# Modelos determinísticos de inventarios

**En términos generales un inventario es un conjunto de recursos útiles que se encuentran ociosos en algún momento.**

**El problema se plantea cuando una empresa expendedora o productora de bienes y servicios no produce en un momento determinado la cantidad suficiente para satisfacer la demanda, por lo que debe realizar un almacenamiento protector contra posibles inexistencias.**

**El objetivo de los problemas de inventario es minimizar los costes (totales o esperados) del sistema sujetos a la restricción de satisfacer la demanda (conocida o aleatoria).**

**Entre los diferentes costes que puede haber en un problema de inventario están:**

**1.- Costes de fabricación.**
**2.- Costes de mantenimiento o almacenamiento.**
**3.- Costes de penalización o rotura por no satisfacer la demanda.**
**4.- Rendimientos o ingresos. (Puede o no incluirse en el modelo).**
**5.- Costes de recuperación o salvamento. (El valor de recuperación representa el valor de desecho del artículo para la empresa, quizá a través de una venta con descuento).**
**6.- Tasa de descuento. La tasa de descuento toma en cuenta el valor del dinero en el tiempo. Cuando una empresa compromete capital en inventarios, no puede usar este dinero para otros fines.**

## MODELO GENERAL DE INVENTARIO

La naturaleza del problema de los inventarios (o existencias) consiste en colocar y recibir en forma repetida pedidos (u "órdenes") de determinados tamaños a intervalos de tiempo establecidos. Desde este punto de vista, una **política de inventario** contesta las dos siguientes preguntas:

1. ¿*Cuánto* pedir?
2. ¿*Cuándo* pedir?

La respuesta de estas preguntas se basa en minimizar el siguiente modelo de costo:

$$\begin{pmatrix}\text{Costo total}\\ \text{del}\\ \text{inventario}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Costo de}\\ \text{compra}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Costo de}\\ \text{preparación}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Costo de}\\ \text{almacenamiento}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Costo de}\\ \text{faltante}\end{pmatrix}$$

Todos esos costos se deben expresar en la cantidad económica de pedido (¿cuánto pedir?) y el tiempo entre los pedidos (¿cuándo pedir?).

1. El *costo de compra* se basa en el precio por unidad del artículo. Puede ser constante, o puede ofrecerse con descuentos.
2. El *costo de preparación* representa el costo fijo incurrido cuando se coloca un pedido. Es independiente de la cantidad pedida.
3. El *costo de almacenamiento* o de posesión representa el costo de mantener una existencia de inventario. Comprende el interés sobre el capital y el costo de almacenamiento, mantenimiento y manejo.
4. El *costo de faltante* es la penalización en que se incurre cuando se terminan las existencias. Incluye la pérdida potencial de ingresos y el costo, más subjetivo, de pérdida de la buena voluntad del cliente.

## MODELOS ESTATICOS Y DINAMICOS

Los modelos de inventario abarcan dos clases de modelos deterministas: **estáticos y dinámicos.**

Los modelos estáticos tienen una demanda constante en función del tiempo.
En los modelos dinámicos, la demanda cambia en función del tiempo.

## MODELOS ESTÁTICOS DE CANTIDAD ECONÓMICA DE PEDIDO (CEP, O EOQ)

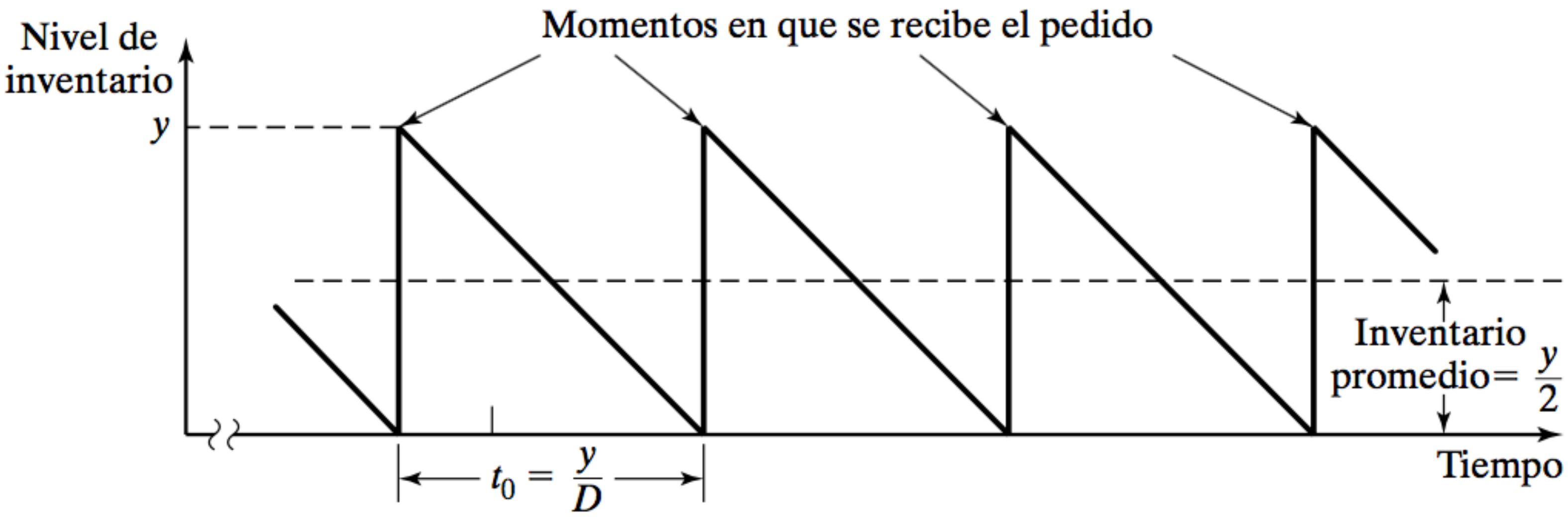
Existen tres variaciones del modelo de cantidad económica de pedido (CEP, o EOQ, del inglés *economic order quantity*) con demanda estática.

- **Modelo clásico de cantidad económica de pedido**
- **Cantidad económica de pedido con discontinuidades de precio**
- **Cantidad económica de pedido de varios artículos con limitación de almacén**

### Modelo clásico de cantidad económica de pedido

El más sencillo de los modelos de inventario implica una tasa constante de demanda con el surtido instantáneo del pedido y sin faltante. Se definen

$$y = \text{Cantidad pedida (cantidad de unidades)}$$
$$D = \text{Tasa de demanda (unidades por unidad de tiempo)}$$
$$t_0 = \text{Duración del ciclo de pedido (unidades de tiempo)}$$



El nivel de inventario sigue el patrón de la figura. Cuando el inventario llega al valor cero, se coloca un pedido cuyo tamaño es $y$ unidades, y se recibe en forma instantánea. Después, la existencia se consume uniformemente a la tasa constante de demanda $D$. El ciclo de pedido para este comportamiento es:

$$t_0 = \frac{y}{D} \text{ unidades de tiempo}$$

El nivel promedio de inventario que resulta es

$$\text{Nivel promedio de inventario} = \frac{y}{2} \text{ unidades}$$

El modelo de costo requiere dos parámetros:

$K$ = Costo de preparación correspondiente a la colocación de un pedido (\$/pedido)

$h$ = Costo de almacenamiento (\$ por unidad en inventario por unidad de tiempo)

El costo total *por unidad de tiempo* (TCU, de *total cost per unit time*) se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}\text{TCU}(y) &= \text{Costo de preparación por unidad de tiempo} + \text{Costo de almacenamiento por unidad de tiempo} \\ &= \frac{\text{Costo de preparación} + \text{Costo de almacenamiento por ciclo } t_0}{t_0} \\ &= \frac{K + h\left(\frac{y}{2}\right)t_0}{t_0} \\ &= \frac{K}{\left(\frac{y}{D}\right)} + h\left(\frac{y}{2}\right)\end{aligned}$$

El valor óptimo de la cantidad de pedido $y$ se determina minimizando TCU($y$) con respecto a $y$. Suponiendo que $y$ sea continua, una condición necesaria para determinar el valor óptimo de $y$ es

$$\frac{d\,\mathrm{TCU}(y)}{dy} = -\frac{KD}{y^2} + \frac{h}{2} = 0$$

Esta condición también es suficiente, porque TCU($y$) es convexa.

La solución de la ecuación da como resultado la siguiente cantidad económica de pedido, $y^*$:

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

Así, la política óptima de inventario para el modelo propuesto se resume como sigue:

$$\textit{Pedir } y^* = \sqrt{\tfrac{2KD}{h}} \textit{ unidades cada } t_0^* = \tfrac{y^*}{D} \textit{ unidades de tiempo}$$

No siempre el pedio se realiza en el momento en que ya no hay existencias, este puede Realizarse antes de que ya no hayan existencias, a este tiempo que se tarda en llegar las existencias podemos llamarle L

Se definirá el tiempo *efectivo* de entrega como sigue:

$$L_e = L - nt_0^*$$

donde $n$ es el entero mayor no mayor que $\frac{L}{t_0^*}$. Este resultado se justifica, porque después de $n$ ciclos de $t_0^*$ cada uno, el estado del inventario es como si el intervalo entre colocar un pedido y recibir otro es $L_e$. Así, el punto de reorden está en las $L_eD$ unidades, y la política de inventario se puede reenunciar como sigue:

*Pedir la cantidad $y^*$ siempre que la cantidad de inventario baja a $L_eD$ unidades*

## Ejemplo:

Se cambian luces de neón en el campus de la U de A a una tasa de 100 unidades diarias. Estas luces de neón se piden en forma periódica. Cuesta \$100 iniciar una orden de compra. Se estima que una luz de neón en el almacén cuesta unos \$0.02 diarios. El tiempo de entrega, entre la colocación y la recepción de un pedido es de 12 días. Determine la política óptima de inventario para pedir las luces de neón.

De acuerdo con los datos de este problema,

$$
\begin{aligned}
D &= 100 \text{ unidades por día} \\
K &= \$100 \text{ por pedido} \\
h &= \$0.02 \text{ por unidad y por día} \\
L &= 12 \text{ días}
\end{aligned}
$$

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times \$100 \times 100}{0.02}} = 1000 \text{ luces de neón}$$

La longitud del ciclo correspondiente es

$$t_0^* = \tfrac{y^*}{D} = \tfrac{1000}{100} = 10 \text{ días}$$

Como el tiempo de entrega $L = 12$ días es mayor que la longitud del ciclo $t_0^*$ $(= 10$ días), se debe calcular $L_e$. La cantidad de ciclos incluidos en $L$ es

$$\begin{aligned} n &= (\text{Entero mayor} \leq \tfrac{L}{t_0^*}) \\ &= (\text{Entero mayor} \leq \tfrac{12}{10}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Entonces

$$L_e = L - nt_0^* = 12 - 1 \times 10 = 2 \text{ días}$$

Entonces, el punto de reorden se presenta cuando la cantidad de inventario baja a

$$L_e D = 2 \times 100 = 200 \text{ luces de neón}$$

La política de inventario para pedir las luces de neón es

*Pedir 1000 unidades cuando el inventario baja a 200 unidades*

El costo diario de inventario correspondiente a la política propuesta es

$$\begin{aligned} \text{TCU}(y) &= \frac{K}{\left(\frac{y}{D}\right)} + h\left(\frac{y}{2}\right) \\ &= \frac{\$100}{\left(\frac{1000}{100}\right)} + \$0.02\left(\frac{1000}{2}\right) = \$20 \text{ por día} \end{aligned}$$

## Ejercicio 01:

McBurger pide carne molida al comenzar cada semana, para cubrir la demanda semanal de 300 lb. El costo fijo por pedido es de \$20. Cuesta unos \$0.03 por libra y por día refrigerar y almacenar la carne.

**a)** Determine el costo semanal de inventario para la política actual de pedidos.

**b)** Determine la política óptima de inventario que debería usar McBurger, suponiendo tiempo de entrega cero entre la colocación y la recepción de un pedido.

**c)** Determine la diferencia de costos semanales entre las políticas actual y óptima de pedidos.

## Ejercicio 02:

El departamento de compras de una empresa propuso dos políticas de inventario:

**Política 1.** Pedir 150 unidades. El punto de reorden es de 50 unidades, y el tiempo entre la colocación de un pedido y la recepción del siguiente es de 10 días.

**Política 2.** Pedir 200 unidades. El punto de reorden es de 75 unidades y el tiempo entre la colocación de un pedido y la recepción del siguiente es de 15 días.

El costo de preparación por pedido es de $20, y el costo de almacenamiento por unidad de inventario y por día es de $0.02.

**a)** ¿Cuál de las dos políticas debería adoptar la empresa?

**b)** Si a usted le encargaran diseñar una política de inventario para la empresa, ¿qué recomendaría suponiendo que el proveedor necesita un tiempo de entrega de 22 días?