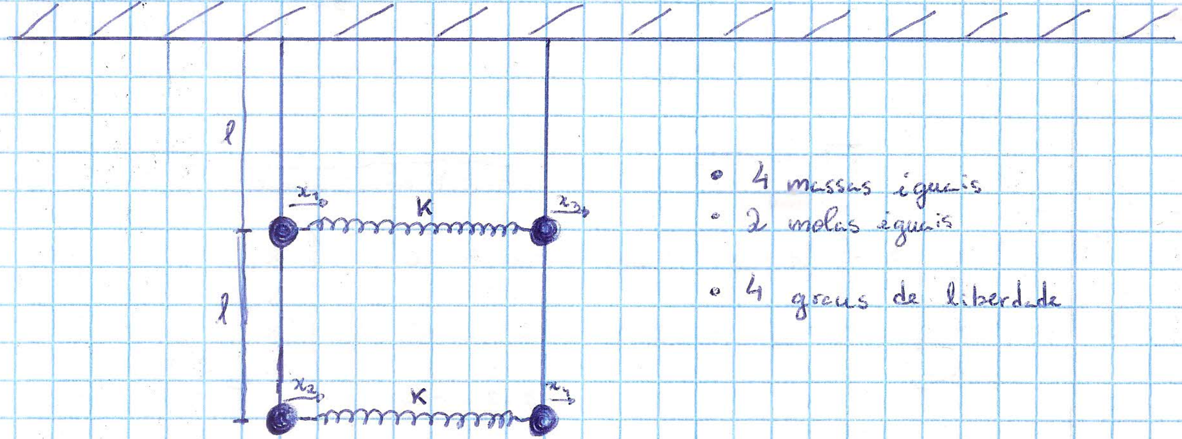
TPC - Oscilações e Ondas

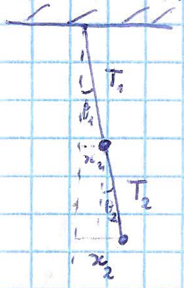
Miguel Lagoas Roldão
n.º 93405

- Encontrar os modos normais e escrever a expressão geral do movimento, como combinações lineares dos modos normais do seguinte sistema:



- 4 massas iguais
- 2 molas iguais
- 4 graus de liberdade

num pêndulo simples:



$$T_1 = 2mg \qquad T_2 = mg$$

$$\sin\theta_1 \approx \frac{x_1}{l} \qquad \sin\theta_2 \approx \frac{(x_2 - x_1)}{l}$$

$$\begin{cases} F_1 = -T_1 \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2 = -2mg\frac{x_1}{l} - mg\frac{x_1}{l} + mg\frac{x_2}{l} \\ F_2 = -T_2 \sin\theta_2 = -\frac{mg(x_2 - x_1)}{l} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1 = -3mg\frac{x_1}{l} + mg\frac{x_2}{l} \\ F_2 = +mg\frac{x_1}{l} - mg\frac{x_2}{l} \end{cases}$$

Portanto, as entradas da matriz $M^{-1}K$ do nosso sistema vão ser:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1/m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/m \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}$$

determinar K_{ij}:

- quando apenas m_1 se move $(x_2 = x_3 = x_4 = 0)$

$$\begin{cases} F_1 = -K_{11}x_1 = -\frac{3mg}{l}x_1 - Kx_1 & \Rightarrow K_{11} = \frac{3mg}{l} + K \\ F_2 = -K_{21}x_1 = \frac{mg}{l}x_1 & \Rightarrow K_{21} = -\frac{mg}{l} \\ F_3 = -K_{31}x_1 = Kx_1 & \Rightarrow K_{31} = -K \\ F_4 = 0 & \Rightarrow K_{41} = 0 \end{cases}$$

• quando apenas m_2 se move ($x_1 = x_3 = x_4 = 0$)

$$\begin{cases} F_1 = -K_{12}\,x_2 = \dfrac{mg}{\ell}x_2 & \Rightarrow K_{12} = -\dfrac{mg}{\ell} \\ F_2 = -K_{22}\,x_2 = -\dfrac{mg}{\ell}x_2 - Kx_2 & \Rightarrow K_{22} = \dfrac{mg}{\ell} + K \\ F_3 = 0 & \Rightarrow K_{32} = 0 \\ F_4 = -K_{42}\,x_2 = Kx_2 & \Rightarrow K_{42} = -K \end{cases}$$

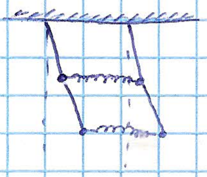
→ Fazendo o mesmo para x_3 e x_4, ficamos com a seguinte equação matricial do movimento.

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{3g}{\ell} + \frac{K}{m} & -g/\ell & -\frac{K}{m} & 0 \\ -g/\ell & g/\ell + \frac{K}{m} & 0 & -\frac{K}{m} \\ -\frac{K}{m} & 0 & \frac{3g}{\ell} + \frac{K}{m} & -\frac{g}{\ell} \\ 0 & -\frac{K}{m} & -\frac{g}{\ell} & g/\ell + \frac{K}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

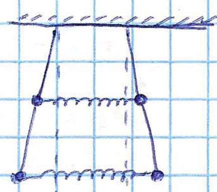
• Sabemos que as frequências normais de oscilação são os valores próprios da matriz $M^{-1}K$ e que os modos normais são dados pelos vetores próprios.

→ Utilizando o Wolfram Mathematica para calcular os valores e vetores próprios da matriz, obtemos:

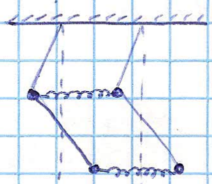
$\omega_1 = (2-\sqrt{2})\, g/\ell \longrightarrow A_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \\ \sqrt{2}-1 \\ 1 \end{bmatrix}$



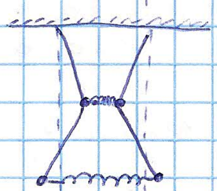
$\omega_2 = (2-\sqrt{2})\, g/\ell + \dfrac{2K}{m} \longrightarrow A_2 = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \\ \sqrt{2}-1 \\ 1 \end{bmatrix}$



$\omega_3 = (2+\sqrt{2})\, g/\ell \longrightarrow A_3 = \begin{bmatrix} -1-\sqrt{2} \\ 1 \\ -1-\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$



$\omega_4 = (2+\sqrt{2})\, g/\ell + \dfrac{2K}{m} \longrightarrow A_4 = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \\ -1-\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$



Temos por fim a seguinte função das posições em função do tempo, com A, B, C, D, E coeficientes reais, determináveis pelas condições iniciais.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = B \times A_1 \cos(\omega_1 t) + C \times A_2 \cos(\omega_2 t) + D \times A_3 \cos(\omega_3 t) + E \times A_4 \cos(\omega_4 t)$$