

GBI Crashkurs WS 2016/17

Miguel Santos Correa

22. Februar 2017

miguelsantoscorrea@gmail.com

<https://github.com/miguel-sc>

Altklausuren

Aufgabentypen:

- Multiple Choice
- Vollständige Induktion
- Relationen
- Kontextfreie Grammatiken
- Graphen
- Reguläre Ausdrücke / Endliche Akzeptoren
- Turingmaschinen

Themen

- Huffman-Codierung
- O-Kalkül
- Prädikatenlogik
- MIMA
- Hoare-Kalkül

Themen

- viele Themen
- sehr oberflächlich

→ Skript lernen!

Themen

- viele Themen
- sehr oberflächlich

→ Skript lernen!

- Aufgaben sind nicht schwer
- aber nur mit Übung

→ Altklausuren rechnen!

Gliederung

- 1 Relationen
- 2 Kontextfreie Grammatiken
- 3 Vollständige Induktion
- 4 Huffman-Codierung

Relationen

Paare, Tupel

Unterschied zwischen Paaren und Mengen:

- $(1, 2) \neq (2, 1)$
- $\{1, 2\} = \{2, 1\}$

Kartesisches Produkt

Menge aller Paare (a,b) mit $a \in A$ und $b \in B$

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ und } b \in B\}$$

$$\{a, b\} \times \{1, 2, 3\} = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

Relationen

Relation R ist eine Teilmenge von $A \times B$

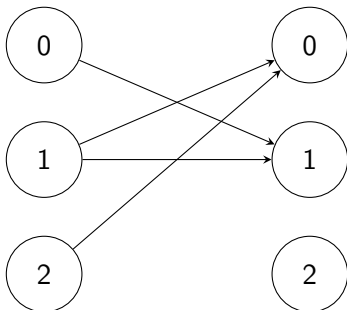
$$R \subseteq A \times B$$

- $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$
- $R_1 = \{(a, 1), (b, 1), (b, 2)\}$
- $R_2 = \{(a, 1), (a, 3), (b, 2), (b, 3)\}$
- $(b, 3) \in R_2$ oder bR_23

Eigenschaften von Relationen

Linkstotal

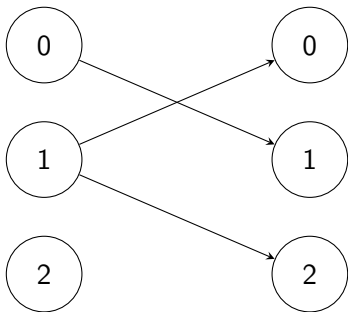
- $\forall a \in A \exists b \in B : (a, b) \in R$
- Jedes Element aus A steht in Relation zu mindestens einem Element aus B



Eigenschaften von Relationen

Rechtstotal (surjektiv)

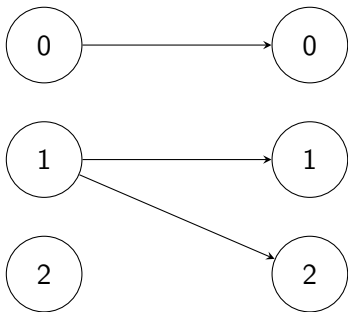
- $\forall b \in B \exists a \in A : (a, b) \in R$
- Jedes Element aus B steht in Relation zu mindestens einem Element aus A



Eigenschaften von Relationen

Linkseindeutig (injektiv)

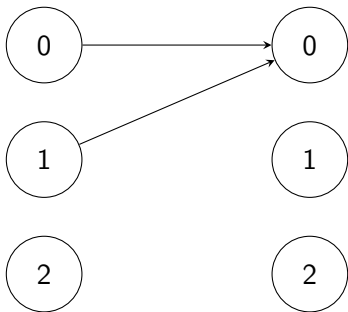
- $\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in R : a_1 \neq a_2 \Rightarrow b_1 \neq b_2$
- Jedes Element aus B steht höchstens mit einem Element aus A in Relation



Eigenschaften von Relationen

Rechtseindeutig

- $\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in R : b_1 \neq b_2 \Rightarrow a_1 \neq a_2$
- Jedes Element aus A steht höchstens mit einem Element aus B in Relation



Funktionen

- linkstotale und rechtseindeutige Relationen nennt man Funktionen
- andere Schreibweise: $f : A \rightarrow B$
- Definitionsbereich A , Zielbereich B , Bildbereich $f(A)$
- linkseindeutige Funktionen nennt man injektiv
- rechtstotale Funktionen nennt man surjektiv
- injektive und surjektive Funktionen nennt man bijektiv

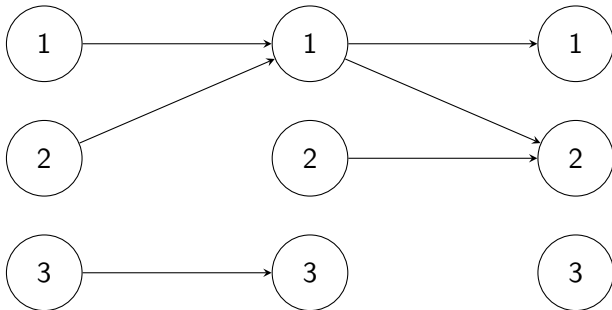
Produkt von Relationen

- $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$
- $S \circ R = \{(x, z) \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$
- Beispiel:

$$\begin{aligned} & \{(1, 2), (2, 2), (1, 1)\} \circ \{(1, 1), (2, 1), (3, 3)\} \\ &= \{(1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1)\} \end{aligned}$$

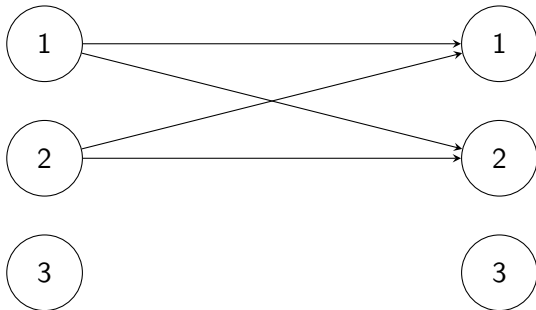
Produkt von Relationen

$$\begin{aligned} & \{(1, 2), (2, 2), (1, 1)\} \circ \{(1, 1), (2, 1), (3, 3)\} \\ &= \{(1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1)\} \end{aligned}$$



Produkt von Relationen

$$\{(1, 2), (2, 2), (1, 1)\} \circ \{(1, 1), (2, 1), (3, 3)\} \\ = \{(1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1)\}$$



Klausuraufgabe: SS 2012 A2

$$\mathbb{G}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

- Geben Sie (graphisch) eine Relation $R_a \subseteq \mathbb{G}_4 \times \mathbb{G}_2$ an, so dass R_a rechtstotal und rechtseindeutig, aber nicht linkstotal und nicht linkseindeutig ist.
- Wie viele solcher Relationen R_a gibt es?
- Geben Sie (in Mengenschreibweise) eine Relation $R_b \subseteq \mathbb{G}_2 \times \mathbb{G}_4$ an, so dass $R_b \circ R_a$ rechtstotal und linkseindeutig ist.

Klausuraufgabe: SS 2012 A2

rechtstotal und rechtseindeutig, aber nicht linkstotal und nicht
linkseindeutig

0

0

1

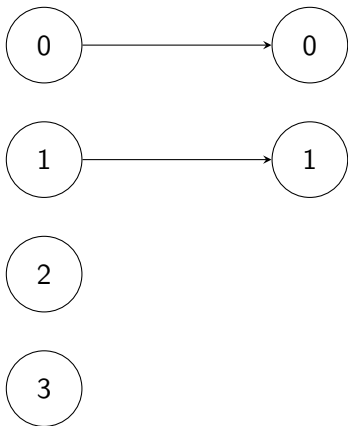
1

2

3

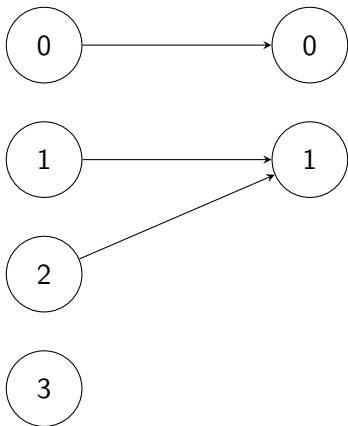
Klausuraufgabe: SS 2012 A2

rechtstotal und rechtseindeutig, aber nicht linkstotal und nicht
linkseindeutig



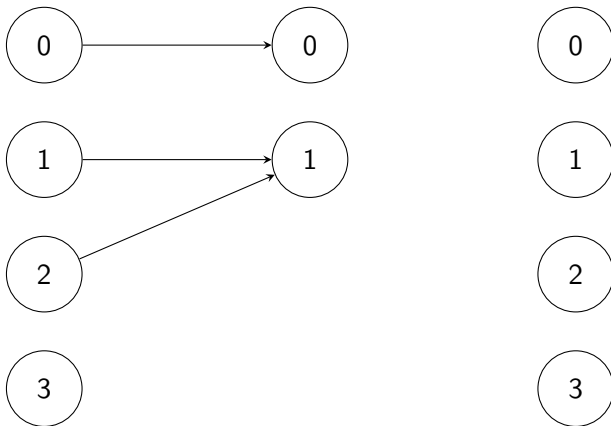
Klausuraufgabe: SS 2012 A2

rechtstotal und rechtseindeutig, aber nicht linkstotal und nicht
linkseindeutig

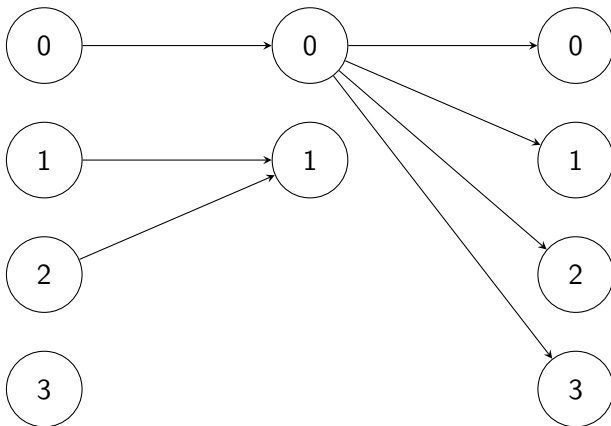


Klausuraufgabe: SS 2012 A2

Geben Sie (in Mengenschreibweise) eine Relation $R_b \subseteq \mathbb{G}_2 \times \mathbb{G}_4$ an, so dass $R_b \circ R_a$ rechtstotal und linkseindeutig ist.



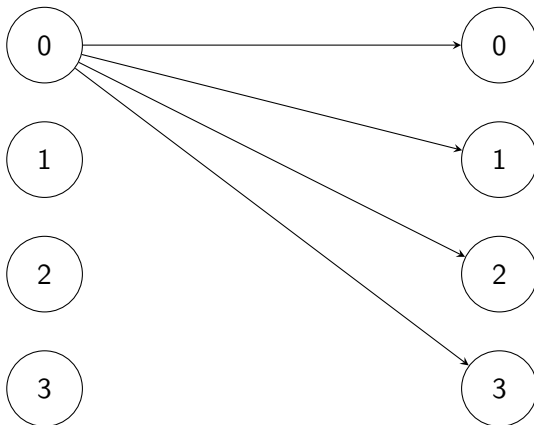
Klausuraufgabe: SS 2012 A2



$$R_b = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3)\}$$

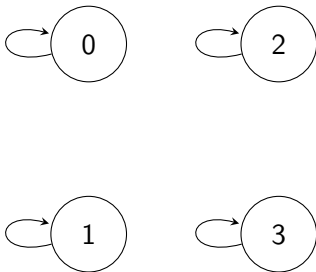
Klausuraufgabe: SS 2012 A2

Geben Sie (in Mengenschreibweise) eine Relation $R_b \subseteq \mathbb{G}_2 \times \mathbb{G}_4$ an, so dass $R_b \circ R_a$ rechtstotal und linkseindeutig ist.



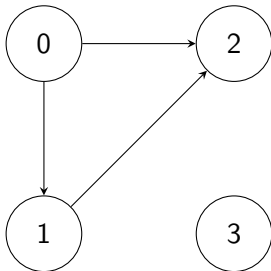
Reflexivität

- $R \subseteq M \times M$
- R ist reflexiv, wenn: $\Rightarrow \forall x \in M : (x, x) \in R$
- Jedes Element steht in Relation zu sich selbst.



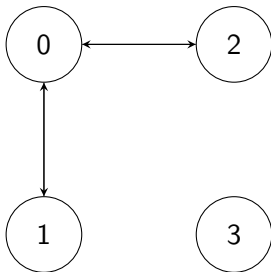
Transitivität

- $R \subseteq M \times M$
- R ist transitiv, wenn:
$$\forall x, y, z \in M : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$$



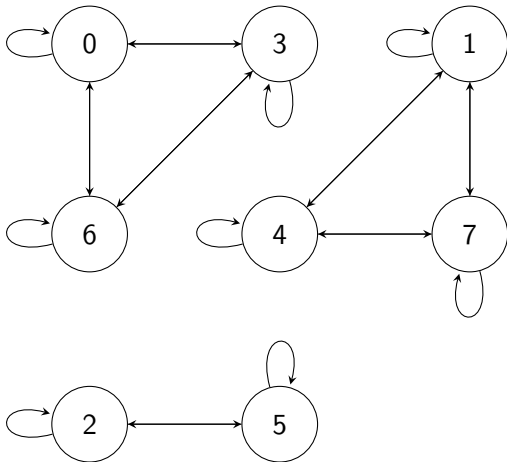
Symmetrie

- $R \subseteq M \times M$
- R ist symmetrisch, wenn: $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$



Äquivalenzrelation

- $R \subseteq M \times M$
- R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv



Kontextfreie Grammatiken

Kontextfreie Grammatiken

- $G=(N,T,S,P)$
- N: Menge der Nichtterminalsymbole
- T: Menge der Terminalsymbole
- S: Startsymbol
- P: Produktionsmenge

Beispiele

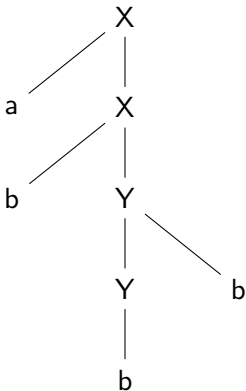
- $G_1 = (\{X, Y\}, \{a\}, Y, \{X \rightarrow \epsilon, Y \rightarrow aY | X\})$
- $G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow \epsilon | aSa | bSb\})$
- $G_3 = (\{X\}, \{a\}, X, P)$
 $P = \{X \rightarrow aX\}$

Ableitungen

- $G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow \epsilon \mid aSa \mid bSb\})$
- $S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aabSbaa \Rightarrow aab\epsilon baa = aabb aa$
- $S \Rightarrow bSb \Rightarrow baSab \Rightarrow baab$
- $S \Rightarrow \epsilon$

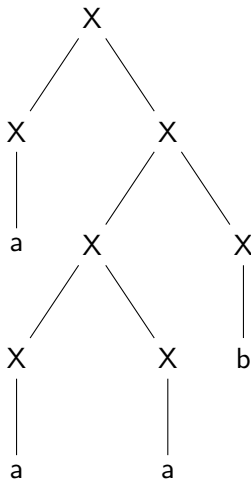
Ableitungsbaum

$$G = (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow aX \mid bY, Y \rightarrow Yb \mid b\})$$



$$X \Rightarrow aX \Rightarrow abY \Rightarrow abYb \Rightarrow abbb$$

$$G = (\{X, Y\}, \{a, b\}, X, \{X \rightarrow XX \mid a|b\})$$



z.B. $X \Rightarrow XX \Rightarrow aX \Rightarrow aXX \Rightarrow aXb \Rightarrow aXXb \Rightarrow aaXb \Rightarrow aaab$

Klausuraufgabe: WS 2014/15 A2

Eine Folge $(L_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ formaler Sprachen sei wie folgt definiert:

$$L_0 = \{\}$$
$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{ba\}L_i\{ab\} \cup \{b\}$$

- Geben Sie L_1 , L_2 und L_3 an.
- Geben Sie $L = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$ an.
- Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L$ an.
- Zeichnen sie passend zu Ihrer Grammatik einen Ableitungsbaum eines Wortes $w \in L_3 \setminus L_2$.

Klausuraufgabe: WS 2014/15 A2

$$L_0 = \{\}$$

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{ba\}L_i\{ab\} \cup \{b\}$$

- $L_1 = \{b\}$

Klausuraufgabe: WS 2014/15 A2

$$L_0 = \{\}$$

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{ba\}L_i\{ab\} \cup \{b\}$$

- $L_1 = \{b\}$
- $L_2 = \{babab, b\}$

Klausuraufgabe: WS 2014/15 A2

$$L_0 = \{\}$$

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{ba\}L_i\{ab\} \cup \{b\}$$

- $L_1 = \{b\}$
- $L_2 = \{babab, b\}$
- $L_3 = \{babababab, babab, b\}$

Klausuraufgabe: WS 2014/15 A2

$$L_0 = \{\}$$

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{ba\}L_i\{ab\} \cup \{b\}$$

- $L_1 = \{b\}$
- $L_2 = \{babab, b\}$
- $L_3 = \{babababab, babab, b\}$
- $L = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i =$

Klausuraufgabe: WS 2014/15 A2

$$L_0 = \{\}$$

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : L_{i+1} = \{ba\}L_i\{ab\} \cup \{b\}$$

- $L_1 = \{b\}$
- $L_2 = \{babab, b\}$
- $L_3 = \{babababab, babab, b\}$
- $L = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i = \{(ba)^n b (ab)^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

Klausuraufgabe: WS 2014/15 A2

$$L = \{(ba)^n b (ab)^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$

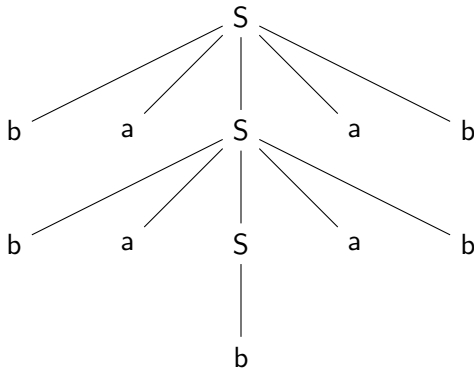
Klausuraufgabe: WS 2014/15 A2

$$L = \{(ba)^n b (ab)^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow baSab \mid b\})$$

Klausuraufgabe: WS 2014/15 A2

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow baSab|b\})$$



$$S \Rightarrow baSab \Rightarrow babaSabab \Rightarrow babababab$$

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A6

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, S, P)$ mit der Produktionsmenge

$$\begin{aligned} P = \{ & S \rightarrow ASB \mid A \mid B, \\ & A \rightarrow Aa \mid \epsilon, \\ & B \rightarrow bB \mid \epsilon \}. \end{aligned}$$

- Geben Sie zwei verschiedene Ableitungsbäume der Grammatik für das Wort aab an.
- Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die von G erzeugte Sprache $L(G)$ beschreibt.
- Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G' an, die die Sprache $(L(G))^*$ erzeugt.

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A6

$$P = \{S \rightarrow ASB \mid A \mid B, \\ A \rightarrow Aa \mid \epsilon, \\ B \rightarrow bB \mid \epsilon\}.$$

Ableitungen für das Wort *aab*

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A6

$$P = \{S \rightarrow ASB \mid A \mid B, \\ A \rightarrow Aa \mid \epsilon, \\ B \rightarrow bB \mid \epsilon\}.$$

Ableitungen für das Wort *aab*

■ $S \Rightarrow ASB \Rightarrow AAB \Rightarrow \dots$

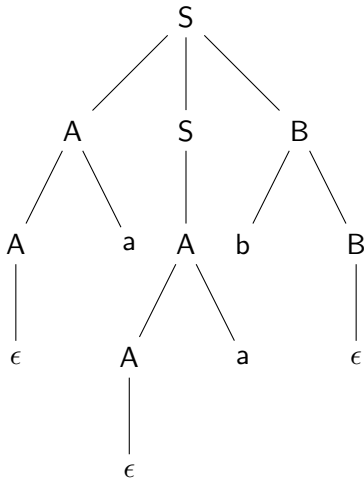
Klausuraufgabe: WS 2015/16 A6

$$P = \{S \rightarrow ASB \mid A \mid B, \\ A \rightarrow Aa \mid \epsilon, \\ B \rightarrow bB \mid \epsilon\}.$$

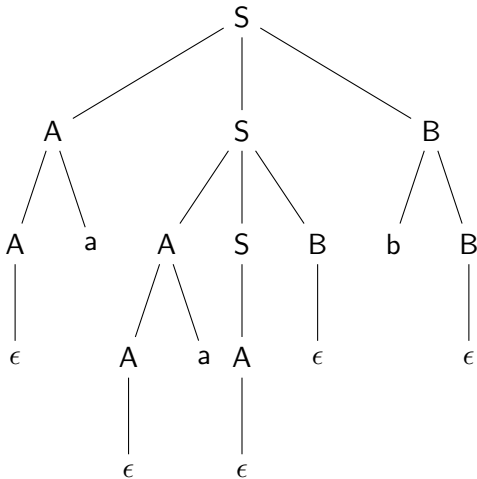
Ableitungen für das Wort *aab*

- $S \Rightarrow ASB \Rightarrow AAB \Rightarrow \dots$
- $S \Rightarrow ASB \Rightarrow AASBB \Rightarrow^2 A\epsilon S\epsilon B \Rightarrow \dots$

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A6



Klausuraufgabe: WS 2015/16 A6



Klausuraufgabe: WS 2015/16 A6

$$\begin{aligned} P = \{ & S \rightarrow ASB \mid A \mid B, \\ & A \rightarrow Aa \mid \epsilon, \\ & B \rightarrow bB \mid \epsilon \}. \end{aligned}$$

■ $L(G) =$

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A6

$$\begin{aligned} P = \{ & S \rightarrow ASB \mid A \mid B, \\ & A \rightarrow Aa \mid \epsilon, \\ & B \rightarrow bB \mid \epsilon \}. \end{aligned}$$

■ $L(G) = \{a\}^* \{b\}^*$

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A6

$$\begin{aligned}P = \{ & S \rightarrow ASB \mid A \mid B, \\ & A \rightarrow Aa \mid \epsilon, \\ & B \rightarrow bB \mid \epsilon \}.\end{aligned}$$

- $L(G) = \{a\}^* \{b\}^*$
- $L(G)^* = \{a, b\}^*$

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A6

$$\begin{aligned}P = \{ & S \rightarrow ASB \mid A \mid B, \\ & A \rightarrow Aa \mid \epsilon, \\ & B \rightarrow bB \mid \epsilon \}.\end{aligned}$$

- $L(G) = \{a\}^* \{b\}^*$
- $L(G)^* = \{a, b\}^*$
- $G' = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aS \mid bS \mid \epsilon\})$

Vollständige Induktion

Prinzip der vollständigen Induktion

Zu beweisen ist $\forall n \in \mathbb{N}_0 : A(n)$. Man zeigt:

- Für ein festes, aber beliebiges n gilt: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$
- $A(0)$ ist wahr
- Gezeigt wurde: $A(0) \Rightarrow A(1) \Rightarrow A(2) \Rightarrow \dots$

Vollständige Induktion

Mit der Definition

$$\begin{aligned}x_0 &= 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} &= x_n + 2\end{aligned}$$

kann man die Hypothese $\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_n = 2n$ beweisen.

Vollständige Induktion

Induktionsanfang

- Zu zeigen: $x_n = 2n$ für $n=0$
- $x_0 = 0$ nach beiden Definitionen

Vollständige Induktion

Induktionsvoraussetzung

- Für ein beliebiges aber festes n gilt: $x_n = 2n$
- Wichtig: n ist nicht variabel, die Induktionsvoraussetzung gilt nicht für alle n !

Vollständige Induktion

Induktionsschluss

- Zeige: Für das beliebige aber feste n gilt: $x_{n+1} = 2(n+1)$
- Beweis:

$x_{n+1} = x_n + 2$	nach Definition
$= 2n + 2$	nach Induktionsvoraussetzung
$= 2(n+1)$	fertig

Klausuraufgabe: SS 2014 A5

Gegeben sei eine natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}_+$. Die Abbildung $S : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ sei induktiv definiert durch

$$\begin{aligned} S(0) &= 1, \\ \forall k \in \mathbb{N}_0 : S(k+1) &= a^{k+1} + S(k). \end{aligned}$$

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : (a-1)S(k) = a^{k+1} - 1.$$

Klausuraufgabe: SS 2014 A5

$$S(0) = 1$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : S(k+1) = a^{k+1} + S(k)$$

$$\text{zu zeigen } \forall k \in \mathbb{N}_0 : (a-1)S(k) = a^{k+1} - 1$$

Klausuraufgabe: SS 2014 A5

$$S(0) = 1$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : S(k+1) = a^{k+1} + S(k)$$

$$\text{zu zeigen } \forall k \in \mathbb{N}_0 : (a-1)S(k) = a^{k+1} - 1$$

Induktionsanfang

$$k = 0: \text{ Dann ist } (a-1)S(0) = a-1 = a^{0+1} - 1$$

Klausuraufgabe: SS 2014 A5

$$S(0) = 1$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : S(k+1) = a^{k+1} + S(k)$$

$$\text{zu zeigen } \forall k \in \mathbb{N}_0 : (a-1)S(k) = a^{k+1} - 1$$

Induktionsvoraussetzung

für ein beliebiges aber festes k gelte: $(a-1)S(k) = a^{k+1} - 1$

Klausuraufgabe: SS 2014 A5

$$S(0) = 1$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : S(k+1) = a^{k+1} + S(k)$$

$$\text{zu zeigen } \forall k \in \mathbb{N}_0 : (a-1)S(k) = a^{k+1} - 1$$

Induktionsschluss $k \rightarrow k+1$

$$\text{zu zeigen: } (a-1)S(k+1) = a^{(k+1)+1} - 1$$

Klausuraufgabe: SS 2014 A5

$$S(0) = 1$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : S(k+1) = a^{k+1} + S(k)$$

$$\text{zu zeigen } \forall k \in \mathbb{N}_0 : (a-1)S(k) = a^{k+1} - 1$$

Induktionsschluss $k \rightarrow k+1$

$$\text{zu zeigen: } (a-1)S(k+1) = a^{(k+1)+1} - 1$$

$$(a-1)S(k+1) = (a-1)(a^{k+1} + S(k)) \quad \text{nach Definition}$$

Klausuraufgabe: SS 2014 A5

$$S(0) = 1$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : S(k+1) = a^{k+1} + S(k)$$

$$\text{zu zeigen } \forall k \in \mathbb{N}_0 : (a-1)S(k) = a^{k+1} - 1$$

Induktionsschluss $k \rightarrow k+1$

$$\text{zu zeigen: } (a-1)S(k+1) = a^{(k+1)+1} - 1$$

$$\begin{aligned}(a-1)S(k+1) &= (a-1)(a^{k+1} + S(k)) && \text{nach Definition} \\ &= (a-1)a^{k+1} + (a-1)S(k)\end{aligned}$$

Klausuraufgabe: SS 2014 A5

$$S(0) = 1$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : S(k+1) = a^{k+1} + S(k)$$

$$\text{zu zeigen } \forall k \in \mathbb{N}_0 : (a-1)S(k) = a^{k+1} - 1$$

Induktionsschluss $k \rightarrow k+1$

$$\text{zu zeigen: } (a-1)S(k+1) = a^{(k+1)+1} - 1$$

$$(a-1)S(k+1) = (a-1)(a^{k+1} + S(k)) \quad \text{nach Definition}$$

$$= (a-1)a^{k+1} + (a-1)S(k)$$

$$= (a-1)a^{k+1} + a^{k+1} - 1 \quad \text{nach I.V.}$$

Klausuraufgabe: SS 2014 A5

$$S(0) = 1$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : S(k+1) = a^{k+1} + S(k)$$

$$\text{zu zeigen } \forall k \in \mathbb{N}_0 : (a-1)S(k) = a^{k+1} - 1$$

Induktionsschluss $k \rightarrow k+1$

$$\text{zu zeigen: } (a-1)S(k+1) = a^{(k+1)+1} - 1$$

$$(a-1)S(k+1) = (a-1)(a^{k+1} + S(k)) \quad \text{nach Definition}$$

$$= (a-1)a^{k+1} + (a-1)S(k)$$

$$= (a-1)a^{k+1} + a^{k+1} - 1 \quad \text{nach I.V.}$$

$$= a^{(k+1)+1} - 1$$

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A3

Gegeben sei folgende Funktion $f : \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$:

$$f(\epsilon) = \epsilon$$

$$\forall w \in \{a, b\}^* : f(aw) = bf(w)$$

$$\forall w \in \{a, b\}^* : f(bw) = af(w)$$

Beweisen Sie per Induktion, dass gilt:

$$\forall w_1, w_2 \in \{a, b\}^* : f(w_1 w_2) = f(w_1) f(w_2)$$

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A3

$$f(\epsilon) = \epsilon$$

$$\forall w \in A^* : f(aw) = bf(w)$$

$$\forall w \in A^* : f(bw) = af(w)$$

zu zeigen $\forall w = w_1 w_2 \in A^n : f(w_1 w_2) = f(w_1)f(w_2)$

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A3

$$f(\epsilon) = \epsilon$$

$$\forall w \in A^* : f(aw) = bf(w)$$

$$\forall w \in A^* : f(bw) = af(w)$$

zu zeigen $\forall w = w_1 w_2 \in A^n : f(w_1 w_2) = f(w_1)f(w_2)$

Induktionsanfang

$$n = 0: \{a, b\}^0 = \{\epsilon\}$$

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A3

$$f(\epsilon) = \epsilon$$

$$\forall w \in A^* : f(aw) = bf(w)$$

$$\forall w \in A^* : f(bw) = af(w)$$

zu zeigen $\forall w = w_1 w_2 \in A^n : f(w_1 w_2) = f(w_1)f(w_2)$

Induktionsanfang

$$n = 0: \{a, b\}^0 = \{\epsilon\}$$

$$w_1 = w_2 = \epsilon$$

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A3

$$f(\epsilon) = \epsilon$$

$$\forall w \in A^* : f(aw) = bf(w)$$

$$\forall w \in A^* : f(bw) = af(w)$$

zu zeigen $\forall w = w_1 w_2 \in A^n : f(w_1 w_2) = f(w_1)f(w_2)$

Induktionsanfang

$$n = 0: \{a, b\}^0 = \{\epsilon\}$$

$$w_1 = w_2 = \epsilon$$

$$f(\epsilon\epsilon) = f(\epsilon) = \epsilon = \epsilon\epsilon = f(\epsilon)f(\epsilon)$$

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A3

$$f(\epsilon) = \epsilon$$

$$\forall w \in A^* : f(aw) = bf(w)$$

$$\forall w \in A^* : f(bw) = af(w)$$

zu zeigen $\forall w = w_1 w_2 \in A^n : f(w_1 w_2) = f(w_1) f(w_2)$

Induktionsvoraussetzung

Für alle Wörter w' mit beliebiger, aber fester Länge $n \in \mathbb{N}_0$ gelte:

$$\forall w' \in A^* \text{ mit } w' = w_1 w_2 : f(w_1 w_2) = f(w_1) f(w_2)$$

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A3

$$f(\epsilon) = \epsilon$$

$$\forall w \in A^* : f(aw) = bf(w)$$

$$\forall w \in A^* : f(bw) = af(w)$$

zu zeigen $\forall w = w_1 w_2 \in A^n : f(w_1 w_2) = f(w_1)f(w_2)$

Induktionsschritt beliebiges $w \in A^{n+1}$

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A3

$$f(\epsilon) = \epsilon$$

$$\forall w \in A^* : f(aw) = bf(w)$$

$$\forall w \in A^* : f(bw) = af(w)$$

zu zeigen $\forall w = w_1 w_2 \in A^n : f(w_1 w_2) = f(w_1)f(w_2)$

Induktionsschritt beliebiges $w \in A^{n+1}$

■ $w = aw'$:

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A3

$$f(\epsilon) = \epsilon$$

$$\forall w \in A^* : f(aw) = bf(w)$$

$$\forall w \in A^* : f(bw) = af(w)$$

zu zeigen $\forall w = w_1 w_2 \in A^n : f(w_1 w_2) = f(w_1) f(w_2)$

Induktionsschritt beliebiges $w \in A^{n+1}$

- $w = aw' : f(w) = f(aw') = bf(w') = bf(w_1 w_2) = bf(w_1) f(w_2) = f(aw_1) f(w_2)$

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A3

$$f(\epsilon) = \epsilon$$

$$\forall w \in A^* : f(aw) = bf(w)$$

$$\forall w \in A^* : f(bw) = af(w)$$

zu zeigen $\forall w = w_1 w_2 \in A^n : f(w_1 w_2) = f(w_1) f(w_2)$

Induktionsschritt beliebiges $w \in A^{n+1}$

- $w = aw'$: $f(w) = f(aw') = bf(w') = bf(w_1 w_2) = bf(w_1) f(w_2) = f(aw_1) f(w_2)$
- $w = bw'$: $f(w) = f(bw') = af(w') = af(w_1 w_2) = af(w_1) f(w_2) = f(bw_1) f(w_2)$

Huffman-Codierung

Huffman-Codierung

- Übersetzungsfunktion $h(x)$ gesucht
- ϵ -freier und Präfixfreier Homomorphismus
- $h(x) : A \rightarrow \{0, 1\}^*$
- $h(w)$ soll dabei möglichst kurz sein.
- Zeichen, die häufiger vorkommen, bekommen einen kürzeren Code.

$w = \text{aafbcdfbfbbeefbcfbfbfeb}$

x	a	b	c	d	e	f
$N_x(w)$	2	7	2	1	3	6

$w = \text{aafbcdfbfbbeefbcfbfbfeb}$

x	a	b	c	d	e	f
$N_x(w)$	2	7	2	1	3	6

e,3

f,6

b,7

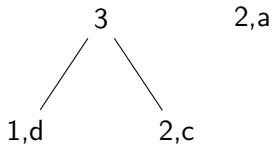
2,a

1,d

2,c

$w = \text{aafbcdffbfbefbcbfbfeb}$

x	a	b	c	d	e	f
$N_x(w)$	2	7	2	1	3	6



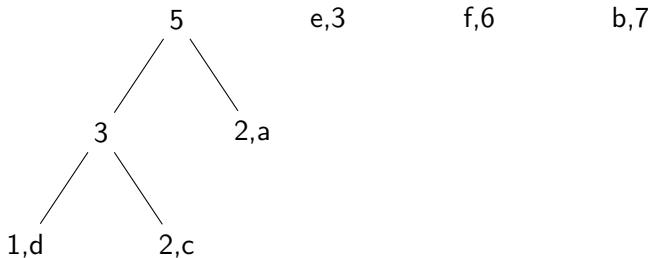
e,3

f,6

b,7

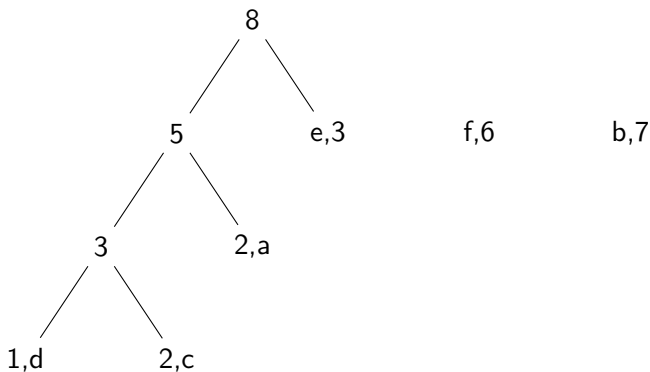
$w = \text{aafbcd f b f b e e f b c f b b f e b}$

x	a	b	c	d	e	f
$N_x(w)$	2	7	2	1	3	6



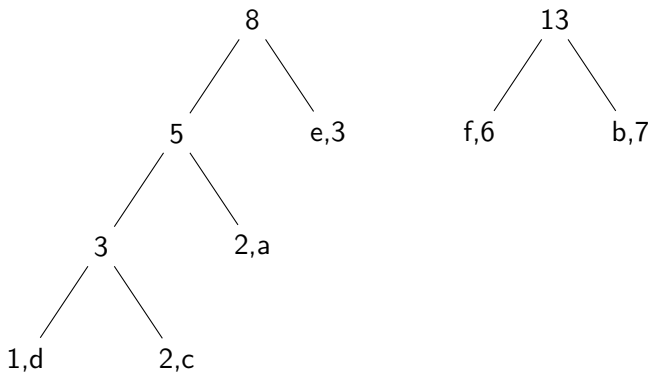
$w = \text{aafbcd f b f b e e f b c f b b f e b}$

x	a	b	c	d	e	f
$N_x(w)$	2	7	2	1	3	6



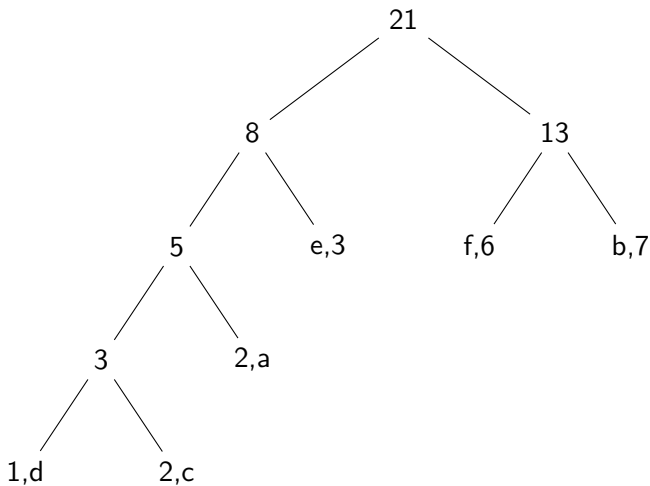
$w = \text{aafbcdfbfbeefbcfbfbfeb}$

x	a	b	c	d	e	f
$N_x(w)$	2	7	2	1	3	6



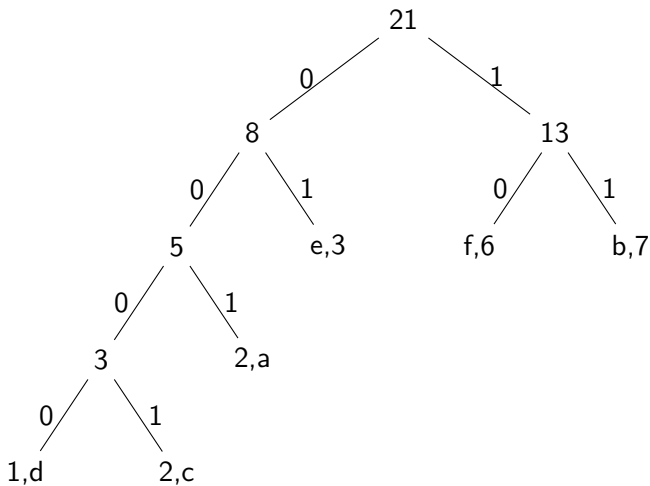
$w = \text{aafbcd fbfbeefbcfb bfeb}$

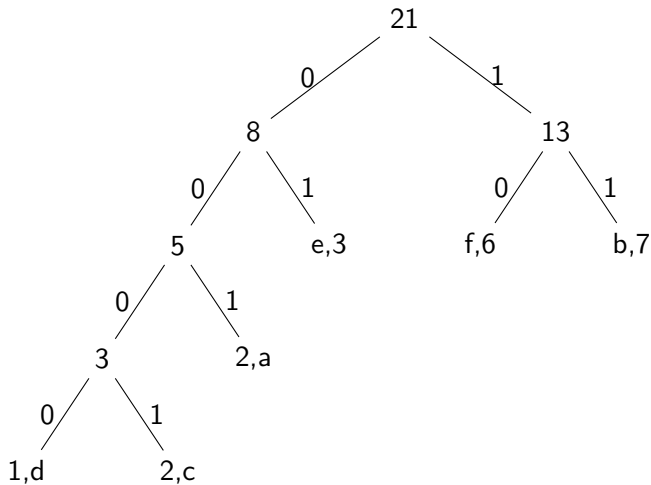
x	a	b	c	d	e	f
$N_x(w)$	2	7	2	1	3	6



$w = \text{aafbcdffbfbefbcfbfbfeb}$

x	a	b	c	d	e	f
$N_x(w)$	2	7	2	1	3	6





x	a	b	c	d	e	f
$h(x)$	001	11	0001	0000	01	10

Huffman-Codierung

- $w = \text{aafbcdfbfbee fbcfb bfeb}$
- $h(w) = 00100110110001000010111011010110110001101111100111$
- Die Codierung von w ist 50 Zeichen lang.

Klausuraufgabe: SS 2011 A4

Gegeben sei das Alphabet $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ und ein Wort $w \in A^*$ in dem die Symbole mit folgenden Häufigkeiten vorkommen:

a	b	c	d	e	f	g
11	3	11	24	8	7	36

- Zeichnen Sie den Huffman-Baum.
- Geben Sie die Huffman-Codierung des Wortes *bad* an.

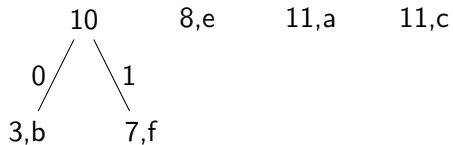
Klausuraufgabe: SS 2011 A4

3,b 7,f 8,e 11,a 11,c 24,d 36,g

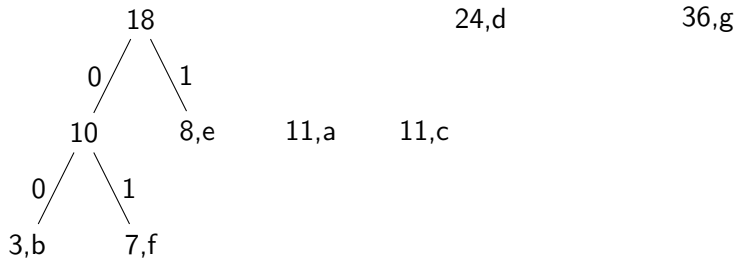
Klausuraufgabe: SS 2011 A4

24,d

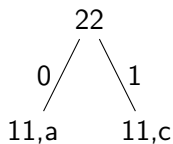
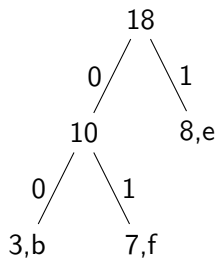
36,g



Klausuraufgabe: SS 2011 A4



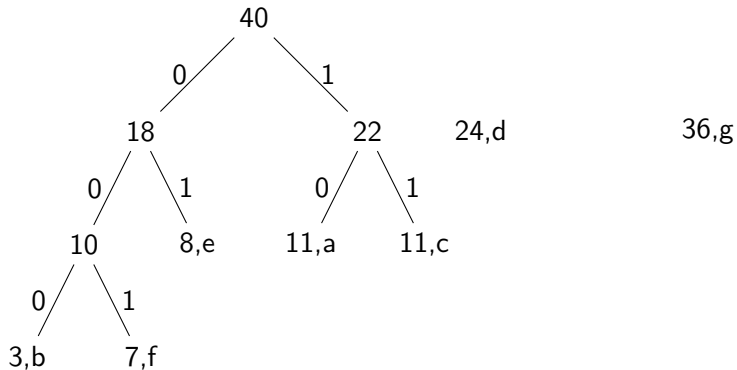
Klausuraufgabe: SS 2011 A4



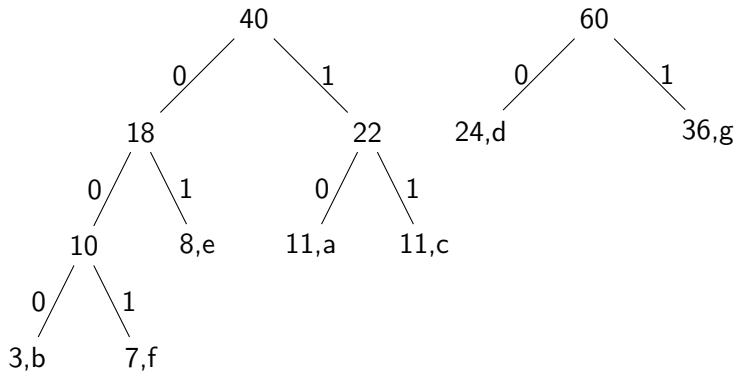
24,d

36,g

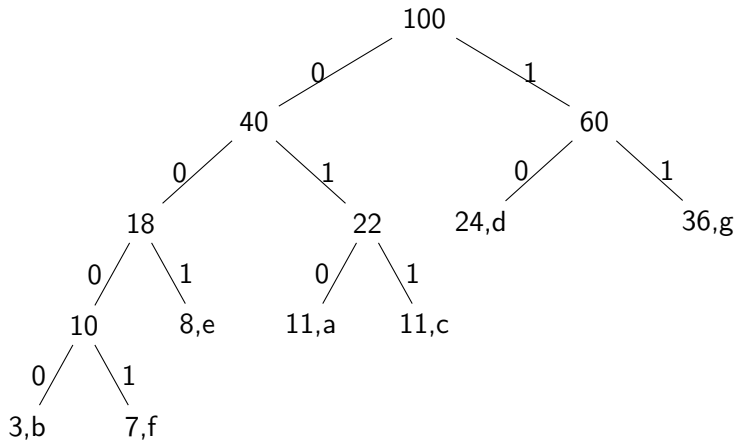
Klausuraufgabe: SS 2011 A4



Klausuraufgabe: SS 2011 A4



Klausuraufgabe: SS 2011 A4



$$h(bad) = 0000\ 010\ 10$$

Klausuraufgabe: SS 2011 A4

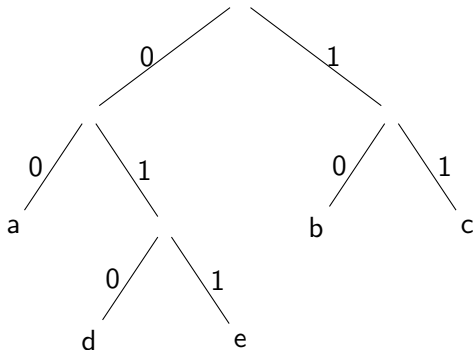
Gegeben seien zwei Codierungen über dem Alphabet $A = \{a, b, c, d, e\}$

x	a	b	c	d	e
$h(x)$	00	10	11	010	011

x	a	b	c	d	e
$h(x)$	10	11	001	010	011

Welche der beiden Codierungen ist eine gültige Huffman-Codierung?

x	a	b	c	d	e
$h(x)$	00	10	11	010	011



x	a	b	c	d	e
$h(x)$	10	11	001	010	011

