Grundbegriffe der Informatik
Crashkurs WS 2017/18

fuks e.V. - Fachübergreifende Unternehmensberatung Karlsruher Studenten

Miguel Santos Correa

miguelsantoscorrea@gmail.com

https://github.com/miguel-sc/GBI-Crashkurs

Gliederung

Graphen

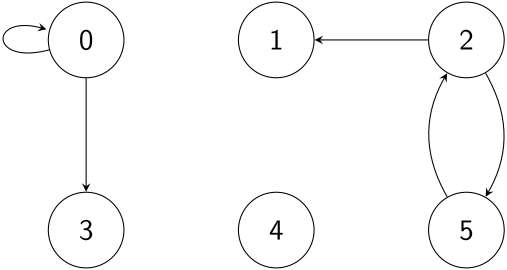
Gerichtete Graphen

Ein gerichteter Graph G ist definiert als:

- $G = (V, E)$
- Knotenmenge V
- Kantenmenge E
- $E \subseteq V \times V$

Beispielgraphen

$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$E = \{(0, 0), (0, 3), (2, 1), (2, 5), (5, 2)\}$.



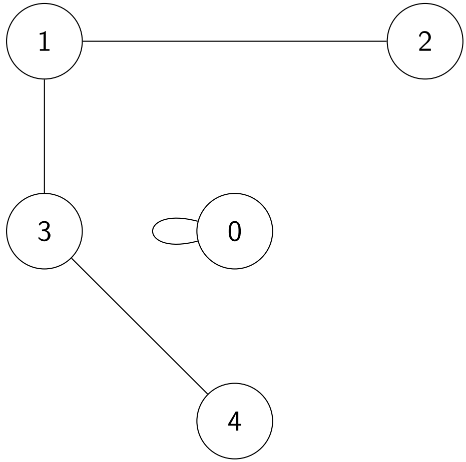
Ungerichtete Graphen

Ein ungerichteter Graph ist definiert als:

- $U = (V, E)$
- Knotenmenge V
- Kantenmenge E
- $E \subseteq \{\{x, y\} | x \in V \wedge y \in V\}$

Beispielgraphen

$U = (\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{\{0\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}\})$



Ungerichtete Graphen

Achtung:

- für $x \neq y$ ist $\{x, y\}$ eine zweielementige Menge, ohne eine Festlegung von Reihenfolge
- für $x = y$ ist die Menge $\{x, y\} = \{x\}$ eine ein elementige Menge

Teilgraphen

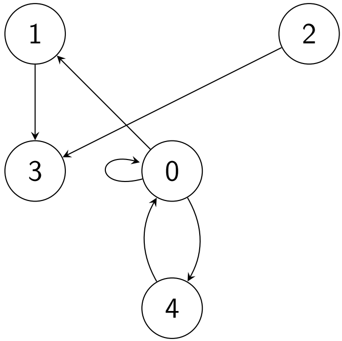
G' ist ein Teilgraph von G, wenn:

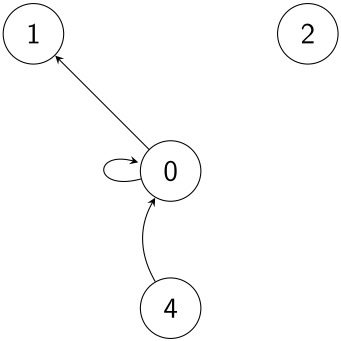
- $G = (V, E)$
- $G' = (V', E')$
- $V' \subseteq V$
- $E' \subseteq E \cap V' \times V'$

Ein Teilgraph besitzt also nur eine Teilmenge der Knoten mit einer Teilmenge an Kanten zwischen diesen Knoten.

Beispielgraphen

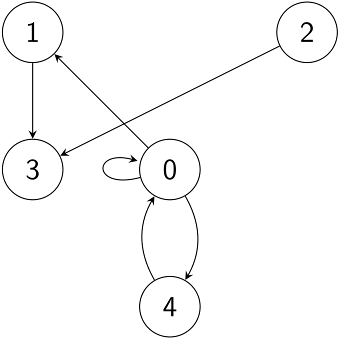
$G = (\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{(0, 0), (0, 1), (0, 4), (1, 3), (2, 3), (4, 0)\})$
$G' = (\{0, 1, 2, 4\}, \{(0, 0), (0, 1), (4, 0)\})$

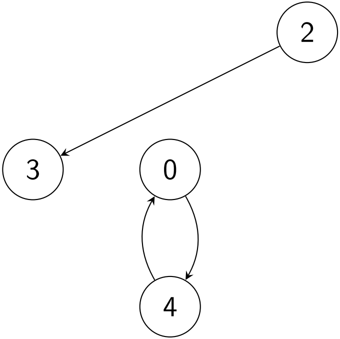




Beispielgraphen

$G = (\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{(0, 0), (0, 1), (0, 4), (1, 3), (2, 3), (4, 0)\})$
$G' = (\{0, 2, 3, 4\}, \{(0, 4), (2, 3), (4, 0)\})$



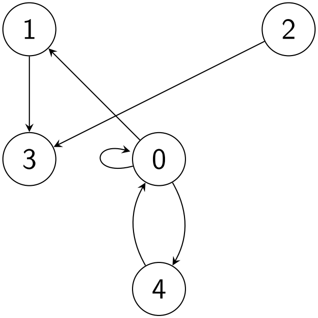


Pfade

Für einen Pfad p gilt:

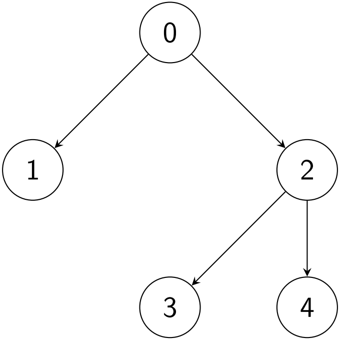
- $p = (v_0, ..., v_n) \in V^+$
- $(v_i, v_{i+1}) \in E$
- Bei ungerichteten Graphen nennen wir soetwas einen Weg

Pfade



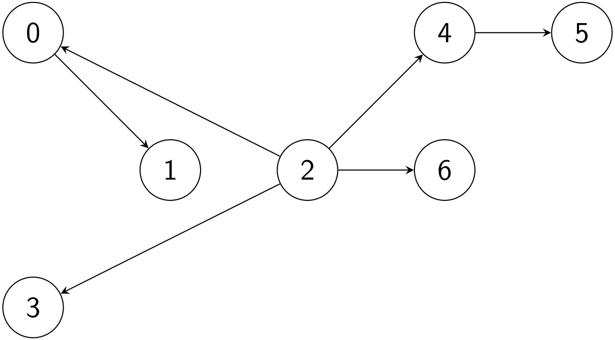
- $p_1 = (2, 3)$
- $p_2 = (0, 0, 4, 0)$
- $p_3 = (4, 0, 1, 3)$
- usw..

Bäume



- eindeutiger Pfad von der Wurzel zu allen Knoten
- Bei ungerichteten Bäumen ist die Wurzel nicht eindeutig

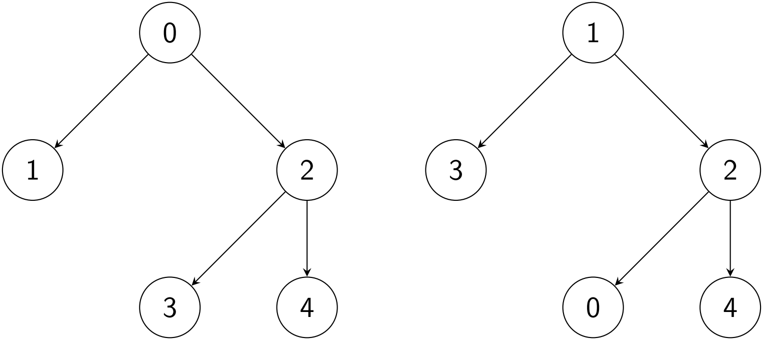
Bäume



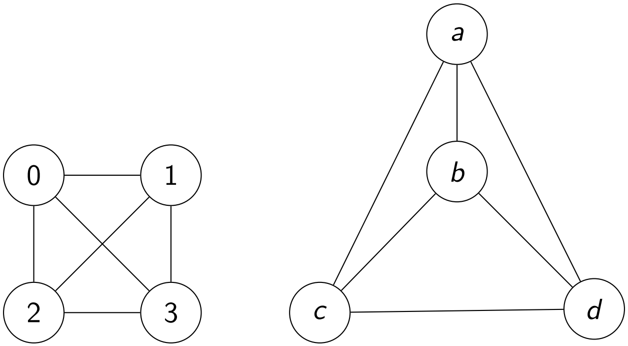
Isomorphe Graphen

- Isomorphismus: bijektiver Homomorphismus
- Zwei Graphen sind isomorph, wenn sich der eine Graph durch Umbennung der Knoten des anderen Graphen bilden lässt.

Isomorphe Graphen



Isomorphe Graphen

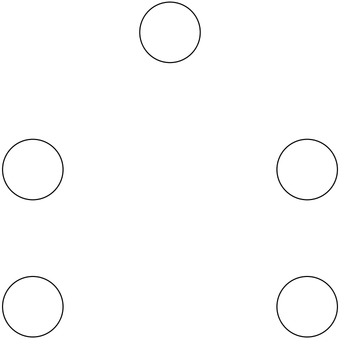


Klausuraufgabe: SS 2013 A2

Zeichnen Sie alle ungerichteten nicht-isomorphen Graphen mit 5 Knoten, für die gilt:
Genau ein Knoten besitzt Grad 4, all anderen Knoten haben Grad 2.

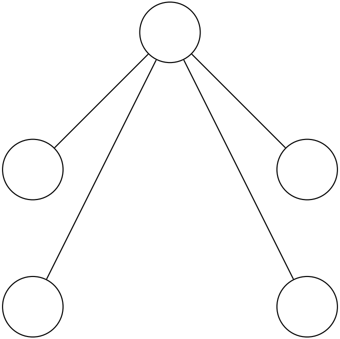
Klausuraufgabe: SS 2013 A2

Genau ein Knoten besitzt Grad 4, all anderen Knoten haben Grad 2.



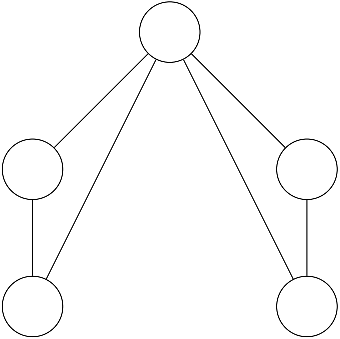
Klausuraufgabe: SS 2013 A2

Genau ein Knoten besitzt Grad 4, all anderen Knoten haben Grad 2.



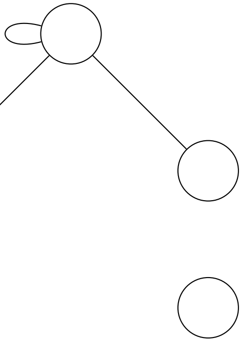
Klausuraufgabe: SS 2013 A2

Genau ein Knoten besitzt Grad 4, all anderen Knoten haben Grad 2.



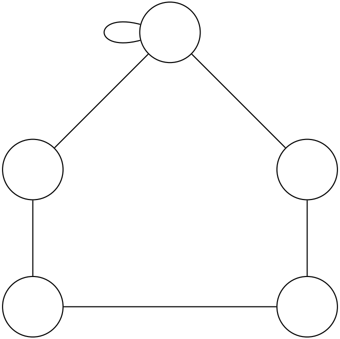
Klausuraufgabe: SS 2013 A2

Genau ein Knoten besitzt Grad 4, all anderen Knoten haben Grad 2.



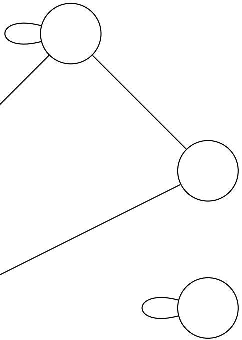
Klausuraufgabe: SS 2013 A2

Genau ein Knoten besitzt Grad 4, all anderen Knoten haben Grad 2.



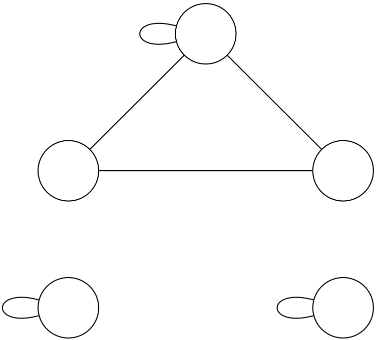
Klausuraufgabe: SS 2013 A2

Genau ein Knoten besitzt Grad 4, all anderen Knoten haben Grad 2.



Klausuraufgabe: SS 2013 A2

Genau ein Knoten besitzt Grad 4, all anderen Knoten haben Grad 2.

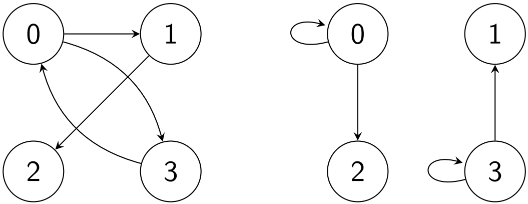


Relationen

- $E \subseteq V \times V$
- E ist eine Relation.
- Wie sieht ein Graph aus mit E^2, E^3?

Relationen

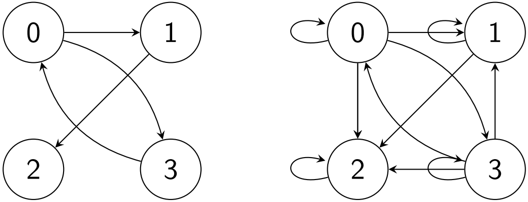
Links: $G = (V, E)$, Rechts: $G = (V, E^2)$



E^2 sind also alle Pfade der Länge 2.

Relationen

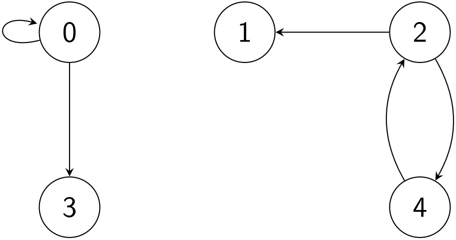
Links: $G = (V, E)$, Rechts: $G = (V, E^*)$



Adjazenzmatrix

- $n \times n$-Matrix bei einem Graphen mit n Knoten
- $A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E \\ 0 & \text{falls } (i,j) \notin E \end{cases}$
- A_{ij} gibt also an, ob eine Kante von i nach j existiert.

Adjazenzmatrix



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

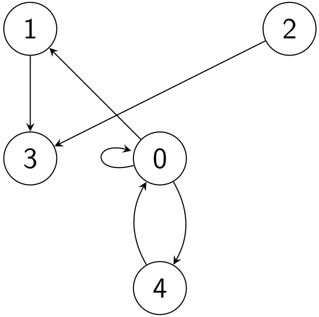
Adjazenzmatrix

- Woran erkennt man Schlingen?
- Wie sehen Adjazenzmatrizen bei ungerichteten Graphen aus?
- Wie sieht der Graph zu folgenden Adjazenzmatrizen aus?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wegematrix

- $W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls ein Weg von i nach j existiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- Beispiel:



$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wegematrix

Gegeben sei eine 3×3-Matrix, die überall Einsen hat, außer an einer Stelle, die nicht auf der Hauptdiagonalen liegt. Zeigen Sie, dass A nicht die Wegematrix eines Graphen sein kann.

Wegematrix

Gegeben sei eine 3×3-Matrix, die überall Einsen hat, außer an einer Stelle, die nicht auf der Hauptdiagonalen liegt. Zeigen Sie, dass A nicht die Wegematrix eines Graphen sein kann.

Beispiel: $W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- $W_{01} = 0$, es existiert kein Weg von 0 zu 1
- $W_{02} = 1$, es existiert ein Weg von 0 zu 2
- $W_{21} = 1$, es existiert ein Weg von 2 zu 1

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A6

Für $n \in \mathbb{N}_+$ sei folgender Graph $G_n = (V_n, E_n)$ definiert:
$V_n = \{x | x \subseteq \mathbb{G}_n \wedge |x| = 2\}$,
$E_n = \{\{u, v\} | u \in V, v \in V, u \cap v = \emptyset\}$.

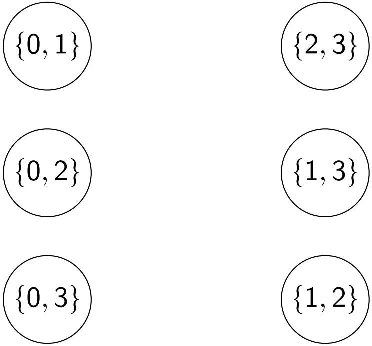
- Zeichnen Sie G_4.
- Wie viele Kanten hat G_5?
- Geben Sie die Wegematrix zu G_3 an.

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A6

$V_n = \{x | x \subseteq \mathbb{G}_n \wedge |x| = 2\}$,
$E_n = \{\{u, v\} | u \in V, v \in V, u \cap v = \emptyset\}$.
V_4, E_4 gesucht.

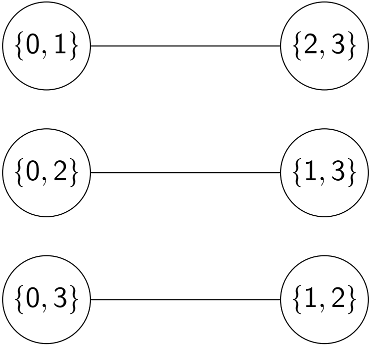
Klausuraufgabe: WS 2012/13 A6

$V_n = \{x | x \subseteq \mathbb{G}_n \wedge |x| = 2\}$,
$E_n = \{\{u, v\} | u \in V, v \in V, u \cap v = \emptyset\}$.
V_4, E_4 gesucht.



Klausuraufgabe: WS 2012/13 A6

$V_n = \{x | x \subseteq \mathbb{G}_n \wedge |x| = 2\}$,
$E_n = \{\{u, v\} | u \in V, v \in V, u \cap v = \varnothing\}$.
V_4, E_4 gesucht.

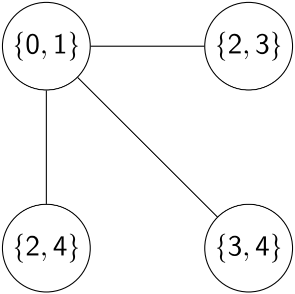


Klausuraufgabe: WS 2012/13 A6

$V_n = \{x | x \subseteq \mathbb{G}_n \wedge |x| = 2\}$,
$E_n = \{\{u, v\} | u \in V, v \in V, u \cap v = \emptyset\}$.
V_5, E_5 gesucht.

Klausuraufgabe: WS 2012/13 A6

$V_n = \{x | x \subseteq \mathbb{G}_n \wedge |x| = 2\}$,
$E_n = \{\{u, v\} | u \in V, v \in V, u \cap v = \emptyset\}$.
V_5, E_5 gesucht.



Klausuraufgabe: WS 2012/13 A6

- Es gibt $5 \cdot 4/2$ Knoten
- Jeder Knoten hat 3 Kanten
- $5 \cdot 4/2 \cdot 3 = 30$
- $30/2 = 15$ Kanten (Doppelzählung)

Reguläre Ausdrücke / Endliche Akzeptoren

Reguläre Ausdrücke

A ist ein beliebiges Alphabet, $Z = \{|, (,), *, \varnothing\}$
Dann:

- $\varnothing$ ist ein regulärer Ausdruck
- Für jedes $a \in A$ ist a ein regulärer Ausdruck
- Für die regulären Ausdrücke A_1 und A_2 sind $(A_1|A_2)$ und (A_1A_2) auch reguläre Ausdrücke
- Ist A ein regulärer Ausdruck, so ist auch $A*$
- Nichts anderes ist ein regulärer Ausdruck

Reguläre Ausdrücke

$\langle R \rangle$ sei die Sprache über dem regulären Ausdruck R.
Dann:

- $\forall x \in A : \langle x \rangle = \{x\}$
- $\langle R_1 | R_2 \rangle = \langle R_1 \rangle \cup \langle R_2 \rangle$
- $\langle R_1 R_2 \rangle = \langle R_1 \rangle \langle R_2 \rangle$
- $\langle R* \rangle = \langle R \rangle^*$

Reguläre Ausdrücke

- $R = a$, $\langle R \rangle = \{a\}$

Reguläre Ausdrücke

- $R = a$, $\langle R \rangle = \{a\}$
- $R = (a|b)$, $\langle R \rangle = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$

Reguläre Ausdrücke

- $R = a$, $\langle R \rangle = \{a\}$
- $R = (a|b)$, $\langle R \rangle = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
- $R = (aa|b)*$, $\langle R \rangle = \{aa, b\}^*$

Reguläre Ausdrücke

- $R = a$, $\langle R \rangle = \{a\}$
- $R = (a|b)$, $\langle R \rangle = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
- $R = (aa|b)*$, $\langle R \rangle = \{aa, b\}^*$
- $R = aba(ab|aa)*$, $\langle R \rangle = \{aba\}\{ab, aa\}^*$

Reguläre Ausdrücke

- $R = a$, $\langle R \rangle = \{a\}$
- $R = (a|b)$, $\langle R \rangle = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
- $R = (aa|b)*$, $\langle R \rangle = \{aa, b\}^*$
- $R = aba(ab|aa)*$, $\langle R \rangle = \{aba\}\{ab, aa\}^*$
- $R = aa|(bb)*$, $\langle R \rangle = \{aa\} \cup \{bb\}^*$

Reguläre Ausdrücke

- $R = a$, $\langle R \rangle = \{a\}$
- $R = (a|b)$, $\langle R \rangle = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
- $R = (aa|b)*$, $\langle R \rangle = \{aa, b\}^*$
- $R = aba(ab|aa)*$, $\langle R \rangle = \{aba\}\{ab, aa\}^*$
- $R = aa|(bb)*$, $\langle R \rangle = \{aa\} \cup \{bb\}^*$
- $R = \emptyset$, $\langle R \rangle = \{\}$

Reguläre Ausdrücke

- $R = a$, $\langle R \rangle = \{a\}$
- $R = (a|b)$, $\langle R \rangle = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
- $R = (aa|b)*$, $\langle R \rangle = \{aa, b\}^*$
- $R = aba(ab|aa)*$, $\langle R \rangle = \{aba\}\{ab, aa\}^*$
- $R = aa|(bb)*$, $\langle R \rangle = \{aa\} \cup \{bb\}^*$
- $R = \emptyset$, $\langle R \rangle = \{\}$
- $R = \emptyset*$, $\langle R \rangle = \{\epsilon\}$

Reguläre Ausdrücke

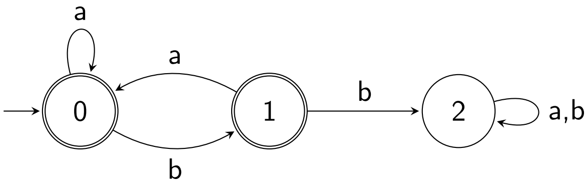
- $R = a$, $\langle R \rangle = \{a\}$
- $R = (a|b)$, $\langle R \rangle = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
- $R = (aa|b)*$, $\langle R \rangle = \{aa, b\}^*$
- $R = aba(ab|aa)*$, $\langle R \rangle = \{aba\}\{ab, aa\}^*$
- $R = aa|(bb)*$, $\langle R \rangle = \{aa\} \cup \{bb\}^*$
- $R = \emptyset$, $\langle R \rangle = \{\}$
- $R = \emptyset*$, $\langle R \rangle = \{\epsilon\}$
- $R = \emptyset * |ab$, $\langle R \rangle = \{\epsilon, ab\}$

Endliche Akzeptoren

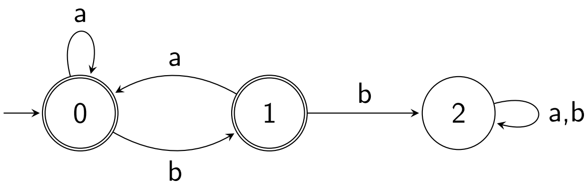
Ein endlicher Akzeptor $A = (Z, z_0, X, f, F)$ wird festgelegt durch

- endliche Zustandsmenge Z
- einen Anfangszustand $z_0 \in Z$
- ein Eingabealphabet X
- eine Zustandsüberführungsfunktion $f : Z \times X \rightarrow Z$
- eine Menge $F \subseteq Z$ akzeptierender Zustände

Endliche Akzeptoren



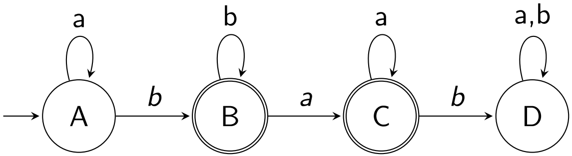
Endliche Akzeptoren



$$L = \{a, b\}^* \setminus \{w_1 bb w_2 | w_1, w_2 \in \{a, b\}^*\}$$

Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6

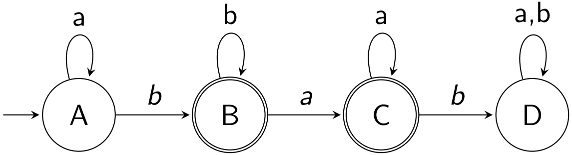
Es sei der folgende endliche Akzeptor M mit Zustandsmenge $Z = \{A, B, C, D\}$ und Eingabealphabet $X = \{a, b\}$ gegeben:



- Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, so dass gilt: $\langle R \rangle = L(M)$.
- Geben sie einen endlichen Akzeptor an, der folgende formale Sprache akzeptiert:

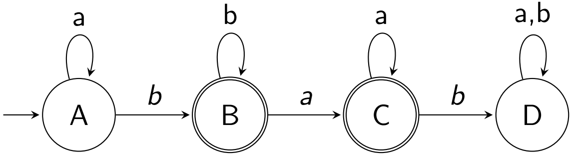
$$\{w | w \in L(M) \text{ und die Anzahl } N_a(w) \text{ der } a \text{ in } w \text{ ist gerade}\}$$

Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6



Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, so dass gilt: $\langle R \rangle = L(M)$.

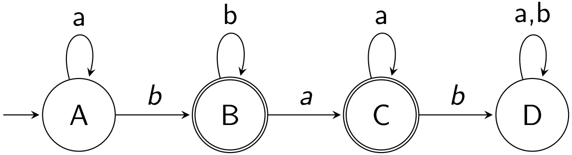
Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6



Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, so dass gilt: $\langle R \rangle = L(M)$.

- $R_B = a * bb*$

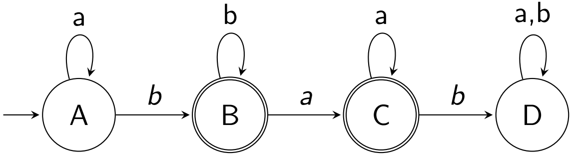
Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6



Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, so dass gilt: $\langle R \rangle = L(M)$.

- $R_B = a * bb*$
- $R_C = a * bb * aa*$

Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6

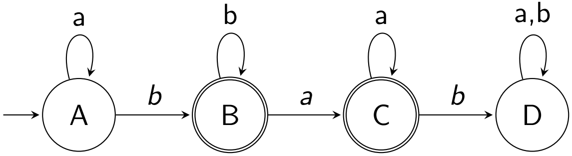


Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, so dass gilt: $\langle R \rangle = L(M)$.

- $R_B = a * bb*$
- $R_C = a * bb * aa*$
- $R = R_B | R_C = (a * bb*)|(a * bb * aa*) = a * bb * a*$

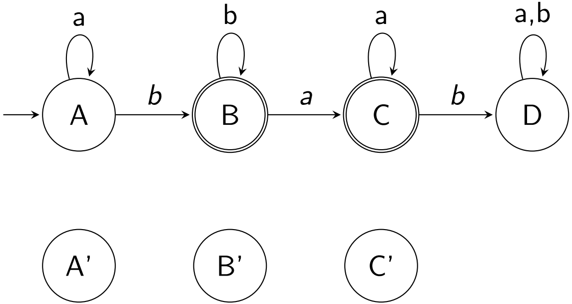
Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6

$$\{w | w \in L(M) \text{ und die Anzahl } N_a(w) \text{ der } a \text{ in } w \text{ ist gerade}\}$$



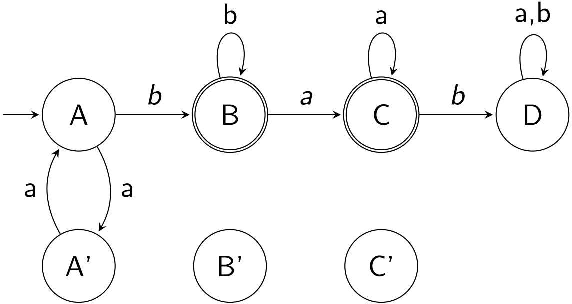
Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6

$\{w | w \in L(M) \text{ und die Anzahl } N_a(w) \text{ der } a \text{ in } w \text{ ist gerade}\}$



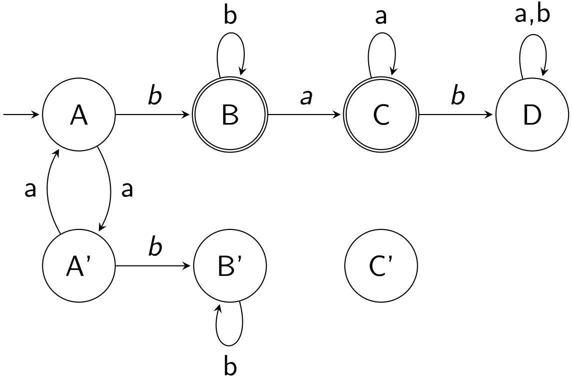
Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6

$$\{w | w \in L(M) \text{ und die Anzahl } N_a(w) \text{ der } a \text{ in } w \text{ ist gerade}\}$$



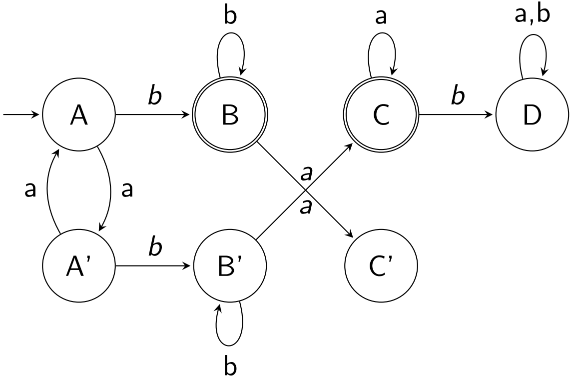
Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6

$$\{w | w \in L(M) \text{ und die Anzahl } N_a(w) \text{ der } a \text{ in } w \text{ ist gerade}\}$$



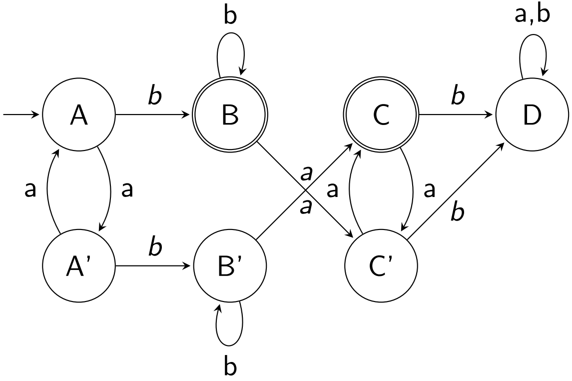
Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6

$$\{w \mid w \in L(M) \text{ und die Anzahl } N_a(w) \text{ der } a \text{ in } w \text{ ist gerade}\}$$

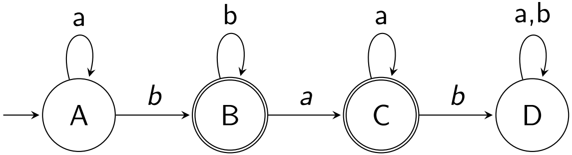


Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6

$\{w | w \in L(M) \text{ und die Anzahl } N_a(w) \text{ der } a \text{ in } w \text{ ist gerade}\}$

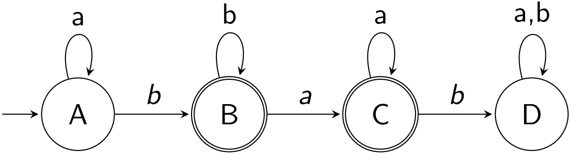


Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6



Wie viele verschiedene formale Sprachen kann man mit endlichen Akzeptoren erkennen, deren Eingabealphabet, Zustandsmenge, Anfangszustand und Zustandsüberführungsfunktion wie bei dem oben angegebenen Akzeptor M sind?

Klausuraufgabe: WS 2013/14 A6



Wie viele verschiedene formale Sprachen kann man mit endlichen Akzeptoren erkennen, deren Eingabealphabet, Zustandsmenge, Anfangszustand und Zustandsüberführungsfunktion wie bei dem oben angegebenen Akzeptor M sind?
16

Klausuraufgabe: SS 2015 A6

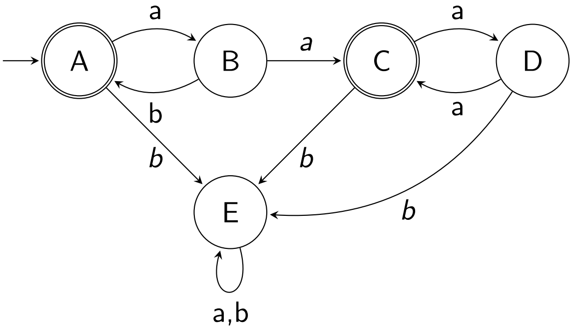
- Geben Sie einen endlichen Akzeptor an, der die formale Sprache erkennt, die durch den regulären Ausdruck $(ab)*(aa)*$ beschrieben wird.
- Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die die formale Sprache

$$L = \{a^k b^{m+k} c^{m+l} d^l | k, l, m \in \mathbb{N}_0\}$$

- Gibt es einen regulären Ausdruck, der die formale Sprache beschreibt?

Klausuraufgabe: SS 2015 A6

$$(ab) * (aa)*$$



Klausuraufgabe: SS 2015 A6

$$L = \{a^k b^{m+k} c^{m+l} d^l | k, l, m \in \mathbb{N}_0\}$$

Gibt es einen regulären Ausdruck, der die formale Sprache beschreibt?

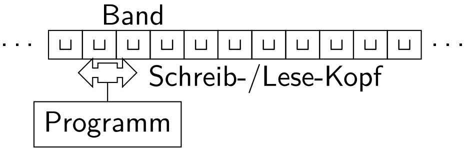
Klausuraufgabe: SS 2015 A6

$$L = \{a^k b^{m+k} c^{m+l} d^l | k, l, m \in \mathbb{N}_0\}$$

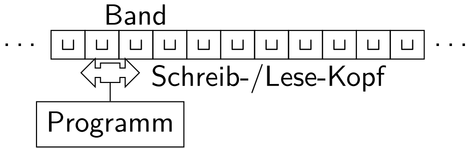
Gibt es einen regulären Ausdruck, der die formale Sprache beschreibt?
Nein.

Turingmaschinen

Turingmaschine - anschaulich



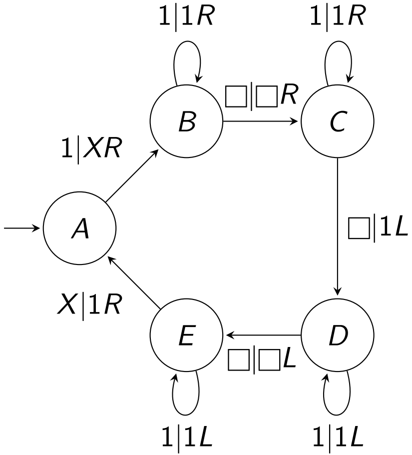
Turingmaschine - anschaulich



- f : In welchen Zustand geht die Maschine?
- g : Was schreibt die Maschine auf das Band?
- m : Wohin bewegt sich der Kopf?

Turingmaschinen

Beispiel einer Turingmaschine:



Turingmaschinen

	A	B	C	D	E
$\square$		$C, \square, R$	$D, 1, L$	$E, \square, L$	
1	B, X, R	$B, 1, R$	$C, 1R$	$D, 1, L$	$E, 1, L$
X					$A, 1, R$

Turingmaschinen

A
□ 1 1 □ □ □

B
□ X 1 □ □ □

B
□ X 1 □ □ □

C
□ X 1 □ □ □

D
□ X 1 □ 1 □

E
□ X 1 □ 1 □

E
□ X 1 □ 1 □

A
□ 1 1 □ 1 □

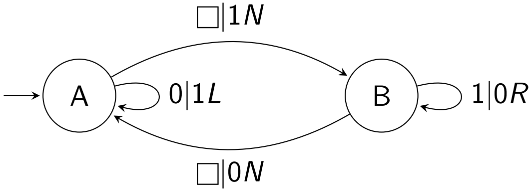
⋮

Endkonfiguration:

A
□ 1 1 □ 1 1

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A7

Die Turingmaschine T sei graphisch gegeben durch



Dabei bedeuten L und R, dass der Kopf nach links bzw. rechts bewegt wird und N, dass er nicht bewegt wird. Geben Sie die ersten elf Konfigurationen an, die die Turingmaschine T durchläuft, wenn zu Beginn alle Felder mit dem Blanksymbol beschriftet sind.

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A7

		A			
□	□	□	□	□	□
		B			
□	□	1	□	□	□
			B		
□	□	0	□	□	□
			A		
□	□	0	0	□	□
		A			
□	□	0	1	□	□
	A				
□	□	1	1	□	□

	B				
□	1	1	1	□	□
		B			
□	0	1	1	□	□
			B		
□	0	0	1	□	□
				B	
□	0	0	0	□	□
				A	
□	0	0	0	0	□

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A7

Für jede nicht-negative ganze Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\varphi(n)$ die Anzahl der Schirtte, die die Turingmaschine T bei Eingabe ϵ benötigt, bis das Wort 0^{2n} auf dem Band steht.

(i) Geben Sie $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ und $\varphi(2)$ an.

(ii) Vervollständigen Sie die Rekursionsformel

$$\varphi(n+1) = \varphi(n) + \ldots$$

durch einen arithmetischen Ausdruck, in dem n vorkommt.

Geben Sie eine Abbildung $\psi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ so an, dass $\varphi \in \Theta(\psi)$ gilt. Dazu dürfen Sie *keine* trigonometrischen Funktionen (cos,sin, usw.) verwenden.

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A7

- $\varphi(0) = 0$
- $\varphi(1) = 3$
- $\varphi(2) = 10$

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A7

- $\varphi(0) = 0$
- $\varphi(1) = 3$
- $\varphi(2) = 10$
- $\varphi(n+1) = \varphi(n) + 4n + 3$

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A7

- $\varphi(0) = 0$
- $\varphi(1) = 3$
- $\varphi(2) = 10$
- $\varphi(n+1) = \varphi(n) + 4n + 3$
- $\varphi(n) \in \Theta(\psi)$

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A7

- $\varphi(0) = 0$
- $\varphi(1) = 3$
- $\varphi(2) = 10$
- $\varphi(n+1) = \varphi(n) + 4n + 3$
- $\varphi(n) \in \Theta(\psi)$
- $\varphi(n) \in \Theta(n^2)$

Klausuraufgabe: WS 2015/16 A7

- $\varphi(0) = 0$
- $\varphi(1) = 3$
- $\varphi(2) = 10$
- $\varphi(n+1) = \varphi(n) + 4n + 3$
- $\varphi(n) \in \Theta(\psi)$
- $\varphi(n) \in \Theta(n^2)$
- $\varphi(n) \in \Theta(\sum_{i=0}^{n-1}(4i+3))$

Klausuraufgabe: SS 2013 A7

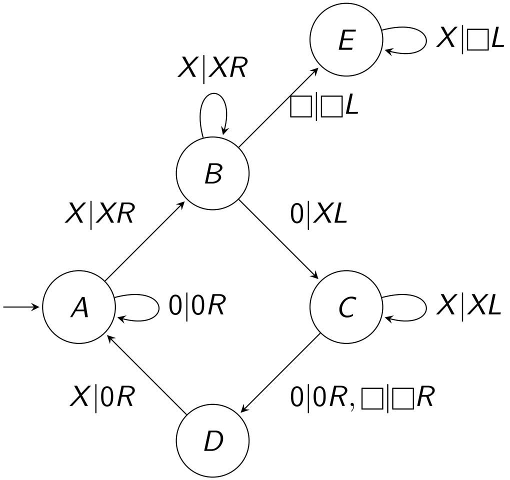
Sei T die Turingmaschine, die als Eingabe ein wort w über $\{0, X\}$ erhält und folgenden Homomorphismus h berechnet
$h(0) = 0$, $h(X) = \epsilon$,
so dass nach der Abarbeitung $h(w)$ auf dem Band steht.
Geben Sie T explizit grafisch an.

Klausuraufgabe: SS 2013 A7

Sei T die Turingmaschine, die als Eingabe ein wort w über $\{0, X\}$ erhält und folgenden Homomorphismus h berechnet
$h(0) = 0$, $h(X) = \epsilon$,
so dass nach der Abarbeitung $h(w)$ auf dem Band steht.
Idee:

- Finde eine 0 rechts von X
- Ersetze die 0 durch ein X
- Ersetze das erste X von links durch eine 0
- Wiederhole die Schritte

Klausuraufgabe: SS 2013 A7



Klausuraufgabe: SS 2013 A7

- Geben Sie in Abhängigkeit der Länge des Eingabewortes w eine möglichst scharfe obere Schranke in O-Notation für die worst case Lautzeit von T an.
- Geben Sie in Abhängigkeit der Länge des Eingabewortes w eine Eingabe an, deren Bearbeitung (bis auf einen konstanten Faktor) worst case Laufzeit benötigt.
- Geben Sie in Abhängigkeit der Länge des Eingabewortes w eine Eingabe an, deren Bearbeitung asymptotisch nicht worst case Laufzeit benötigt.

Klausuraufgabe: SS 2013 A7

Welche Wörter haben die schlechteste Laufzeit?

- $w = 00000000$?

Klausuraufgabe: SS 2013 A7

Welche Wörter haben die schlechteste Laufzeit?

- $w = 00000000$? Nein

Klausuraufgabe: SS 2013 A7

Welche Wörter haben die schlechteste Laufzeit?

- $w = 00000000$? Nein
- $w = XXXXXXXX$?

Klausuraufgabe: SS 2013 A7

Welche Wörter haben die schlechteste Laufzeit?

- $w = 00000000$? Nein
- $w = XXXXXXXX$? Nein

Klausuraufgabe: SS 2013 A7

Welche Wörter haben die schlechteste Laufzeit?

- $w = 00000000$? Nein
- $w = XXXXXXXX$? Nein
- $w = XXXX0000$

worst case Laufzeit?

Klausuraufgabe: SS 2013 A7

Welche Wörter haben die schlechteste Laufzeit?

- $w = 00000000$? Nein
- $w = XXXXXXXX$? Nein
- $w = XXXX0000$

worst case Laufzeit?

- $Time_T(n) \in O(n^2)$

Hoare-Kalkül

Hoare-Tripel

Ein Hoare-Tripel $\{P\}S\{Q\}$ besteht aus einer Vorbedingung P, einem Programmstück S und einer Nachbedingung Q.
Beispiel:

$$\{x = a\}$$
$$y \leftarrow x$$
$$\{y = a\}$$

Hoare-Tripel

- HT-A:
  Das Hoare-Tripel $\{\sigma_{x/E}(Q)\} x \leftarrow E \{Q\}$ ist gültig.
- Beispiel:

$$\{?\}$$
$$x \leftarrow E$$
$$\{y = x\}$$

Hoare-Tripel

- HT-A:
  Das Hoare-Tripel $\{\sigma_{x/E}(Q)\} x \leftarrow E \{Q\}$ ist gültig.
- Beispiel:

$$\{y = E\}$$
$$x \leftarrow E$$
$$\{y = x\}$$

Hoare-Tripel

- HT-S:
  Sind die Hoare-Tripel $\{P\}S_1\{Q\}$ und $\{Q\}S_2\{R\}$ gültig, dann auch das Tripel $\{P\}S_1; S_2\{R\}$.
- Beispiel:

$$
\begin{gathered}
\{a \leqslant x\} \\
y \leftarrow x \\
\{a \leqslant y\} \\
\{a \leqslant y\} \\
z \leftarrow y \\
\{a \leqslant z\}
\end{gathered}
$$

Hoare-Tripel

- HT-S:
  Sind die Hoare-Tripel $\{P\}S_1\{Q\}$ und $\{Q\}S_2\{R\}$ gültig, dann auch das Tripel $\{P\}S_1;S_2\{R\}$.
- Beispiel:

$$\{a \leqslant x\}$$
$$y \leftarrow x$$
$$z \leftarrow y$$
$$\{a \leqslant z\}$$

Hoare-Tripel

- HT-E:
  Ist ein Hoare-Tripel $\{P\}S\{Q\}$ gültig und sind die Aussagen $P' \Rightarrow P$ und $Q \Rightarrow Q'$ wahr, dann ist auch das Hoare-Tripel $\{P'\}S\{Q'\}$ gültig.
- Beispiel:

$$\{a \leqslant x\}$$
$$y \leftarrow x$$
$$\{a \leqslant y\}$$

Hoare-Tripel

- HT-E:
  Ist ein Hoare-Tripel $\{P\}S\{Q\}$ gültig und sind die Aussagen $P' \Rightarrow P$ und $Q \Rightarrow Q'$ wahr, dann ist auch das Hoare-Tripel $\{P'\}S\{Q'\}$ gültig.
- Beispiel:

$$
\begin{aligned}
&\{a = x\} \\
&\{a \leqslant x\} \\
&y \leftarrow x \\
&\{a \leqslant y\} \\
&\{a \leqslant y + 1\}
\end{aligned}
$$

Hoare-Tripel

- HT-E:
  Ist ein Hoare-Tripel $\{P\}S\{Q\}$ gültig und sind die Aussagen $P' \Rightarrow P$ und $Q \Rightarrow Q'$ wahr, dann ist auch das Hoare-Tripel $\{P'\}S\{Q'\}$ gültig.
- Beispiel:

$$\{a = x\}$$
$$y \leftarrow x$$
$$\{a \leqslant y + 1\}$$

Hoare-Tripel

HT-I:
Wenn die Hoare-Tripel $\{P \wedge B\}S_1\{Q\}$ und $\{P \wedge \neg B\}S_2\{Q\}$ gültig sind, so ist auch das Hoare-Tripel $\{P\}$**if** B **then** S_1 **else** S_2 **fi** $\{Q\}$ gültig.

$\{P\}$

if B

then

$\{P \wedge B\}$

S_1

$\{Q\}$

else

$\{P \wedge \neg B\}$

S_2

$\{Q\}$

fi

$\{Q\}$

$\{|x| = 15\}$

if $x \geqslant 0$

then

$\{|x| = 15 \wedge x \geqslant 0\}$

$x \leftarrow x$

$\{x = 15\}$

else

$\{|x| = 15 \wedge \neg(x \geqslant 0)\}$

$x \leftarrow -x$

$\{x = 15\}$

fi

$\{x = 15\}$

Beispiel: Minimum

$\{x = a \land y = b\}$

if $x > y$

then

  $\{...\}$

  $z \leftarrow y$

  $\{...\}$

else

  $\{...\}$

  $z \leftarrow x$

  $\{...\}$

fi

$\{z = \min(a, b)\}$

$\{x = a \wedge y = b\}$

if $x > y$

then

$\{x = a \wedge y = b \wedge x > y\}$

$\{...\}$

$z \leftarrow y$

$\{...\}$

else

$\{...\}$

$z \leftarrow x$

$\{...\}$

fi

$\{z = \min(a, b)\}$

$\{x = a \wedge y = b\}$

if $x > y$

then

$\{x = a \wedge y = b \wedge x > y\}$

$\{...\}$

$z \leftarrow y$

$\{...\}$

else

$\{x = a \wedge y = b \wedge \neg(x > y)\}$

$\{...\}$

$z \leftarrow x$

$\{...\}$

fi

$\{z = \min(a, b)\}$

$\{x = a \land y = b\}$

if $x > y$

then

$\{x = a \land y = b \land x > y\}$

$\{...\}$

$z \leftarrow y$

$\{z = \min(a, b)\}$

else

$\{x = a \land y = b \land \neg(x > y)\}$

$\{...\}$

$z \leftarrow x$

$\{z = \min(a, b)\}$

fi

$\{z = \min(a, b)\}$

$\{x = a \land y = b\}$

if $x > y$

then

$\{x = a \land y = b \land x > y\}$

$\{y = \min(a, b)\}$

$z \leftarrow y$

$\{z = \min(a, b)\}$

else

$\{x = a \land y = b \land \neg(x > y)\}$

$\{x = \min(a, b)\}$

$z \leftarrow x$

$\{z = \min(a, b)\}$

fi

$\{z = \min(a, b)\}$

Hoare-Tripel

HT-W:
Wenn das Hoare-Tripel $\{I \wedge B\}S\{I\}$ gültig ist, so ist auch das Tripel $\{I\}$ **while** B **do** S **od** $\{I \wedge \neg B\}$ gültig.

Beispiel: While-Schleife

$\{I\}$
while B
do
    $\{I \land B\}$
    S
    $\{I\}$
od
$\{I \land \neg B\}$

Beispiel: While-Schleife

$$
\begin{array}{l}
\{x \geqslant 0\} \\
\textbf{while } x \leqslant 10 \\
\textbf{do} \\
\qquad \{x \geqslant 0 \land x \leqslant 10\} \\
\qquad x \leftarrow x + 1 \\
\qquad \{x \geqslant 0\} \\
\textbf{od} \\
\{x \geqslant 0 \land \neg(x \leqslant 10)\}
\end{array}
$$

Beispiel: While-Schleife

$\{x = a \wedge y = b\}$

$\{...\}$

while $y \neq 0$

do

> $\{...\}$
>
> $y \leftarrow y - 1$
>
> $\{...\}$
>
> $x \leftarrow x + 1$
>
> $\{...\}$

od

$\{...\}$

$\{x = a + b\}$

$\{x = a \wedge y = b\}$

$\{x + y = a + b\}$

while $y \neq 0$

do

$\{...\}$

$y \leftarrow y - 1$

$\{...\}$

$x \leftarrow x + 1$

$\{...\}$

od

$\{...\}$

$\{x = a + b\}$

$\{x = a \wedge y = b\}$

$\{x + y = a + b\}$

while $y \neq 0$

do

$\{x + y = a + b \wedge y \neq 0\}$

$\{...\}$

$y \leftarrow y - 1$

$\{...\}$

$x \leftarrow x + 1$

$\{...\}$

od

$\{...\}$

$\{x = a + b\}$

$\{x = a \land y = b\}$

$\{x + y = a + b\}$

while $y \neq 0$

do

$\{x + y = a + b \land y \neq 0\}$

$\{...\}$

$y \leftarrow y - 1$

$\{...\}$

$x \leftarrow x + 1$

$\{x + y = a + b\}$

od

$\{...\}$

$\{x = a + b\}$

$\{x = a \wedge y = b\}$

$\{x + y = a + b\}$

while $y \neq 0$

do

$\{x + y = a + b \wedge y \neq 0\}$

$\{...\}$

$y \leftarrow y - 1$

$\{x + 1 + y = a + b\}$

$x \leftarrow x + 1$

$\{x + y = a + b\}$

od

$\{...\}$

$\{x = a + b\}$

$\{x = a \land y = b\}$

$\{x + y = a + b\}$

while $y \neq 0$

do

$\{x + y = a + b \land y \neq 0\}$

$\{x + 1 + y - 1 = a + b\}$

$y \leftarrow y - 1$

$\{x + 1 + y = a + b\}$

$x \leftarrow x + 1$

$\{x + y = a + b\}$

od

$\{...\}$

$\{x = a + b\}$

$\{x = a \land y = b\}$

$\{x + y = a + b\}$

while $y \neq 0$

do

$\quad\{x + y = a + b \land y \neq 0\}$

$\quad\{x + 1 + y - 1 = a + b\}$

$\quad y \leftarrow y - 1$

$\quad\{x + 1 + y = a + b\}$

$\quad x \leftarrow x + 1$

$\quad\{x + y = a + b\}$

od

$\{x + y = a + b \land \neg(y \neq 0)\}$

$\{x = a + b\}$

Aufgabenblatt: WS 2015/16 A8.2

Beweisen Sie anhand des Hoare-Kalküls, dass das Hoare-Tripel

$$\{x = a \wedge y = b\}$$

if $x \geqslant y$

then

$\quad z \leftarrow x$

$\quad x \leftarrow y$

$\quad y \leftarrow z$

else

$\quad x \leftarrow x$

fi

$$\{x = min(a, b) \wedge y = max(a, b)\}$$

gültig ist.

$\{x = a \wedge y = b\}$

if $x \geqslant y$

then

$\quad z \leftarrow x$

$\quad x \leftarrow y$

$\quad y \leftarrow z$

$\{x = min(a, b) \wedge y = max(a, b)\}$

else

$\quad x \leftarrow x$

$\{x = min(a, b) \wedge y = max(a, b)\}$

fi

$\{x = min(a, b) \wedge y = max(a, b)\}$

$\{x = a \wedge y = b\}$

if $x \geqslant y$

then

$\{y = min(a, b) \wedge x = max(a, b)\}$

$\quad z \leftarrow x$

$\quad x \leftarrow y$

$\quad y \leftarrow z$

$\{x = min(a, b) \wedge y = max(a, b)\}$

else

$\{x = min(a, b) \wedge y = max(a, b)\}$

$\quad x \leftarrow x$

$\{x = min(a, b) \wedge y = max(a, b)\}$

fi

$\{x = min(a, b) \wedge y = max(a, b)\}$

$$\{x = a \land y = b \land x \geqslant y\}$$
$$\{y = min(a, b) \land x = max(a, b)\}$$

$$\{x = a \land y = b \land x < y\}$$
$$\{x = min(a, b) \land y = max(a, b)\}$$