

# GBI Crashkurs WS 2016/17

Miguel Santos Correa

23. Februar 2017

[miguelsantoscorrea@gmail.com](mailto:miguelsantoscorrea@gmail.com)

<https://github.com/miguel-sc>

# Gliederung

- 1 Graphen
- 2 Reguläre Ausdrücke / Endliche Akzeptoren
- 3 Quantitative Aspekte
- 4 Turingmaschinen

# Graphen

# Gerichtete Graphen

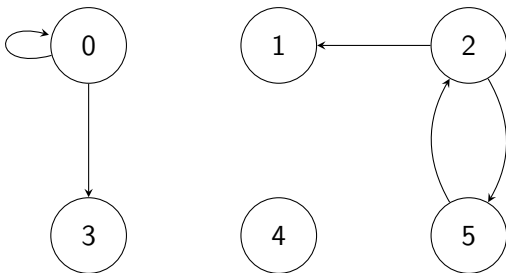
Ein gerichteter Graph  $G$  ist definiert als:

- $G = (V, E)$
- Knotenmenge  $V$
- Kantenmenge  $E$
- $E \subseteq V \times V$

# Beispielgraphen

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{(0, 0), (0, 3), (2, 1), (2, 5), (5, 2)\}.$$



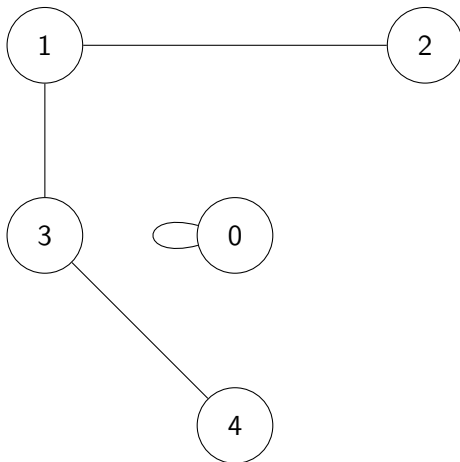
# Ungerichtete Graphen

Ein ungerichteter Graph ist definiert als:

- $U = (V, E)$
- Knotenmenge  $V$
- Kantenmenge  $E$
- $E \subseteq \{\{x, y\} \mid x \in V \wedge y \in V\}$

# Beispielgraphen

$$U = (\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{\{0\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}\})$$



# Ungerichtete Graphen

Achtung:

- für  $x \neq y$  ist  $\{x, y\}$  eine zweielementige Menge, ohne eine Festlegung von Reihenfolge
- für  $x = y$  ist die Menge  $\{x, y\} = \{x\}$  eine ein elementige Menge



# Teilgraphen

$G'$  ist ein Teilgraph von  $G$ , wenn:

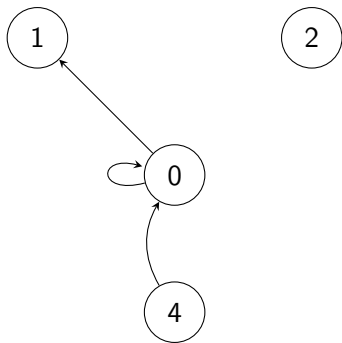
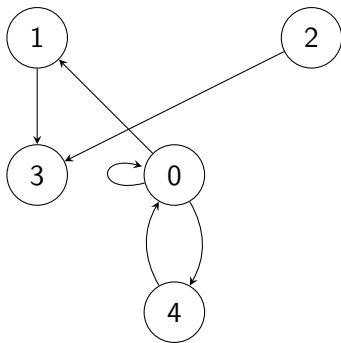
- $G = (V, E)$
- $G' = (V', E')$
- $V' \subseteq V$
- $E' \subseteq E \cap V' \times V'$

Ein Teilgraph besitzt also nur eine Teilmenge der Knoten mit einer Teilmenge an Kanten zwischen diesen Knoten.

# Beispielgraphen

$G = (\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{(0, 0), (0, 1), (0, 4), (1, 3), (2, 3), (4, 0)\})$

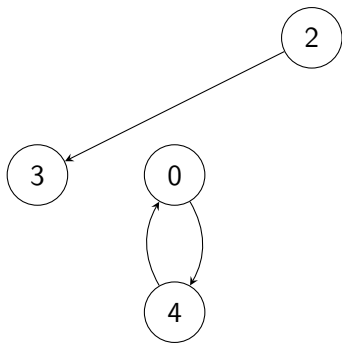
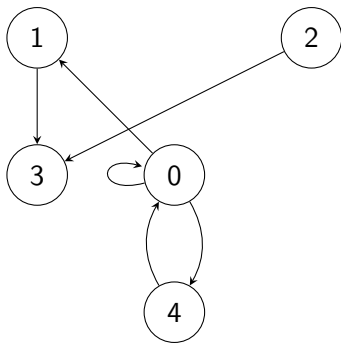
$G' = (\{0, 1, 2, 4\}, \{(0, 0), (0, 1), (4, 0)\})$



# Beispielgraphen

$G = (\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{(0, 0), (0, 1), (0, 4), (1, 3), (2, 3), (4, 0)\})$

$G' = (\{0, 2, 3, 4\}, \{(0, 4), (2, 3), (4, 0)\})$

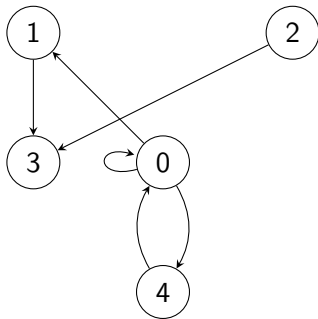


# Pfade

Für einen Pfad  $p$  gilt:

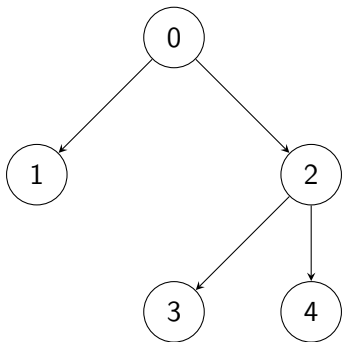
- $p = (v_0, \dots, v_n) \in V^+$
- $(v_i, v_{i+1}) \in E$
- Bei ungerichteten Graphen nennen wir soetwas einen Weg

# Pfade



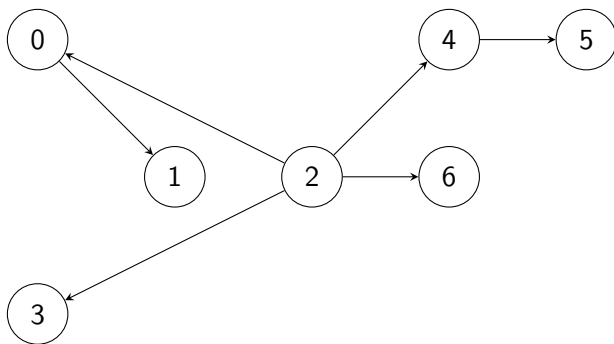
- $p_1 = (2, 3)$
- $p_2 = (0, 0, 4, 0)$
- $p_3 = (4, 0, 1, 3)$
- USW..

# Bäume



- eindeutiger Pfad von der Wurzel zu allen Knoten
- Bei ungerichteten Bäumen ist die Wurzel nicht eindeutig

# Bäume

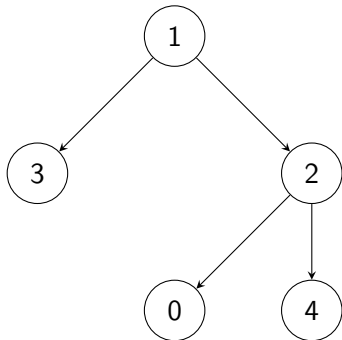
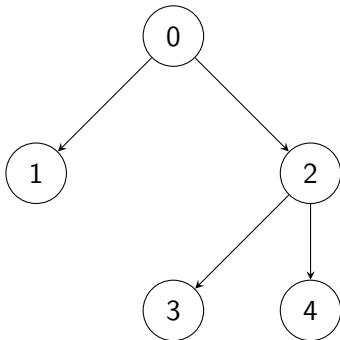


# Isomorphe Graphen

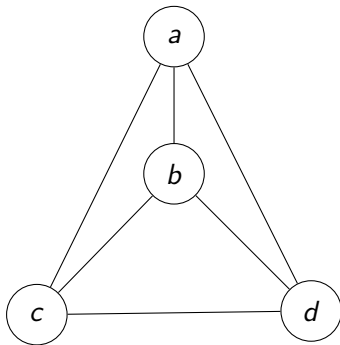
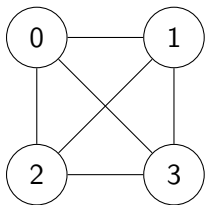
- Isomorphismus: bijektiver Homomorphismus
- Zwei Graphen sind isomorph, wenn sich der eine Graph durch Umbenennung der Knoten des anderen Graphen bilden lässt.



# Isomorphe Graphen



# Isomorphe Graphen



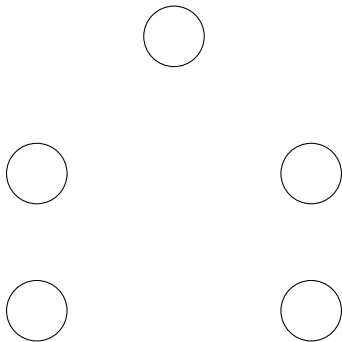
# Klausuraufgabe: SS 2013 A2

Zeichnen Sie alle ungerichteten nicht-isomorphen Graphen mit 5 Knoten, für die gilt:

Genau ein Knoten besitzt Grad 4, all anderen Knoten haben Grad 2.

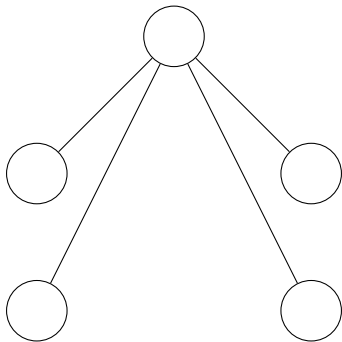
# Klausuraufgabe: SS 2013 A2

Genau ein Knoten besitzt Grad 4, all anderen Knoten haben Grad 2.



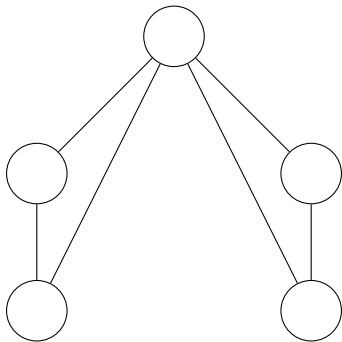
## Klausuraufgabe: SS 2013 A2

Genau ein Knoten besitzt Grad 4, all anderen Knoten haben Grad 2.



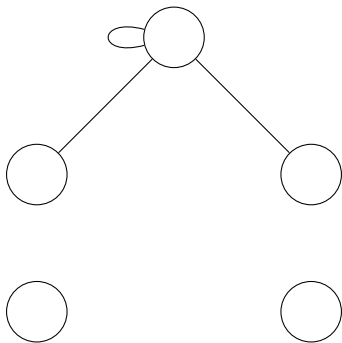
## Klausuraufgabe: SS 2013 A2

Genau ein Knoten besitzt Grad 4, all anderen Knoten haben Grad 2.



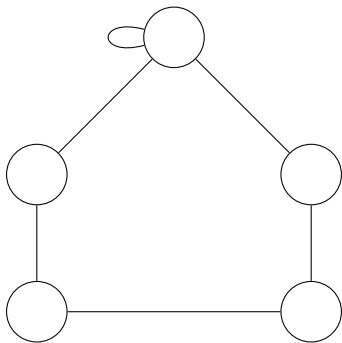
# Klausuraufgabe: SS 2013 A2

Genau ein Knoten besitzt Grad 4, all anderen Knoten haben Grad 2.



# Klausuraufgabe: SS 2013 A2

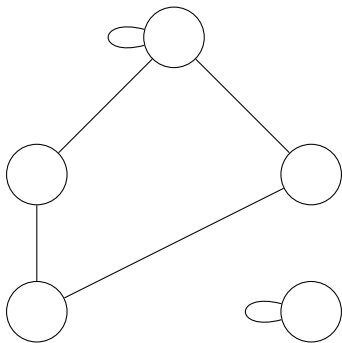
Genau ein Knoten besitzt Grad 4, all anderen Knoten haben Grad 2.





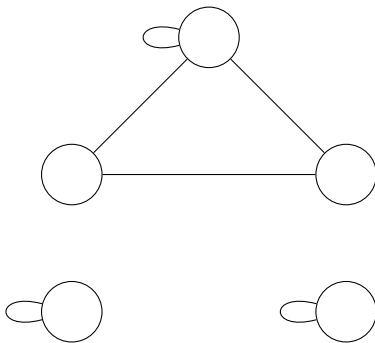
# Klausuraufgabe: SS 2013 A2

Genau ein Knoten besitzt Grad 4, all anderen Knoten haben Grad 2.



# Klausuraufgabe: SS 2013 A2

Genau ein Knoten besitzt Grad 4, all anderen Knoten haben Grad 2.

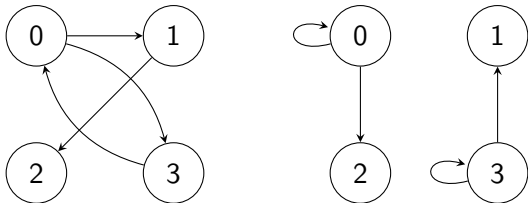


# Relationen

- $E \subseteq V \times V$
- $E$  ist eine Relation.
- Wie sieht ein Graph aus mit  $E^2, E^3$ ?

# Relationen

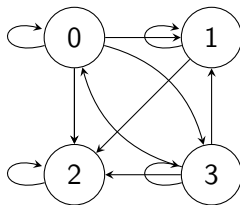
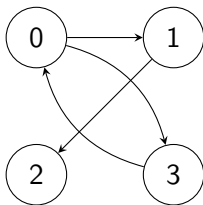
Links:  $G = (V, E)$ , Rechts:  $G = (V, E^2)$



$E^2$  sind also alle Pfade der Länge 2.

# Relationen

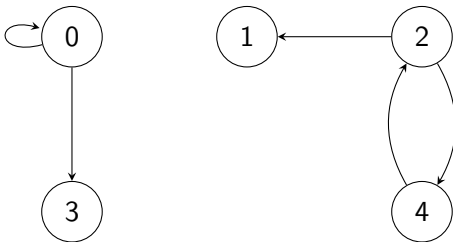
Links:  $G = (V, E)$ , Rechts:  $G = (V, E^*)$



# Adjazenzmatrix

- $n \times n$ -Matrix bei einem Graphen mit  $n$  Knoten
- $A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j) \in E \\ 0 & \text{falls } (i, j) \notin E \end{cases}$
- $A_{ij}$  gibt also an, ob eine Kante von  $i$  nach  $j$  existiert.

# Adjazenzmatrix



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Adjazenzmatrix

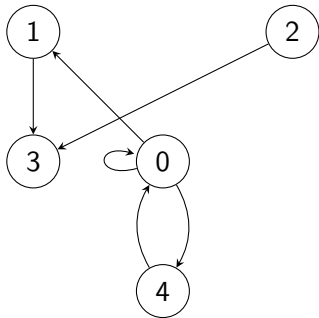
- Woran erkennt man Schlingen?
- Wie sehen Adjazenzmatrizen bei ungerichteten Graphen aus?
- Wie sieht der Graph zu folgenden Adjazenzmatrizen aus?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



# Wegematrix

- $W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls ein Weg von } i \text{ nach } j \text{ existiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- Beispiel:



$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

# Wegematrix

Gegeben sei eine  $3 \times 3$ -Matrix, die überall Einsen hat, außer an einer Stelle, die nicht auf der Hauptdiagonalen liegt. Zeigen Sie, dass A nicht die Wegematrix eines Graphen sein kann.

# Wegematrix

Gegeben sei eine  $3 \times 3$ -Matrix, die überall Einsen hat, außer an einer Stelle, die nicht auf der Hauptdiagonalen liegt. Zeigen Sie, dass A nicht die Wegematrix eines Graphen sein kann.

Beispiel: 
$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $W_{01} = 0$ , es existiert kein Weg von 0 zu 1
- $W_{02} = 1$ , es existiert ein Weg von 0 zu 2
- $W_{21} = 1$ , es existiert ein Weg von 2 zu 1

# Klausuraufgabe: WS 2012/13 A6

Für  $n \in \mathbb{N}_+$  sei folgender Graph  $G_n = (V_n, E_n)$  definiert:

$$V_n = \{x \mid x \subseteq \mathbb{G}_n \wedge |x| = 2\},$$

$$E_n = \{\{u, v\} \mid u \in V, v \in V, u \cap v = \emptyset\}.$$

- Zeichnen Sie  $G_4$ .
- Wie viele Kanten hat  $G_5$ ?
- Geben Sie die Wegematrix zu  $G_3$  an.

# Klausuraufgabe: WS 2012/13 A6

$$V_n = \{x \mid x \subseteq \mathbb{G}_n \wedge |x| = 2\},$$

$$E_n = \{\{u, v\} \mid u \in V, v \in V, u \cap v = \emptyset\}.$$

$V_4, E_4$  gesucht.

# Klausuraufgabe: WS 2012/13 A6

$$V_n = \{x \mid x \subseteq \mathbb{G}_n \wedge |x| = 2\},$$

$$E_n = \{\{u, v\} \mid u \in V, v \in V, u \cap v = \emptyset\}.$$

$V_4, E_4$  gesucht.

$\{0, 1\}$

$\{2, 3\}$

$\{0, 2\}$

$\{1, 3\}$

$\{0, 3\}$

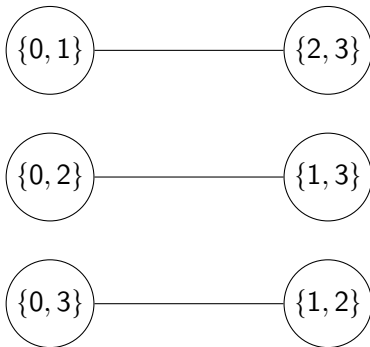
$\{1, 2\}$

# Klausuraufgabe: WS 2012/13 A6

$$V_n = \{x \mid x \subseteq \mathbb{G}_n \wedge |x| = 2\},$$

$$E_n = \{\{u, v\} \mid u \in V, v \in V, u \cap v = \emptyset\}.$$

$V_4, E_4$  gesucht.



# Klausuraufgabe: WS 2012/13 A6

$$V_n = \{x \mid x \subseteq \mathbb{G}_n \wedge |x| = 2\},$$
$$E_n = \{\{u, v\} \mid u \in V, v \in V, u \cap v = \emptyset\}.$$

$V_5, E_5$  gesucht.

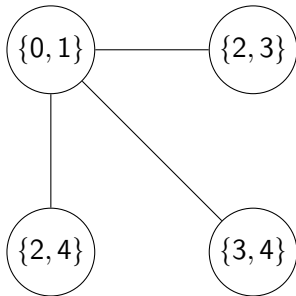


# Klausuraufgabe: WS 2012/13 A6

$$V_n = \{x \mid x \subseteq \mathbb{G}_n \wedge |x| = 2\},$$

$$E_n = \{\{u, v\} \mid u \in V, v \in V, u \cap v = \emptyset\}.$$

$V_5, E_5$  gesucht.



# Klausuraufgabe: WS 2012/13 A6

- Es gibt  $5 \cdot 4/2$  Knoten
- Jeder Knoten hat 3 Kanten
- $5 \cdot 4/2 \cdot 3 = 30$
- $30/2 = 15$  Kanten (Doppelzählung)

# Reguläre Ausdrücke / Endliche Akzeptoren

# Reguläre Ausdrücke

$A$  ist ein beliebiges Alphabet,  $Z = \{ |, (, ), *, \emptyset \}$

Dann:

- $\emptyset$  ist ein regulärer Ausdruck
- Für jedes  $a \in A$  ist  $a$  ein regulärer Ausdruck
- Für die regulären Ausdrücke  $A_1$  und  $A_2$  sind  $(A_1|A_2)$  und  $(A_1A_2)$  auch reguläre Ausdrücke
- Ist  $A$  ein regulärer Ausdruck, so ist auch  $A^*$
- Nichts anderes ist ein regulärer Ausdruck

# Reguläre Ausdrücke

$\langle R \rangle$  sei die Sprache über dem regulären Ausdruck  $R$ .

Dann:

- $\forall x \in A : \langle x \rangle = \{x\}$
- $\langle R_1 | R_2 \rangle = \langle R_1 \rangle \cup \langle R_2 \rangle$
- $\langle R_1 R_2 \rangle = \langle R_1 \rangle \langle R_2 \rangle$
- $\langle R^* \rangle = \langle R \rangle^*$

# Reguläre Ausdrücke

- $R = a, \langle R \rangle = \{a\}$

# Reguläre Ausdrücke

- $R = a, \langle R \rangle = \{a\}$
- $R = (a|b), \langle R \rangle = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$

# Reguläre Ausdrücke

- $R = a, \langle R \rangle = \{a\}$
- $R = (a|b), \langle R \rangle = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
- $R = (aa|b)^*, \langle R \rangle = \{aa, b\}^*$



# Reguläre Ausdrücke

- $R = a, \langle R \rangle = \{a\}$
- $R = (a|b), \langle R \rangle = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
- $R = (aa|b)^*, \langle R \rangle = \{aa, b\}^*$
- $R = aba(ab|aa)^*, \langle R \rangle = \{aba\}\{ab, aa\}^*$

# Reguläre Ausdrücke

- $R = a, \langle R \rangle = \{a\}$
- $R = (a|b), \langle R \rangle = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
- $R = (aa|b)^*, \langle R \rangle = \{aa, b\}^*$
- $R = aba(ab|aa)^*, \langle R \rangle = \{aba\}\{ab, aa\}^*$
- $R = aa|(bb)^*, \langle R \rangle = \{aa\} \cup \{bb\}^*$

# Reguläre Ausdrücke

- $R = a, \langle R \rangle = \{a\}$
- $R = (a|b), \langle R \rangle = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
- $R = (aa|b)^*, \langle R \rangle = \{aa, b\}^*$
- $R = aba(ab|aa)^*, \langle R \rangle = \{aba\}\{ab, aa\}^*$
- $R = aa|(bb)^*, \langle R \rangle = \{aa\} \cup \{bb\}^*$
- $R = \emptyset, \langle R \rangle = \{\}$

# Reguläre Ausdrücke

- $R = a, \langle R \rangle = \{a\}$
- $R = (a|b), \langle R \rangle = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
- $R = (aa|b)^*, \langle R \rangle = \{aa, b\}^*$
- $R = aba(ab|aa)^*, \langle R \rangle = \{aba\}\{ab, aa\}^*$
- $R = aa|(bb)^*, \langle R \rangle = \{aa\} \cup \{bb\}^*$
- $R = \emptyset, \langle R \rangle = \{\}$
- $R = \emptyset^*, \langle R \rangle = \{\epsilon\}$

# Reguläre Ausdrücke

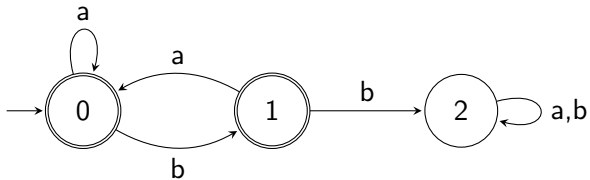
- $R = a, \langle R \rangle = \{a\}$
- $R = (a|b), \langle R \rangle = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
- $R = (aa|b)^*, \langle R \rangle = \{aa, b\}^*$
- $R = aba(ab|aa)^*, \langle R \rangle = \{aba\}\{ab, aa\}^*$
- $R = aa|(bb)^*, \langle R \rangle = \{aa\} \cup \{bb\}^*$
- $R = \emptyset, \langle R \rangle = \{\}$
- $R = \emptyset^*, \langle R \rangle = \{\epsilon\}$
- $R = \emptyset * |ab, \langle R \rangle = \{\epsilon, ab\}$

# Endliche Akzeptoren

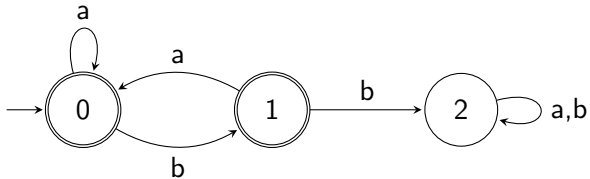
Ein endlicher Akzeptor  $A = (Z, z_0, X, f, F)$  wird festgelegt durch

- endliche Zustandsmenge  $Z$
- einen Anfangszustand  $z_0 \in Z$
- ein Eingabealphabet  $X$
- eine Zustandsüberföhrungsfunktion  $f : Z \times X \rightarrow Z$
- eine Menge  $F \subseteq Z$  akzeptierender Zustände

# Endliche Akzeptoren



# Endliche Akzeptoren

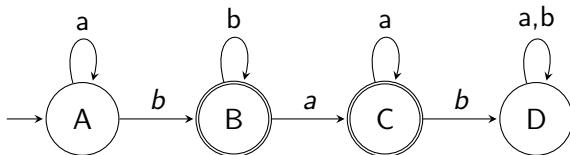


$$L = \{a, b\}^* \setminus \{w_1 b b w_2 \mid w_1, w_2 \in \{a, b\}^*\}$$



# Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6

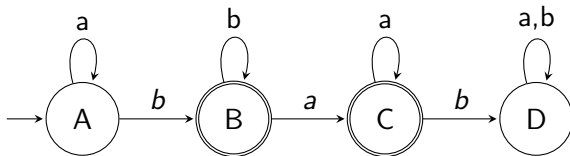
Es sei der folgende endliche Akzeptor  $M$  mit Zustandsmenge  $Z = \{A, B, C, D\}$  und Eingabealphabet  $X = \{a, b\}$  gegeben:



- Geben Sie einen regulären Ausdruck  $R$  an, so dass gilt:  
 $\langle R \rangle = L(M)$ .
- Geben sie einen endlichen Akzeptor an, der folgende formale Sprache akzeptiert:

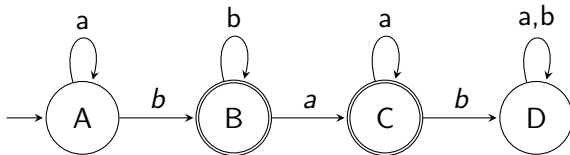
$\{w \mid w \in L(M) \text{ und die Anzahl } N_a(w) \text{ der } a \text{ in } w \text{ ist gerade}\}$

# Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6



Geben Sie einen regulären Ausdruck  $R$  an, so dass gilt:  $\langle R \rangle = L(M)$ .

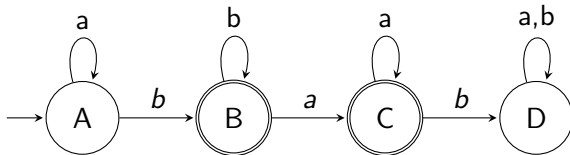
# Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6



Geben Sie einen regulären Ausdruck  $R$  an, so dass gilt:  $\langle R \rangle = L(M)$ .

■  $R_B = a * bb*$

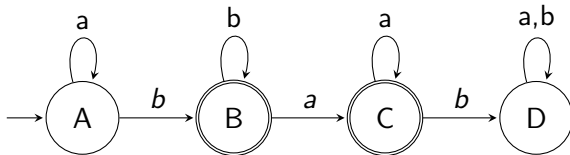
# Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6



Geben Sie einen regulären Ausdruck  $R$  an, so dass gilt:  $\langle R \rangle = L(M)$ .

- $R_B = a * bb^*$
- $R_C = a * bb^* aa^*$

# Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6

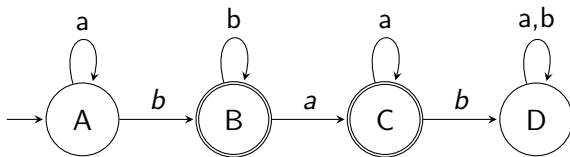


Geben Sie einen regulären Ausdruck  $R$  an, so dass gilt:  $\langle R \rangle = L(M)$ .

- $R_B = a * bb^*$
- $R_C = a * bb^* * aa^*$
- $R = R_B | R_C = (a * bb^*) | (a * bb^* * aa^*) = a * bb^* * a^*$

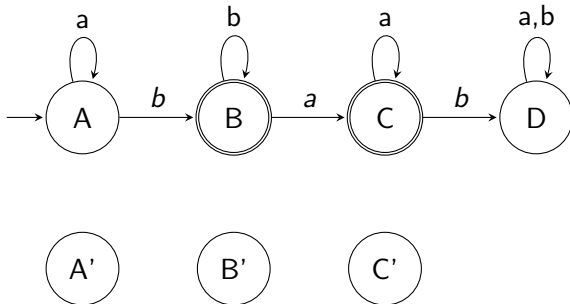
# Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6

$\{w \mid w \in L(M) \text{ und die Anzahl } N_a(w) \text{ der } a \text{ in } w \text{ ist gerade}\}$



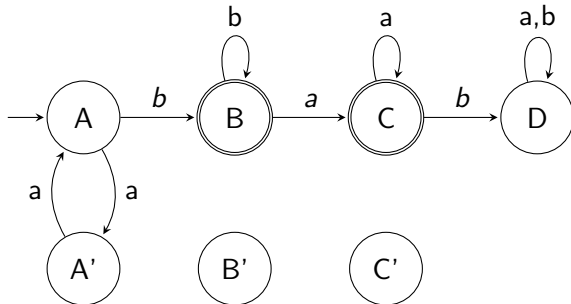
# Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6

$\{w \mid w \in L(M) \text{ und die Anzahl } N_a(w) \text{ der } a \text{ in } w \text{ ist gerade}\}$



# Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6

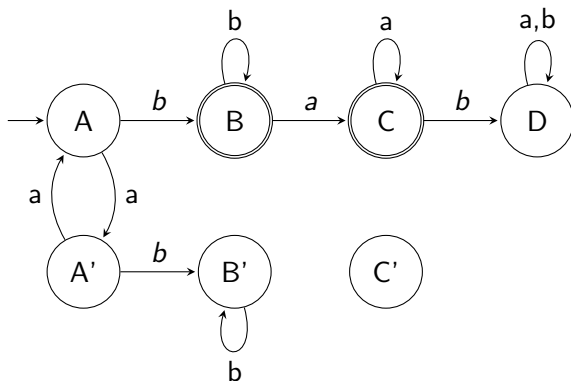
$\{w \mid w \in L(M) \text{ und die Anzahl } N_a(w) \text{ der } a \text{ in } w \text{ ist gerade}\}$





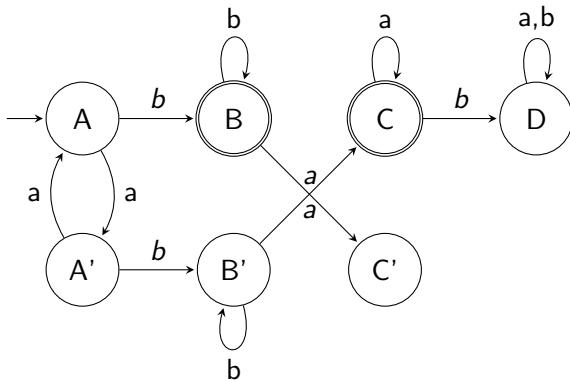
# Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6

$\{w \mid w \in L(M) \text{ und die Anzahl } N_a(w) \text{ der } a \text{ in } w \text{ ist gerade}\}$



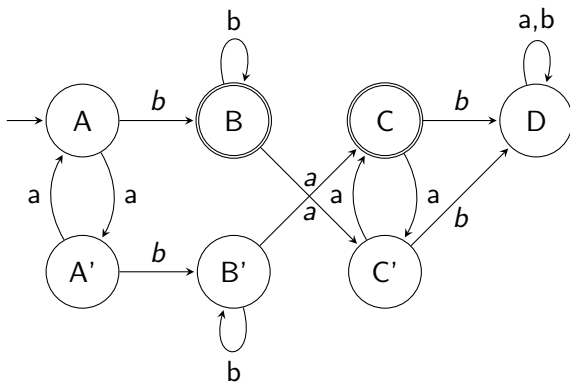
# Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6

$\{w \mid w \in L(M) \text{ und die Anzahl } N_a(w) \text{ der } a \text{ in } w \text{ ist gerade}\}$

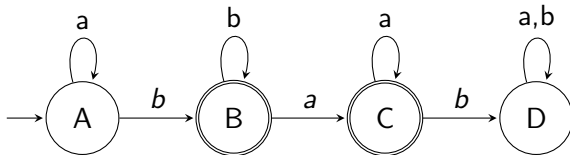


# Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6

$\{w \mid w \in L(M) \text{ und die Anzahl } N_a(w) \text{ der } a \text{ in } w \text{ ist gerade}\}$

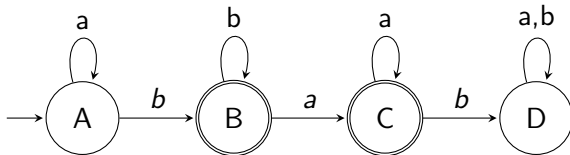


# Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6



Wie viele verschiedene formale Sprachen kann man mit endlichen Akzeptoren erkennen, deren Eingabealphabet, Zustandsmenge, Anfangszustand und Zustandsüberföhrungsfunktion wie bei dem oben angegebenen Akzeptor  $M$  sind?

# Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6



Wie viele verschiedene formale Sprachen kann man mit endlichen Akzeptoren erkennen, deren Eingabealphabet, Zustandsmenge, Anfangszustand und Zustandsüberföhrungsfunktion wie bei dem oben angegebenen Akzeptor  $M$  sind?

16

# Klausuraufgabe: SS 2015 A6

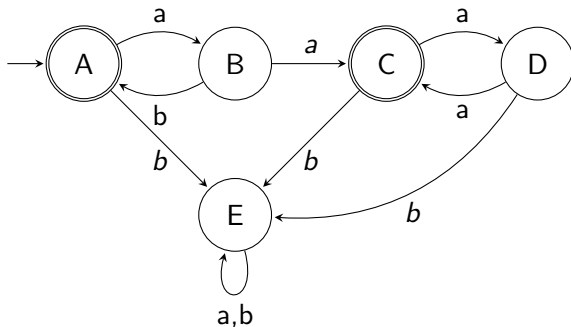
- Geben Sie einen endlichen Akzeptor an, der die formale Sprache erkennt, die durch den regulären Ausdruck  $(ab)^* (aa)^*$  beschrieben wird.
- Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die die formale Sprache

$$L = \{a^k b^{m+k} c^{m+l} d^l \mid k, l, m \in \mathbb{N}_0\}$$

- Gibt es einen regulären Ausdruck, der die formale Sprache beschreibt?

# Klausuraufgabe: SS 2015 A6

$$(ab)^* * (aa)^*$$



## Klausuraufgabe: SS 2015 A6

$$L = \{a^k b^{m+k} c^{m+l} d^l \mid k, l, m \in \mathbb{N}_0\}$$

Gibt es einen regulären Ausdruck, der die formale Sprache beschreibt?



# Klausuraufgabe: SS 2015 A6

$$L = \{a^k b^{m+k} c^{m+l} d^l \mid k, l, m \in \mathbb{N}_0\}$$

Gibt es einen regulären Ausdruck, der die formale Sprache beschreibt?  
Nein.

# Quantitative Aspekte

# $\asymp$ -Relation

$f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  wächst asymptotisch oder größenordnungsmäßig so schnell wie  $g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  wenn gilt:

- $\exists c, c' \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : cf(n) \leq g(n) \leq c'f(n)$
- $f(n) \asymp g(n)$

# $\asymp$ -Relation

Beispiel:

- $g(n) = n^3 + 3n^2$

- $f(n) = 8n^3$

# $\asymp$ -Relation

Beispiel:

- $g(n) = n^3 + 3n^2$
- $f(n) = 8n^3$
- $g(n) = n^3 + 3n^2 \leq n^3 + 3n^3 = 4n^3 = 0.5f(n)$   
 $\Rightarrow g(n) \leq 0.5f(n)$

# $\asymp$ -Relation

Beispiel:

- $g(n) = n^3 + 3n^2$
- $f(n) = 8n^3$
- $g(n) = n^3 + 3n^2 \leq n^3 + 3n^3 = 4n^3 = 0.5f(n)$   
 $\Rightarrow g(n) \leq 0.5f(n)$
- $g(n) = n^3 + 3n^2 \geq n^3 = \frac{1}{8}f(n)$   
 $\Rightarrow g(n) \geq \frac{1}{8}f(n)$
- $\Rightarrow \frac{1}{8}f(n) \leq g(n) \leq 0.5f(n)$
- $f(n) \asymp g(n)$

# $\asymp$ -Relation

Beispiel:

- $g(n) = 2^n$
- $f(n) = 3^n$

# $\asymp$ -Relation

Beispiel:

- $g(n) = 2^n$
- $f(n) = 3^n$
- $g(n) \geq cf(n)$
- $2^n \geq c3^n$



# $\asymp$ -Relation

Beispiel:

- $g(n) = 2^n$
- $f(n) = 3^n$
- $g(n) \geq cf(n)$
- $2^n \geq c3^n$
- $(\frac{2}{3})^n \geq c$

# $\asymp$ -Relation

Beispiel:

- $g(n) = 2^n$
- $f(n) = 3^n$
- $g(n) \geq cf(n)$
- $2^n \geq c3^n$
- $(\frac{2}{3})^n \geq c$
- Kein  $c > 0$  erfüllt diese Ungleichung.

# $\Theta$ -Notation

- $\Theta(f)$  ist die Menge aller Funktionen die größenordnungsmäßig so schnell wachsen wie  $f$
- $\Theta(f) = \{g \mid g \asymp f\}$
- Beispiel:  $\Theta(8n^3) = \{n^3 + 3n^2, 100n^3 - 10n, 0.01n^3 + 1000, \dots\}$
- Alle Polynome gleichen Grades wachsen gleich schnell

# O-Notation

- $O(f)$  ist die Menge aller Funktionen die größenordnungsmäßig höchstens so schnell wachsen wie  $f$
- $O(f) = \{g \mid g \leq f\}$   
 $= \{g \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : g(n) \leq cf(n)\}$
- Beispiele:
  - $n^2 \in O(8n^3)$
  - $3n \in O(n^3 + 3n^2)$
  - $n^4 \in O(n^4)$
  - $n^a \in O(n^b)$  für  $a \leq b$

# $\Omega$ -Notation

- $\Omega(f)$  ist die Menge aller Funktionen die größenordnungsmäßig mindestens so schnell wachsen wie  $f$
- $\Omega(f) = \{g \mid g \geq f\}$   
 $= \{g \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : cf(n) \leq g(n)\}$
- Beispiele:
  - $n^2 \in \Omega(\log(n))$
  - $e^n \in \Omega(n^a)$

# Wachstum wichtiger Funktionen

$$1 \leq \log(x) \leq \sqrt{x} \leq x \leq x \log(x) \leq x^2 \leq 2^x < x!$$

# Quiz

- $\sin(x) + 2 \in \Theta(1)$ ?

# Quiz

- $\sin(x) + 2 \in \Theta(1)$ ? Ja, weil  $1 \leq \sin(x) + 2 \leq 3 \cdot 1$



# Quiz

- $\sin(x) + 2 \in \Theta(1)$ ? Ja, weil  $1 \leq \sin(x) + 2 \leq 3 \cdot 1$
- $\log_a(x) \in \Theta(\log_b(x))$ ?

# Quiz

- $\sin(x) + 2 \in \Theta(1)$ ? Ja, weil  $1 \leq \sin(x) + 2 \leq 3 \cdot 1$
- $\log_a(x) \in \Theta(\log_b(x))$ ? Ja, weil  $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$

# Quiz

- $\sin(x) + 2 \in \Theta(1)$ ? Ja, weil  $1 \leq \sin(x) + 2 \leq 3 \cdot 1$
- $\log_a(x) \in \Theta(\log_b(x))$ ? Ja, weil  $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$
- $\log(x) \in \Omega(n^{0.1})$ ?

# Quiz

- $\sin(x) + 2 \in \Theta(1)$ ? Ja, weil  $1 \leq \sin(x) + 2 \leq 3 \cdot 1$
- $\log_a(x) \in \Theta(\log_b(x))$ ? Ja, weil  $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$
- $\log(x) \in \Omega(n^{0.1})$ ? Nein.

# Quiz

- $\sin(x) + 2 \in \Theta(1)$ ? Ja, weil  $1 \leq \sin(x) + 2 \leq 3 \cdot 1$
- $\log_a(x) \in \Theta(\log_b(x))$ ? Ja, weil  $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$
- $\log(x) \in \Omega(n^{0.1})$ ? Nein.
- $n \log(n) \in \Theta(\log(n!))$ ?

# Quiz

- $\sin(x) + 2 \in \Theta(1)$ ? Ja, weil  $1 \leq \sin(x) + 2 \leq 3 \cdot 1$
- $\log_a(x) \in \Theta(\log_b(x))$ ? Ja, weil  $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$
- $\log(x) \in \Omega(n^{0.1})$ ? Nein.
- $n \log(n) \in \Theta(\log(n!))$ ? Ja, weil

$$\begin{aligned}\log(n!) &= \log(1) + \log(2) + \dots + \log(n-1) + \log(n) \\ &\leq \log(n) + \log(n) + \dots + \log(n) + \log(n) = n \log(n) \\ &\geq \log(n/2) + \log(n/2) + \dots + \log(n/2) = n/2 \log(n/2)\end{aligned}$$

# Unvergleichbare Funktionen

Es gibt unvergleichbare Funktionen. Beispiel:

$$f = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$g = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$f \notin O(g) \text{ und } g \notin O(f)$$

# Klausuraufgabe: WS 2013/14 A1

Geben Sie eine Funktion  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  an, für die gilt:

$$f(n) \notin O(n^3) \wedge f(n) \notin \Omega(n^3)$$



# Klausuraufgabe: WS 2013/14 A1

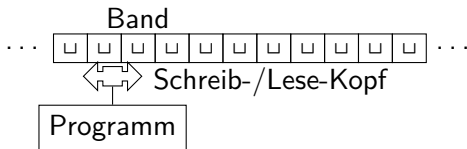
Geben Sie eine Funktion  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  an, für die gilt:

$$f(n) \notin O(n^3) \wedge f(n) \notin \Omega(n^3)$$

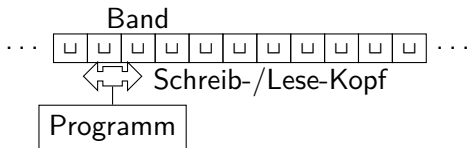
$$f = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n^4 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

# Turingmaschinen

# Turingmaschine - anschaulich



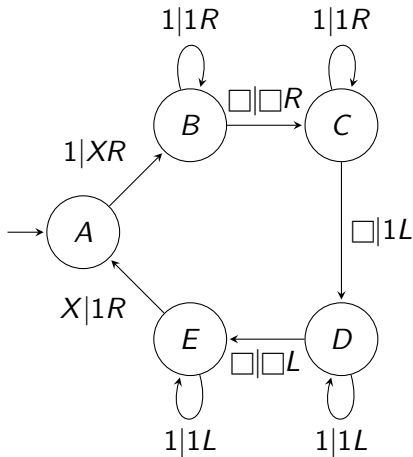
# Turingmaschine - anschaulich



- $f$  : In welchen Zustand geht die Maschine?
- $g$  : Was schreibt die Maschine auf das Band?
- $m$  : Wohin bewegt sich der Kopf?

# Turingmaschinen

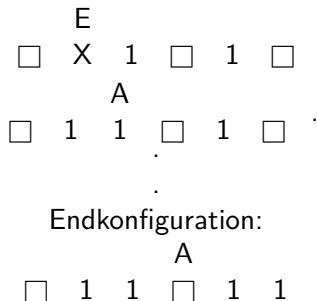
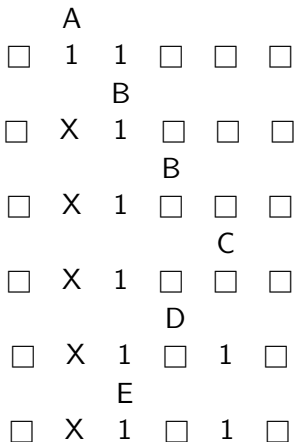
Beispiel einer Turingmaschine:



# Turingmaschinen

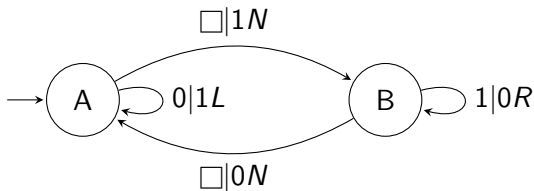
	A	B	C	D	E
$\square$		$C, \square, R$	$D, 1, L$	$E, \square, L$	
1	$B, X, R$	$B, 1, R$	$C, 1R$	$D, 1, L$	$E, 1, L$
X					$A, 1, R$

# Turingmaschinen



# Klausuraufgabe: WS 2015/16 A7

Die Turingmaschine  $T$  sei graphisch gegeben durch



Dabei bedeuten  $L$  und  $R$ , dass der Kopf nach links bzw. rechts bewegt wird und  $N$ , dass er nicht bewegt wird. Geben Sie die ersten elf Konfigurationen an, die die Turingmaschine  $T$  durchläuft, wenn zu Beginn alle Felder mit dem Blanksymbol beschriftet sind.



# Klausuraufgabe: WS 2015/16 A7

		A			
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		B			
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		B			
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		A			
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0	0	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		A			
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		A			
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	B				
<input type="checkbox"/>	1	1	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		B			
<input type="checkbox"/>	0	1	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		B			
<input type="checkbox"/>	0	0	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		B			
<input type="checkbox"/>	0	0	0	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		A			
<input type="checkbox"/>	0	0	0	0	<input type="checkbox"/>

# Klausuraufgabe: WS 2015/16 A7

Für jede nicht-negative ganze Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$  sei  $\varphi(n)$  die Anzahl der Schritte, die die Turingmaschine  $T$  bei Eingabe  $\epsilon$  benötigt, bis das Wort  $0^{2^n}$  auf dem Band steht.

- (i) Geben Sie  $\varphi(0)$ ,  $\varphi(1)$  und  $\varphi(2)$  an.
- (ii) Vervollständigen Sie die Rekursionsformel

$$\varphi(n+1) = \varphi(n) + \dots$$

durch einen arithmetischen Ausdruck, in dem  $n$  vorkommt.

Geben Sie eine Abbildung  $\psi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  so an, dass  $\varphi \in \Theta(\psi)$  gilt. Dazu dürfen Sie *keine* trigonometrischen Funktionen (cos, sin, usw.) verwenden.

# Klausuraufgabe: WS 2015/16 A7

- $\varphi(0) = 0$
- $\varphi(1) = 3$
- $\varphi(2) = 10$

# Klausuraufgabe: WS 2015/16 A7

- $\varphi(0) = 0$
- $\varphi(1) = 3$
- $\varphi(2) = 10$
- $\varphi(n+1) = \varphi(n) + 4n + 3$

# Klausuraufgabe: WS 2015/16 A7

- $\varphi(0) = 0$
- $\varphi(1) = 3$
- $\varphi(2) = 10$
- $\varphi(n+1) = \varphi(n) + 4n + 3$
- $\varphi(n) \in \Theta(\psi)$

# Klausuraufgabe: WS 2015/16 A7

- $\varphi(0) = 0$
- $\varphi(1) = 3$
- $\varphi(2) = 10$
- $\varphi(n+1) = \varphi(n) + 4n + 3$
- $\varphi(n) \in \Theta(\psi)$
- $\varphi(n) \in \Theta(n^2)$

# Klausuraufgabe: WS 2015/16 A7

- $\varphi(0) = 0$
- $\varphi(1) = 3$
- $\varphi(2) = 10$
- $\varphi(n+1) = \varphi(n) + 4n + 3$
- $\varphi(n) \in \Theta(\psi)$
- $\varphi(n) \in \Theta(n^2)$
- $\varphi(n) \in \Theta(\sum_{i=0}^{n-1} (4i + 3))$

## Klausuraufgabe: SS 2013 A7

Sei  $T$  die Turingmaschine, die als Eingabe ein Wort  $w$  über  $\{0, X\}$  erhält und folgenden Homomorphismus  $h$  berechnet

$$h(0) = 0, \quad h(X) = \epsilon,$$

so dass nach der Abarbeitung  $h(w)$  auf dem Band steht.

Geben Sie  $T$  explizit grafisch an.



# Klausuraufgabe: SS 2013 A7

Sei  $T$  die Turingmaschine, die als Eingabe ein Wort  $w$  über  $\{0, X\}$  erhält und folgenden Homomorphismus  $h$  berechnet

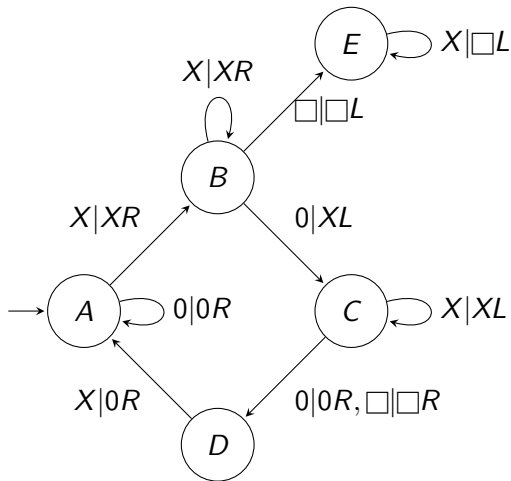
$$h(0) = 0, h(X) = \epsilon,$$

so dass nach der Abarbeitung  $h(w)$  auf dem Band steht.

Idee:

- Finde eine 0 rechts von X
- Ersetze die 0 durch ein X
- Ersetze das erste X von links durch eine 0
- Wiederhole die Schritte

# Klausuraufgabe: SS 2013 A7



# Klausuraufgabe: SS 2013 A7

- Geben Sie in Abhängigkeit der Länge des Eingabewortes  $w$  eine möglichst scharfe obere Schranke in O-Notation für die worst case Laufzeit von  $T$  an.
- Geben Sie in Abhängigkeit der Länge des Eingabewortes  $w$  eine Eingabe an, deren Bearbeitung (bis auf einen konstanten Faktor) worst case Laufzeit benötigt.
- Geben Sie in Abhängigkeit der Länge des Eingabewortes  $w$  eine Eingabe an, deren Bearbeitung asymptotisch nicht worst case Laufzeit benötigt.

# Klausuraufgabe: SS 2013 A7

Welche Wörter haben die schlechteste Laufzeit?

- $w = 00000000?$

# Klausuraufgabe: SS 2013 A7

Welche Wörter haben die schlechteste Laufzeit?

- $w = 00000000$ ? Nein

# Klausuraufgabe: SS 2013 A7

Welche Wörter haben die schlechteste Laufzeit?

- $w = 00000000?$  Nein
- $w = \text{XXXXXXXX}?$

# Klausuraufgabe: SS 2013 A7

Welche Wörter haben die schlechteste Laufzeit?

- $w = 00000000$ ? Nein
- $w = \text{XXXXXXXX}$ ? Nein

# Klausuraufgabe: SS 2013 A7

Welche Wörter haben die schlechteste Laufzeit?

- $w = 00000000$ ? Nein
- $w = \text{XXXXXXXX}$ ? Nein
- $w = \text{XXXX0000}$

worst case Laufzeit?



# Klausuraufgabe: SS 2013 A7

Welche Wörter haben die schlechteste Laufzeit?

- $w = 00000000$ ? Nein
- $w = \text{XXXXXXXX}$ ? Nein
- $w = \text{XXXX0000}$

worst case Laufzeit?

- $\text{Time}_T(n) \in O(n^2)$