Grundbegriffe der Informatik Crashkurs WS 2017/18

fuks e.V. - Fachübergreifende Unternehmensberatung Karlsruher Studenten

Miguel Santos Correa

miguelsantoscorrea@gmail.com

https://github.com/miguel-sc/GBI-Crashkurs

Altklausuren

häufige Aufgabentypen:

- Multiple Choice
- Vollständige Induktion
- Relationen
- Kontextfreie Grammatiken
- Graphen
- Reguläre Ausdrücke / Endliche Akzeptoren
- Turingmaschinen

Altklausuren

weitere Aufgabentypen:

- Huffman-Codierung
- O-Kalkül
- Prädikatenlogik
- MIMA
- Speicher
- Hoare-Kalkül

4-ECTS-Version

nicht relevant:

- MIMA
- Speicher
- Relationen Teil 2

Themen

- viele Themen
- sehr oberflächlich

$\rightarrow$ Skript lernen!

Themen

- viele Themen
- sehr oberflächlich

→ Skript lernen!

- viele Aufgaben sind nicht schwer
- aber nur mit Übung

→ Altklausuren rechnen!

Gliederung

Relationen

Paare, Tupel

Unterschied zwischen Paaren und Mengen:

- $(1, 2) \neq (2, 1)$
- $\{1, 2\} = \{2, 1\}$

Kartesisches Produkt

Menge aller Paare (a,b) mit a $\in$ A und b $\in$ B
$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ und } b \in B\}$

$$\{a, b\} \times \{1, 2, 3\} = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

Relationen

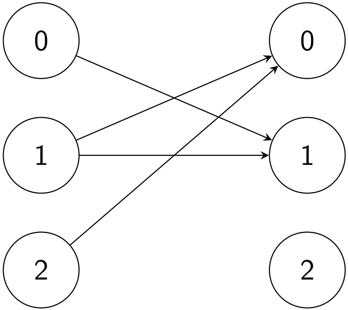
Relation R ist eine Teilmenge von $A \times B$
$R \subseteq A \times B$

- $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$
- $R_1 = \{(a, 1), (b, 1), (b, 2)\}$
- $R_2 = \{(a, 1), (a, 3), (b, 2), (b, 3)\}$
- $(b, 3) \in R_2$ oder bR_23

Eigenschaften von Relationen

Linkstotal

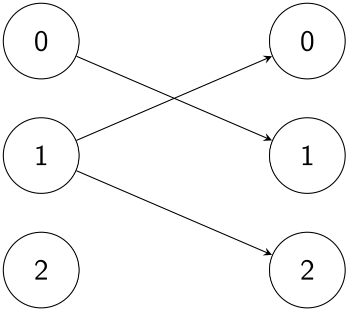
- $\forall a \in A \exists b \in B : (a, b) \in R$
- Jedes Element aus A steht in Relation zu mindestens einem Element aus B



Eigenschaften von Relationen

Rechtstotal (surjektiv)

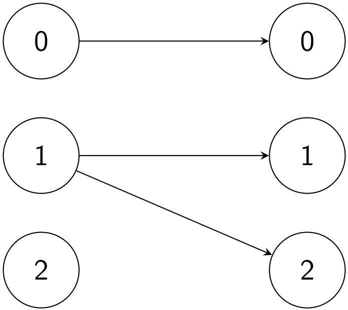
- $\forall b \in B \exists a \in A : (a, b) \in R$
- Jedes Element aus B steht in Relation zu mindestens einem Element aus A



Eigenschaften von Relationen

Linkseindeutig (injektiv)

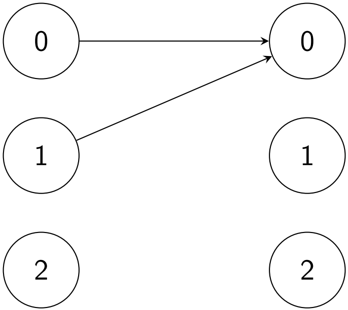
- $\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in R : a_1 \neq a_2 \Rightarrow b_1 \neq b_2$
- Jedes Element aus B steht höchstens mit einem Element aus A in Relation



Eigenschaften von Relationen

Rechtseindeutig

- $\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in R : b_1 \neq b_2 \Rightarrow a_1 \neq a_2$
- Jedes Element aus A steht höchstens mit einem Element aus B in Relation



Funktionen

- linkstotale und rechtseindeutige Relationen nennt man Funktionen
- andere Schreibweise: $f : A \rightarrow B$
- Definitionsbereich A, Zielbereich B, Bildbereich f(A)
- linkseindeutige Funktionen nennt man injektiv
- rechtstotale Funktionen nennt man surjektiv
- injektive und surjektive Funktionen nennt man bijektiv

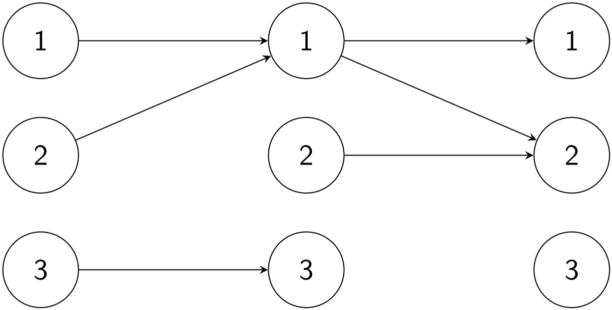
Produkt von Relationen

- $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$
- $S \circ R = \{(x,z) | \exists y \in M_2 : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$
- Beispiel:

$$\{(1,2),(2,2),(1,1)\} \circ \{(1,1),(2,1),(3,3)\}$$
$$= \{(1,2),(1,1),(2,2),(2,1)\}$$

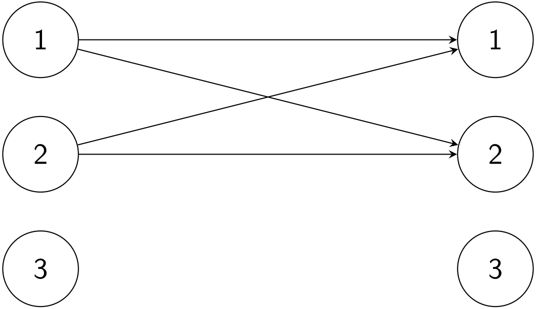
Produkt von Relationen

$$\{(1,2),(2,2),(1,1)\} \circ \{(1,1),(2,1),(3,3)\}$$
$$= \{(1,2),(1,1),(2,2),(2,1)\}$$



Produkt von Relationen

$$\{(1,2),(2,2),(1,1)\} \circ \{(1,1),(2,1),(3,3)\}$$
$$= \{(1,2),(1,1),(2,2),(2,1)\}$$



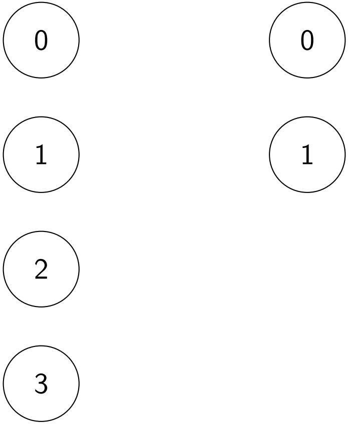
Klausuraufgabe: SS 2012 A2

$\mathbb{G}_n = \{0, 1, ..., n-1\}$

- Geben Sie (graphisch) eine Relation $R_a \subseteq \mathbb{G}_4 \times \mathbb{G}_2$ an, so dass R_a rechtstotal und rechtseindeutig, aber nicht linkstotal und nicht linkseindeutig ist.
- Wie viele solcher Relationen R_a gibt es?
- Geben Sie (in Mengenschreibweise) eine Relation $R_b \subseteq \mathbb{G}_2 \times \mathbb{G}_4$ an, so dass $R_b \circ R_a$ rechtstotal und linkseindeutig ist.

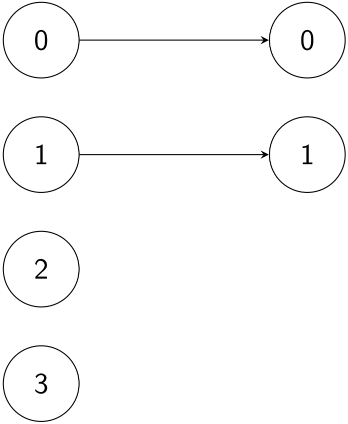
Klausuraufgabe: SS 2012 A2

rechtstotal und rechtseindeutig, aber nicht linkstotal und nicht linkseindeutig



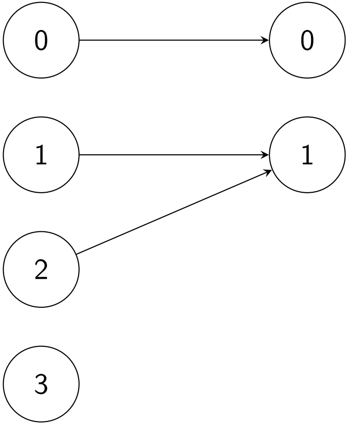
Klausuraufgabe: SS 2012 A2

rechtstotal und rechtseindeutig, aber nicht linkstotal und nicht linkseindeutig



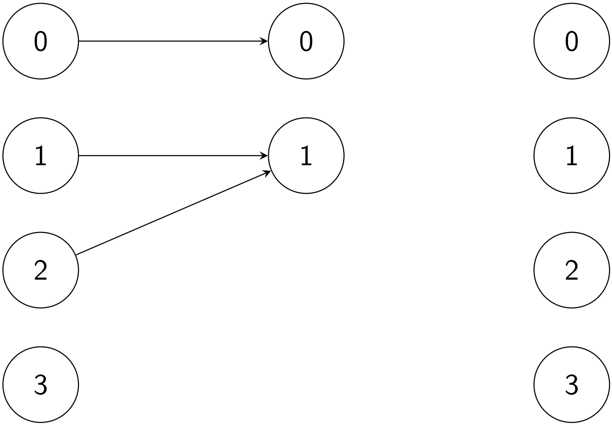
Klausuraufgabe: SS 2012 A2

rechtstotal und rechtseindeutig, aber nicht linkstotal und nicht linkseindeutig

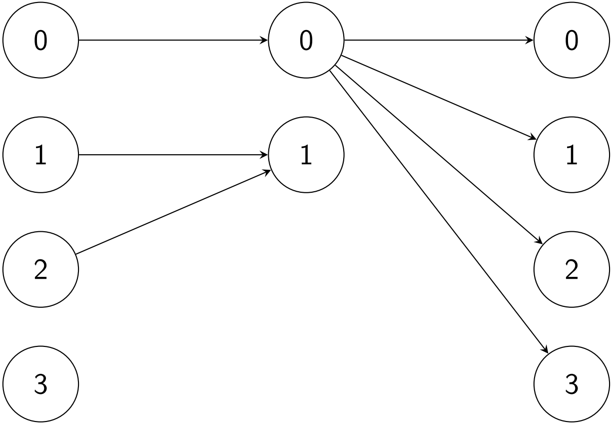


Klausuraufgabe: SS 2012 A2

Geben Sie (in Mengenschreibweise) eine Relation $R_b \subseteq \mathbb{G}_2 \times \mathbb{G}_4$ an, so dass $R_b \circ R_a$ rechtstotal und linkseindeutig ist.



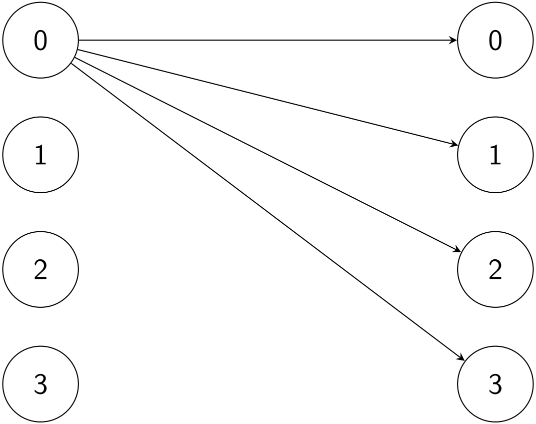
Klausuraufgabe: SS 2012 A2



$R_b = \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3)\}$

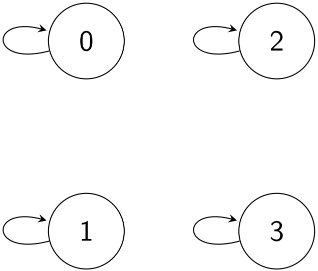
Klausuraufgabe: SS 2012 A2

Geben Sie (in Mengenschreibweise) eine Relation $R_b \subseteq \mathbb{G}_2 \times \mathbb{G}_4$ an, so dass $R_b \circ R_a$ rechtstotal und linkseindeutig ist.



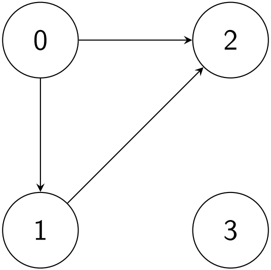
Reflexivität

- $R \subseteq M \times M$
- R ist reflexiv, wenn: $\Rightarrow \forall x \in M : (x, x) \in R$
- Jedes Element steht in Relation zu sich selbst.



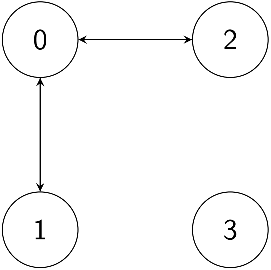
Transitivität

- $R \subseteq M \times M$
- R ist transitiv, wenn:
  $\forall x, y, z \in M : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$



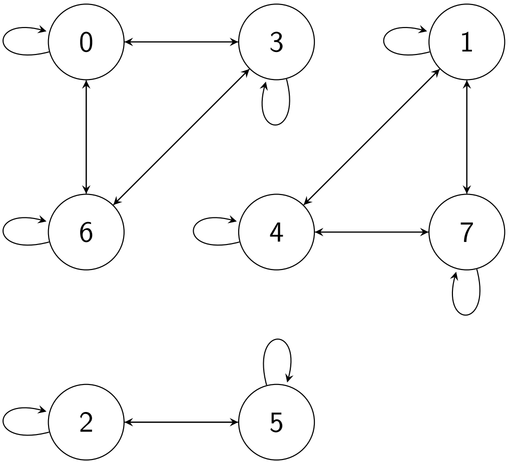
Symmetrie

- $R \subseteq M \times M$
- R ist symmetrisch, wenn: $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$



Äquivalenzrelation

- $R \subseteq M \times M$
- R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv



Kontextfreie Grammatiken

Kontextfreie Grammatiken

- G=(N,T,S,P)
- N: Menge der Nichtterminalsymbole
- T: Menge der Terminalsymbole
- S: Startsymbol
- P: Produktionsmenge

Beispiele

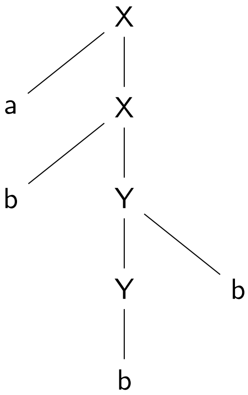
- $G_1 = (\{X, Y\}, \{a\}, Y, \{X \rightarrow \epsilon, Y \rightarrow aY|X\})$
- $G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow \epsilon|aSa|bSb\})$
- $G_3 = (\{X\}, \{a\}, X, P)$
  $P = \{X \rightarrow aX\}$

Ableitungen

- $G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \to \epsilon | aSa | bSb\})$
- $S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aabSbaa \Rightarrow aab\epsilon baa = aabbaa$
- $S \Rightarrow bSb \Rightarrow baSab \Rightarrow baab$
- $S \Rightarrow \epsilon$

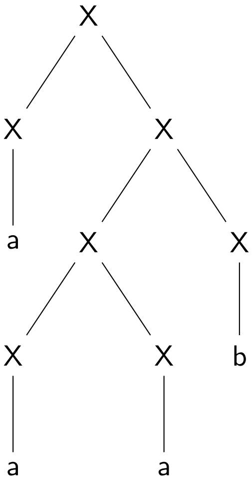
Ableitungsbaum

$G = (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, \{X \to aX | bY, Y \to Yb | b\})$



$X \Rightarrow aX \Rightarrow abY \Rightarrow abYb \Rightarrow abbb$

$G = (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow XX|a|b\})$



z.B. $X \Rightarrow XX \Rightarrow aX \Rightarrow aXX \Rightarrow aXb \Rightarrow aXXb \Rightarrow aaXb \Rightarrow aaab$

Klausuraufgabe: WS 2014/15 A2

Eine Folge $(L_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ formaler Sprachen sei wie folgt definiert:

$$L_0 = \{\}$$
$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{ba\}L_i\{ab\} \cup \{b\}$$

- Geben Sie L_1, L_2 und L_3 an.
- Geben Sie $L = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$ an.
- Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L$ an.
- Zeichnen sie passend zu Ihrer Grammatik einen Ableitungsbaum eines Wortes $w \in L_3 \setminus L_2$.

Klausuraufgabe: WS 2014/15 A2

$$L_0 = \{\}$$
$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{ba\}L_i\{ab\} \cup \{b\}$$

- $L_1 = \{b\}$

Klausuraufgabe: WS 2014/15 A2

$$L_0 = \{\}$$
$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{ba\}L_i\{ab\} \cup \{b\}$$

- $L_1 = \{b\}$
- $L_2 = \{babab, b\}$

Klausuraufgabe: WS 2014/15 A2

$$L_0 = \{\}$$
$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{ba\}L_i\{ab\} \cup \{b\}$$

- $L_1 = \{b\}$
- $L_2 = \{babab, b\}$
- $L_3 = \{babababab, babab, b\}$

Klausuraufgabe: WS 2014/15 A2

$$L_0 = \{\}$$
$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{ba\}L_i\{ab\} \cup \{b\}$$

- $L_1 = \{b\}$
- $L_2 = \{babab, b\}$
- $L_3 = \{babababab, babab, b\}$
- $L = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i =$

Klausuraufgabe: WS 2014/15 A2

$$L_0 = \{\}$$
$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{ba\}L_i\{ab\} \cup \{b\}$$

- $L_1 = \{b\}$
- $L_2 = \{babab, b\}$
- $L_3 = \{bababab ab, babab, b\}$
- $L = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i = \{(ba)^n b(ab)^n | n \in \mathbb{N}_0\}$

Klausuraufgabe: WS 2014/15 A2

$$L = \{(ba)^n b (ab)^n | n \in \mathbb{N}_0\}$$

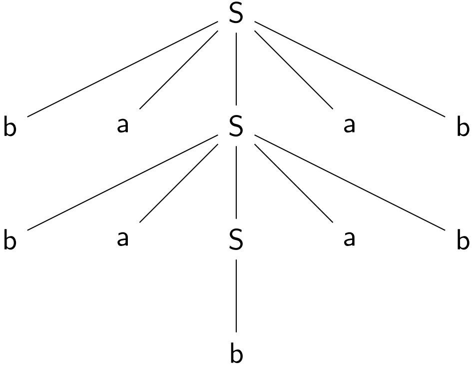
Klausuraufgabe: WS 2014/15 A2

$$L = \{(ba)^n b(ab)^n | n \in \mathbb{N}_0\}$$

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \to baSab|b\})$$

Klausuraufgabe: WS 2014/15 A2

$G = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow baSab | b\})$



$S \Rightarrow baSab \Rightarrow babaSabab \Rightarrow babababab$

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A6

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, S, P)$ mit der Produktionsmenge

$$\begin{aligned} P = \{S &\rightarrow ASB|A|B, \\ A &\rightarrow Aa|\epsilon, \\ B &\rightarrow bB|\epsilon\}. \end{aligned}$$

- Geben Sie zwei verschiedene Ableitungsbäume der Grammatik für das Wort *aab* an.
- Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die von G erzeugte Sprache $L(G)$ beschreibt.
- Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G' an, die die Sprache $(L(G))^*$ erzeugt.

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A6

$$P = \{S \to ASB|A|B,$$
$$A \to Aa|\epsilon,$$
$$B \to bB|\epsilon\}.$$

Ableitungen für das Wort *aab*

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A6

$$
\begin{aligned}
P = \{S &\to ASB|A|B,\\
A &\to Aa|\epsilon,\\
B &\to bB|\epsilon\}.
\end{aligned}
$$

Ableitungen für das Wort *aab*

- $S \Rightarrow ASB \Rightarrow AAB \Rightarrow ...$

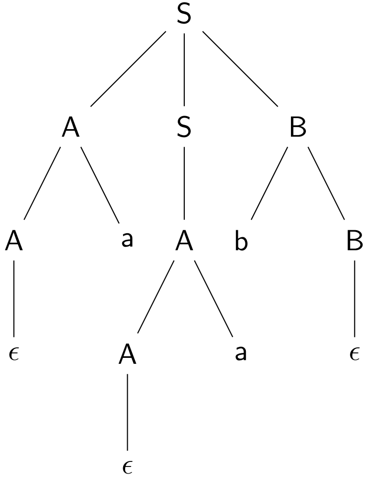
Klausuraufgabe: WS 2015/16 A6

$$P = \{S \to ASB|A|B,$$
$$A \to Aa|\epsilon,$$
$$B \to bB|\epsilon\}.$$

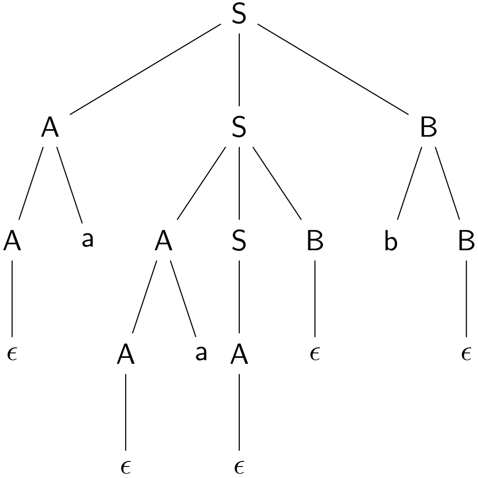
Ableitungen für das Wort *aab*

- $S \Rightarrow ASB \Rightarrow AAB \Rightarrow ...$
- $S \Rightarrow ASB \Rightarrow AASBB \Rightarrow^2 A\epsilon S\epsilon B \Rightarrow ...$

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A6



Klausuraufgabe: WS 2015/16 A6



Klausuraufgabe: WS 2015/16 A6

$$P = \{S \rightarrow ASB|A|B, \\ A \rightarrow Aa|\epsilon, \\ B \rightarrow bB|\epsilon\}.$$

- $L(G) =$

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A6

$$P = \{S \to ASB|A|B,$$
$$A \to Aa|\epsilon,$$
$$B \to bB|\epsilon\}.$$

- $L(G) = \{a\}^*\{b\}^*$

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A6

$$P = \{S \to ASB|A|B,$$
$$A \to Aa|\epsilon,$$
$$B \to bB|\epsilon\}.$$

- $L(G) = \{a\}^*\{b\}^*$
- $L(G)^* = \{a, b\}^*$

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A6

$$P = \{S \to ASB|A|B,$$
$$A \to Aa|\epsilon,$$
$$B \to bB|\epsilon\}.$$

- $L(G) = \{a\}^*\{b\}^*$
- $L(G)^* = \{a, b\}^*$
- $G' = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \to aS|bS|\epsilon\})$

Vollständige Induktion

Prinzip der vollständigen Induktion

Zu beweisen ist $\forall n \in \mathbb{N}_0 : A(n)$. Man zeigt:

- Für ein festes, aber beliebiges n gilt: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$
- A(0) ist wahr
- Gezeigt wurde: $A(0) \Rightarrow A(1) \Rightarrow A(2) \Rightarrow ...$

Vollständige Induktion

Mit der Definition

$$x_0 = 0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = x_n + 2$$

kann man die Hypothese $\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_n = 2n$ beweisen.

Vollständige Induktion

Induktionsanfang

- Zu zeigen: $x_n = 2n$ für n=0
- $x_0 = 0$ nach beiden Definitionen

Vollständige Induktion

Induktionsvorraussetzung

- Für ein beliebiges aber festes n gilt: $x_n = 2n$
- Wichtig: n ist nicht variabel, die Induktionsvorraussetzung gilt nicht für alle n!

Vollständige Induktion

Induktionsschluss

- Zeige: Für das beliebige aber feste n gilt: $x_{n+1} = 2(n+1)$
- Beweis:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 2 && \text{nach Definition} \\ &= 2n + 2 && \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\ &= 2(n+1) && \text{fertig} \end{aligned}$$

Klausuraufgabe: SS 2014 A5

Gegeben sei eine natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}_+$. Die Abbildung $S : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ sei induktiv definiert durch

$$S(0) = 1,$$
$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : S(k+1) = a^{k+1} + S(k).$$

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : (a-1)S(k) = a^{k+1} - 1.$$

Klausuraufgabe: SS 2014 A5

$$
\begin{aligned}
S(0) &= 1 \\
\forall k \in \mathbb{N}_0 : S(k+1) &= a^{k+1} + S(k) \\
\text{zu zeigen } \forall k \in \mathbb{N}_0 : (a-1)S(k) &= a^{k+1} - 1
\end{aligned}
$$

Klausuraufgabe: SS 2014 A5

$$S(0) = 1$$
$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : S(k+1) = a^{k+1} + S(k)$$
$$\text{zu zeigen } \forall k \in \mathbb{N}_0 : (a-1)S(k) = a^{k+1} - 1$$

Induktionsanfang
$k = 0$: Dann ist $(a-1)S(0) = a - 1 = a^{0+1} - 1$

Klausuraufgabe: SS 2014 A5

$$S(0) = 1$$
$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : S(k+1) = a^{k+1} + S(k)$$
$$\text{zu zeigen } \forall k \in \mathbb{N}_0 : (a-1)S(k) = a^{k+1} - 1$$

Induktionsvoraussetzung
für ein beliebiges aber festes k gelte: $(a-1)S(k) = a^{k+1} - 1$

Klausuraufgabe: SS 2014 A5

$$S(0) = 1$$
$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : S(k+1) = a^{k+1} + S(k)$$
$$\text{zu zeigen } \forall k \in \mathbb{N}_0 : (a-1)S(k) = a^{k+1} - 1$$

Induktionsschluss $k \to k+1$
zu zeigen: $(a-1)S(k+1) = a^{(k+1)+1} - 1$

Klausuraufgabe: SS 2014 A5

$$S(0) = 1$$
$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : S(k+1) = a^{k+1} + S(k)$$
$$\text{zu zeigen } \forall k \in \mathbb{N}_0 : (a-1)S(k) = a^{k+1} - 1$$

Induktionsschluss $k \to k+1$
zu zeigen: $(a-1)S(k+1) = a^{(k+1)+1} - 1$

$$(a-1)S(k+1) = (a-1)(a^{k+1} + S(k)) \qquad \text{nach Definition}$$

Klausuraufgabe: SS 2014 A5

$$
\begin{aligned}
S(0) &= 1 \\
\forall k \in \mathbb{N}_0 : S(k+1) &= a^{k+1} + S(k) \\
\text{zu zeigen } \forall k \in \mathbb{N}_0 : (a-1)S(k) &= a^{k+1} - 1
\end{aligned}
$$

Induktionsschluss $k \to k+1$
zu zeigen: $(a-1)S(k+1) = a^{(k+1)+1} - 1$

$$
\begin{aligned}
(a-1)S(k+1) &= (a-1)(a^{k+1} + S(k)) && \text{nach Definition} \\
&= (a-1)a^{k+1} + (a-1)S(k)
\end{aligned}
$$

Klausuraufgabe: SS 2014 A5

$$S(0) = 1$$
$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : S(k+1) = a^{k+1} + S(k)$$
$$\text{zu zeigen } \forall k \in \mathbb{N}_0 : (a-1)S(k) = a^{k+1} - 1$$

Induktionsschluss $k \to k+1$
zu zeigen: $(a-1)S(k+1) = a^{(k+1)+1} - 1$

$$\begin{aligned}
(a-1)S(k+1) &= (a-1)(a^{k+1} + S(k)) && \text{nach Definition} \\
&= (a-1)a^{k+1} + (a-1)S(k) \\
&= (a-1)a^{k+1} + a^{k+1} - 1 && \text{nach I.V.}
\end{aligned}$$

Klausuraufgabe: SS 2014 A5

$$S(0) = 1$$
$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : S(k+1) = a^{k+1} + S(k)$$
$$\text{zu zeigen } \forall k \in \mathbb{N}_0 : (a-1)S(k) = a^{k+1} - 1$$

Induktionsschluss $k \to k+1$
zu zeigen: $(a-1)S(k+1) = a^{(k+1)+1} - 1$

$$\begin{aligned}
(a-1)S(k+1) &= (a-1)(a^{k+1} + S(k)) && \text{nach Definition} \\
&= (a-1)a^{k+1} + (a-1)S(k) \\
&= (a-1)a^{k+1} + a^{k+1} - 1 && \text{nach I.V.} \\
&= a^{(k+1)+1} - 1
\end{aligned}$$

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A3

Gegeben sei folgende Funktion $f : \{a, b\}^* \to \{a, b\}^*$:

$$\begin{aligned} f(\epsilon) &= \epsilon \\ \forall w \in \{a, b\}^* : f(aw) &= bf(w) \\ \forall w \in \{a, b\}^* : f(bw) &= af(w) \end{aligned}$$

Beweisen Sie per Induktion, dass gilt:

$$\forall w_1, w_2 \in \{a, b\}^* : f(w_1 w_2) = f(w_1) f(w_2)$$

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A3

$$
\begin{aligned}
f(\epsilon) &= \epsilon \\
\forall w \in A^* : f(aw) &= bf(w) \\
\forall w \in A^* : f(bw) &= af(w) \\
\text{zu zeigen } \forall w = w_1 w_2 \in A^n : f(w_1 w_2) &= f(w_1) f(w_2)
\end{aligned}
$$

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A3

$$f(\epsilon) = \epsilon$$
$$\forall w \in A^* : f(aw) = bf(w)$$
$$\forall w \in A^* : f(bw) = af(w)$$
$$\text{zu zeigen } \forall w = w_1 w_2 \in A^n : f(w_1 w_2) = f(w_1) f(w_2)$$

Induktionsanfang

$n = 0$: $\{a, b\}^0 = \{\epsilon\}$

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A3

$$
\begin{aligned}
f(\epsilon) &= \epsilon \\
\forall w \in A^* : f(aw) &= bf(w) \\
\forall w \in A^* : f(bw) &= af(w) \\
\text{zu zeigen } \forall w = w_1 w_2 \in A^n : f(w_1 w_2) &= f(w_1) f(w_2)
\end{aligned}
$$

Induktionsanfang

$n = 0$: $\{a, b\}^0 = \{\epsilon\}$

$w_1 = w_2 = \epsilon$

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A3

$$
\begin{aligned}
f(\epsilon) &= \epsilon \\
\forall w \in A^* : f(aw) &= bf(w) \\
\forall w \in A^* : f(bw) &= af(w) \\
\text{zu zeigen } \forall w = w_1 w_2 \in A^n : f(w_1 w_2) &= f(w_1)f(w_2)
\end{aligned}
$$

Induktionsanfang

$n = 0$: $\{a, b\}^0 = \{\epsilon\}$

$w_1 = w_2 = \epsilon$

$f(\epsilon\epsilon) = f(\epsilon) = \epsilon = \epsilon\epsilon = f(\epsilon)f(\epsilon)$

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A3

$$f(\epsilon) = \epsilon$$
$$\forall w \in A^* : f(aw) = bf(w)$$
$$\forall w \in A^* : f(bw) = af(w)$$
$$\text{zu zeigen } \forall w = w_1 w_2 \in A^n : f(w_1 w_2) = f(w_1)f(w_2)$$

Induktionsvoraussetzung
Für alle Wörter w' mit beliebiger, aber fester Länge $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:
$\forall w' \in A^*$ mit $w' = w_1 w_2 : f(w_1 w_2) = f(w_1)f(w_2)$

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A3

$$f(\epsilon) = \epsilon$$
$$\forall w \in A^* : f(aw) = bf(w)$$
$$\forall w \in A^* : f(bw) = af(w)$$
$$\text{zu zeigen } \forall w = w_1 w_2 \in A^n : f(w_1 w_2) = f(w_1)f(w_2)$$

Induktionsschritt beliebiges $w \in A^{n+1}$

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A3

$$
\begin{aligned}
f(\epsilon) &= \epsilon \\
\forall w \in A^* : f(aw) &= bf(w) \\
\forall w \in A^* : f(bw) &= af(w) \\
\text{zu zeigen } \forall w = w_1 w_2 \in A^n : f(w_1 w_2) &= f(w_1)f(w_2)
\end{aligned}
$$

Induktionsschritt beliebiges $w \in A^{n+1}$

- $w = aw'$:

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A3

$$f(\epsilon) = \epsilon$$
$$\forall w \in A^* : f(aw) = bf(w)$$
$$\forall w \in A^* : f(bw) = af(w)$$
$$\text{zu zeigen } \forall w = w_1 w_2 \in A^n : f(w_1 w_2) = f(w_1)f(w_2)$$

Induktionsschritt beliebiges $w \in A^{n+1}$

- $w = aw'$: $f(w) = f(aw') = bf(w') = bf(w_1 w_2) = bf(w_1)f(w_2) = f(aw_1)f(w_2)$

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A3

$$
\begin{aligned}
f(\epsilon) &= \epsilon \\
\forall w \in A^* : f(aw) &= bf(w) \\
\forall w \in A^* : f(bw) &= af(w) \\
\text{zu zeigen } \forall w = w_1 w_2 \in A^n : f(w_1 w_2) &= f(w_1) f(w_2)
\end{aligned}
$$

Induktionsschritt beliebiges $w \in A^{n+1}$

- $w = aw'$: $f(w) = f(aw') = bf(w') = bf(w_1 w_2) = bf(w_1)f(w_2) = f(aw_1)f(w_2)$
- $w = bw'$: $f(w) = f(bw') = af(w') = af(w_1 w_2) = af(w_1)f(w_2) = f(bw_1)f(w_2)$

Huffman-Codierung

Huffman-Codierung

- Übersetzungsfunktion h(x) gesucht
- ϵ-freier und Präfixfreier Homomorphismus
- $h(x) : A \to \{0, 1\}^*$
- h(w) soll dabei möglichst kurz sein.
- Zeichen, die häufiger vorkommen, bekommen einen kürzeren Code.

w=aafbcdfbfbeefbcfbbfeb

x	a	b	c	d	e	f
$N_x(w)$	2	7	2	1	3	6

w=aafbcdfbfbeefbcfbbfeb

x	a	b	c	d	e	f
$N_x(w)$	2	7	2	1	3	6

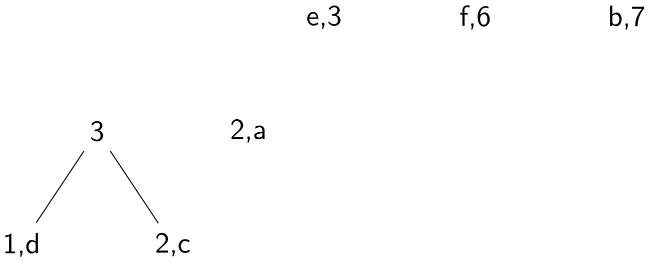
e,3 f,6 b,7

2,a

1,d 2,c

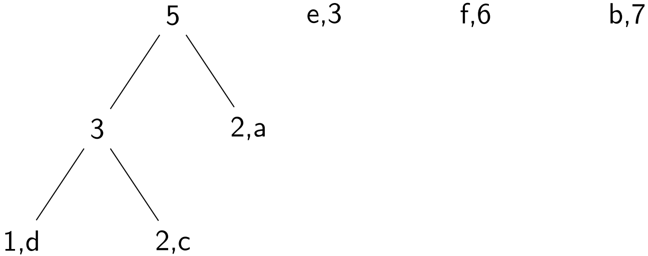
w=aafbcdfbfbeefbcfbbfeb

x	a	b	c	d	e	f
$N_x(w)$	2	7	2	1	3	6



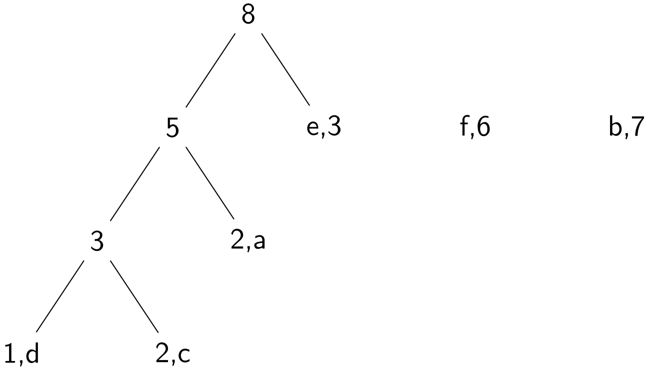
w=aafbcdfbfbeefbcfbbfeb

x	a	b	c	d	e	f
$N_x(w)$	2	7	2	1	3	6



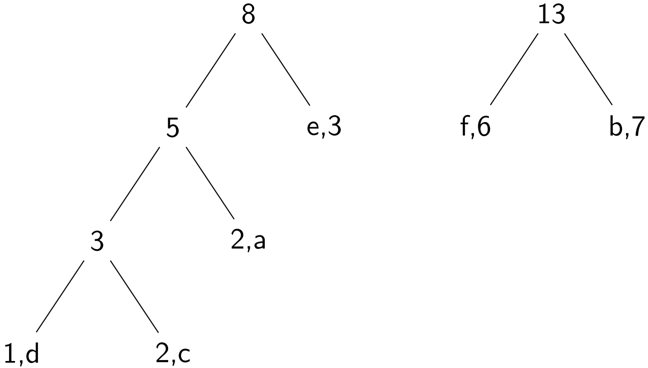
w=aafbcdfbfbeefbcfbbfeb

x	a	b	c	d	e	f
$N_x(w)$	2	7	2	1	3	6



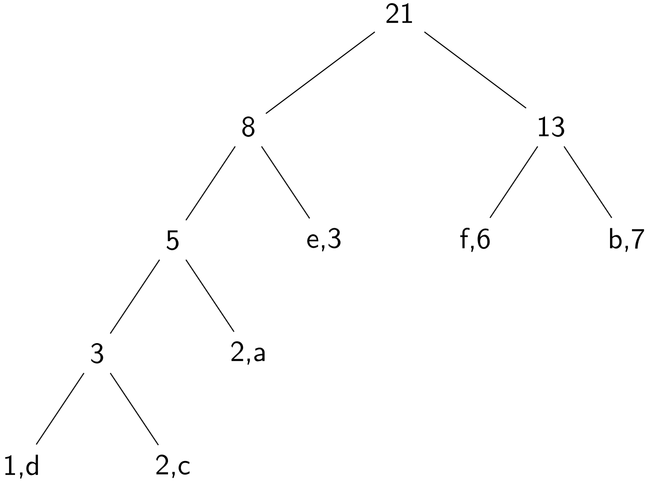
w=aafbcdfbfbeefbcfbbfeb

x	a	b	c	d	e	f
$N_x(w)$	2	7	2	1	3	6



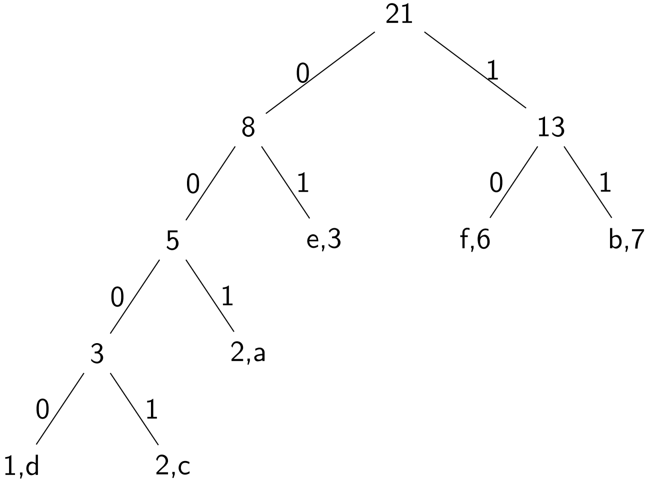
w=aafbcdfbfbeefbcfbbfeb

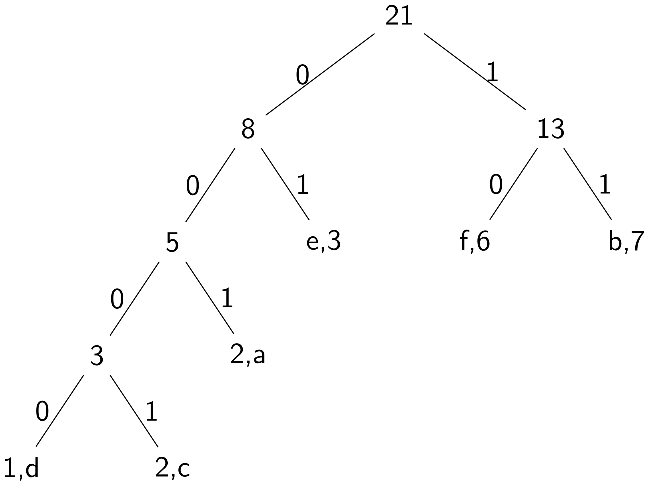
x	a	b	c	d	e	f
$N_x(w)$	2	7	2	1	3	6



w=aafbcdfbfbeefbcfbbfeb

x	a	b	c	d	e	f
$N_x(w)$	2	7	2	1	3	6





x	a	b	c	d	e	f
$h(x)$	001	11	0001	0000	01	10

Huffman-Codierung

- w=aafbcdfbfbeefbcfbbfeb
- h(w)=00100110110001000010111011010110110001101111100111
- Die Codierung von w ist 50 Zeichen lang.

Klausuraufgabe: SS 2011 A4

Gegeben sei das Alphabet $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ und ein Wort $w \in A^*$ in dem die Symbole mit folgenden Häufigkeiten vorkommen:

a	b	c	d	e	f	g
11	3	11	24	8	7	36

- Zeichnen Sie den Huffman-Baum.
- Geben Sie die Huffman-Codierung des Wortes *bad* an.

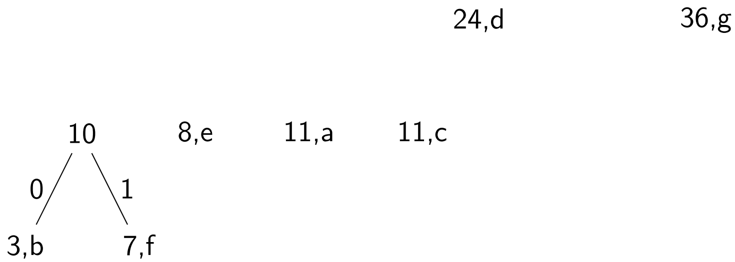
Klausuraufgabe: SS 2011 A4

24,d 36,g

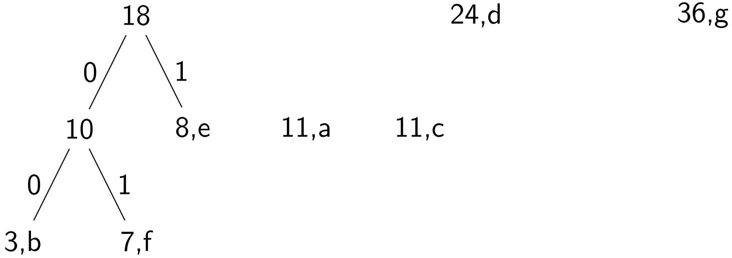
8,e 11,a 11,c

3,b 7,f

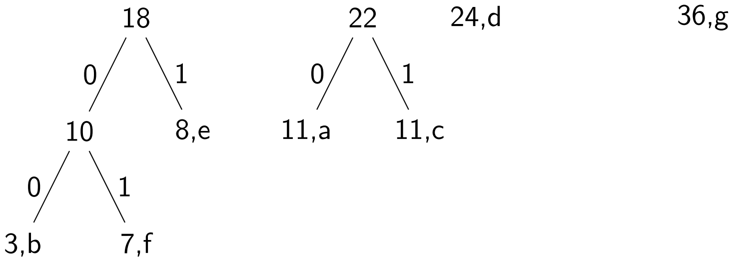
Klausuraufgabe: SS 2011 A4



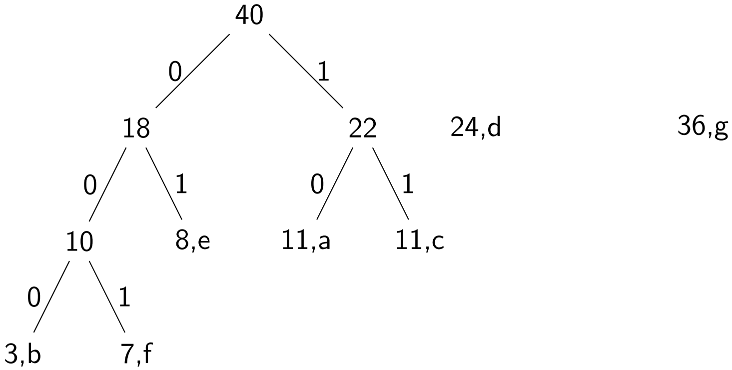
Klausuraufgabe: SS 2011 A4



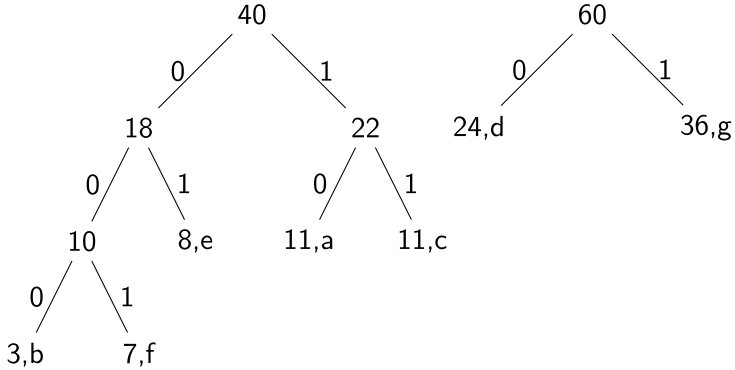
Klausuraufgabe: SS 2011 A4



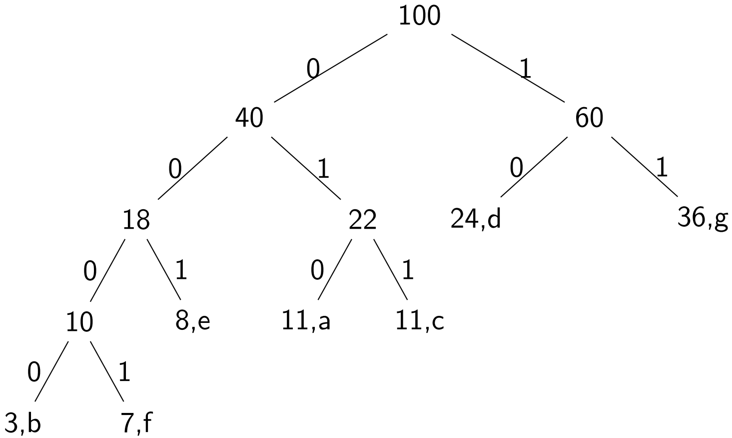
Klausuraufgabe: SS 2011 A4



Klausuraufgabe: SS 2011 A4



Klausuraufgabe: SS 2011 A4



$h(bad) = 0000\ 010\ 10$

Klausuraufgabe: SS 2011 A4

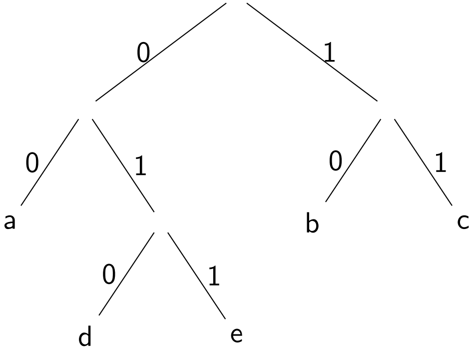
Gegeben seien zwei Codierungen über dem Alphabet $A = \{a, b, c, d, e\}$

x	a	b	c	d	e
$h(x)$	00	10	11	010	011

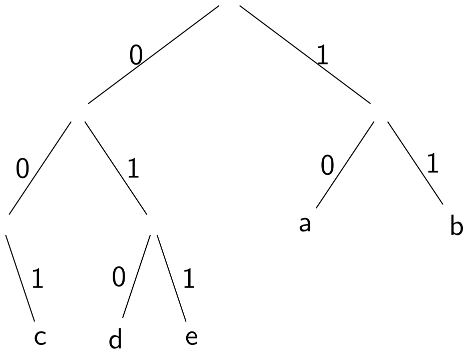
x	a	b	c	d	e
$h(x)$	10	11	001	010	011

Welche der beiden Codierungen ist eine gültige Huffman-Codierung?

x	a	b	c	d	e
$h(x)$	00	10	11	010	011



x	a	b	c	d	e
$h(x)$	10	11	001	010	011



Quantitative Aspekte

$\asymp$-Relation

$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ wächst asymptotisch oder größenordnungsmäßig so schnell wie $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ wenn gilt:

- $\exists c, c' \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geqslant n_0 : cf(n) \leqslant g(n) \leqslant c'f(n)$
- $f(n) \asymp g(n)$

$\asymp$-Relation

Beispiel:

- $g(n) = n^3 + 3n^2$
- $f(n) = 8n^3$

$\asymp$-Relation

Beispiel:

- $g(n) = n^3 + 3n^2$
- $f(n) = 8n^3$
- $g(n) = n^3 + 3n^2 \leqslant n^3 + 3n^3 = 4n^3 = 0.5f(n)$
  $\Rightarrow g(n) \leqslant 0.5f(n)$

$\asymp$-Relation

Beispiel:

- $g(n) = n^3 + 3n^2$
- $f(n) = 8n^3$
- $g(n) = n^3 + 3n^2 \leqslant n^3 + 3n^3 = 4n^3 = 0.5f(n)$
  $\Rightarrow g(n) \leqslant 0.5f(n)$
- $g(n) = n^3 + 3n^2 \geqslant n^3 = \frac{1}{8}f(n)$
  $\Rightarrow g(n) \geqslant \frac{1}{8}f(n)$
- $\Rightarrow \frac{1}{8}f(n) \leqslant g(n) \leqslant 0.5f(n)$
- $f(n) \asymp g(n)$

$\asymp$-Relation

Beispiel:

- $g(n) = 2^n$
- $f(n) = 3^n$

$\asymp$-Relation

Beispiel:

- $g(n) = 2^n$
- $f(n) = 3^n$
- $g(n) \geqslant cf(n)$
- $2^n \geqslant c3^n$

$\asymp$-Relation

Beispiel:

- $g(n) = 2^n$
- $f(n) = 3^n$
- $g(n) \geqslant cf(n)$
- $2^n \geqslant c3^n$
- $(\frac{2}{3})^n \geqslant c$

$\asymp$-Relation

Beispiel:

- $g(n) = 2^n$
- $f(n) = 3^n$
- $g(n) \geqslant cf(n)$
- $2^n \geqslant c3^n$
- $(\frac{2}{3})^n \geqslant c$
- Kein $c > 0$ erfüllt diese Ungleichung.

Θ-Notation

- $\Theta(f)$ ist die Menge aller Funktionen die größenordnungsmäßig so schnell wachsen wie f
- $\Theta(f) = \{g | g \asymp f\}$
- Beispiel: $\Theta(8n^3) = \{n^3 + 3n^2, 100n^3 - 10n, 0.01n^3 + 1000, ...\}$
- Alle Polynome gleichen Grades wachsen gleich schnell

O-Notation

- $O(f)$ ist die Menge aller Funktionen die größenordnungsmäßig höchstens so schnell wachsen wie f
- $O(f) = \{g | g \preceq f\}$
  $= \{g | \exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geqslant n_0 : g(n) \leqslant cf(n)\}$
- Beispiele:
  - $n^2 \in O(8n^3)$
  - $3n \in O(n^3 + 3n^2)$
  - $n^4 \in O(n^4)$
  - $n^a \in O(n^b)$ für $a \leqslant b$

Ω-Notation

- $\Omega(f)$ ist die Menge aller Funktionen die größenordnungsmäßig mindestens so schnell wachsen wie f
- $\Omega(f) = \{g | g \succeq f\}$
  $= \{g | \exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geqslant n_0 : cf(n) \leqslant g(n)\}$
- Beispiele:
  - $n^2 \in \Omega(log(n))$
  - $e^n \in \Omega(n^a)$

Wachstum wichtiger Funktionen

$$1 \preceq log(x) \preceq \sqrt{x} \preceq x \preceq xlog(x) \preceq x^2 \preceq 2^x < x!$$

Quiz

- $sin(x) + 2 \in \Theta(1)$?

Quiz

- $sin(x) + 2 \in \Theta(1)$? Ja, weil $1 \leqslant sin(x) + 2 \leqslant 3 \cdot 1$

Quiz

- $sin(x) + 2 \in \Theta(1)$? Ja, weil $1 \leqslant sin(x) + 2 \leqslant 3 \cdot 1$
- $log_a(x) \in \Theta(log_b(x))$?

Quiz

- $sin(x) + 2 \in \Theta(1)$? Ja, weil $1 \leqslant sin(x) + 2 \leqslant 3 \cdot 1$
- $log_a(x) \in \Theta(log_b(x))$? Ja, weil $log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)}$

Quiz

- $sin(x) + 2 \in \Theta(1)$? Ja, weil $1 \leqslant sin(x) + 2 \leqslant 3 \cdot 1$
- $log_a(x) \in \Theta(log_b(x))$? Ja, weil $log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)}$
- $log(x) \in \Omega(n^{0.1})$?

Quiz

- $sin(x) + 2 \in \Theta(1)$? Ja, weil $1 \leqslant sin(x) + 2 \leqslant 3 \cdot 1$
- $log_a(x) \in \Theta(log_b(x))$? Ja, weil $log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)}$
- $log(x) \in \Omega(n^{0.1})$? Nein.

Quiz

- $sin(x) + 2 \in \Theta(1)$? Ja, weil $1 \leqslant sin(x) + 2 \leqslant 3 \cdot 1$
- $log_a(x) \in \Theta(log_b(x))$? Ja, weil $log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)}$
- $log(x) \in \Omega(n^{0.1})$? Nein.
- $nlog(n) \in \Theta(log(n!))$?

Quiz

- $sin(x) + 2 \in \Theta(1)$? Ja, weil $1 \leqslant sin(x) + 2 \leqslant 3 \cdot 1$
- $log_a(x) \in \Theta(log_b(x))$? Ja, weil $log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)}$
- $log(x) \in \Omega(n^{0.1})$? Nein.
- $nlog(n) \in \Theta(log(n!))$? Ja, weil

$$\begin{aligned} log(n!) &= log(1) + log(2) + ... + log(n-1) + log(n) \\ &\leqslant log(n) + log(n) + ... + log(n) + log(n) = nlog(n) \\ &\geqslant log(n/2) + log(n/2) + ... + log(n/2) = n/2log(n/2) \end{aligned}$$

Unvergleichbare Funktionen

Es gibt unvergleichbare Funktionen. Beispiel:

$$f = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$g = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$f \notin O(g)$ und $g \notin O(f)$

Klausuraufgabe: WS 2013/14 A1

Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ an, für die gilt:

$$f(n) \notin O(n^3) \wedge f(n) \notin \Omega(n^3)$$

Klausuraufgabe: WS 2013/14 A1

Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ an, für die gilt:

$$f(n) \notin O(n^3) \land f(n) \notin \Omega(n^3)$$

$$f = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n^4 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$