<http://www.morelia.unam.mx/vinculacion/>

El **Hiperjuego** se juega de la siguiente manera: primero Alicia escoge un juego bien fundado en su primer turno y después lo

Ahora, consideremos la partida del Hiperjuego que se muestra en la Tabla 1.

| | | | | | |
|---------|--------------|--------------|--------------|--------------|-----|
| ALICIA | ¡HIPERJUEGO! | | ¡HIPERJUEGO! | | ... |
| DOROTHY | | ¡HIPERJUEGO! | | ¡HIPERJUEGO! | |

TABLA 1. PARADOJA DEL HIPERJUEGO QUE JUEGAN ALICIA Y DOROTHY.

juegan en los turnos consecuentes (pero ahora Dorothy será la primera jugadora y Alicia la segunda). La pregunta clave es la siguiente:

¿El Hiperjuego está bien fundado?

Demostraremos que el Hiperjuego está bien fundado (aquí se recomienda al lector parar la lectura e intentar demostrarlo por sí mismo). En su primer turno, Alicia escoge un juego bien fundado y después lo juegan. Al ser este bien fundado, solo tarda una cantidad finita de tiempo en completarse, por lo que esta partida del Hiperjuego solo duró una cantidad finita de pasos. Así, concluimos que el Hiperjuego está bien fundado.

Es decir, Alicia en su primer turno juega el Hiperjuego (lo cual es válido, pues ya probamos que el Hiperjuego está bien fundado). Según las reglas del Hiperjuego, ahora jugarán el Hiperjuego (solo que Dorothy será la primera jugadora y Alicia la segunda). De esta manera, en su turno, Dorothy puede tirar el Hiperjuego. Después, le tocará a Alicia y podrá escoger el Hiperjuego...

Sin embargo, ¡esta es una partida infinita del Hiperjuego!... ¡pero esto es imposible pues antes demostramos que el Hiperjuego estaba bien fundado! En resumen, demostramos que el Hiperjuego está bien fundado y después demostramos que no lo está, lo cual es una evidente contradicción.

¿Cómo se resuelve esta paradoja? Podríamos explicarlo aquí, pero preferimos dejarle al lector la aventura de resolverla. 

