Principio de Inclusión-Exclusión

(**Principio de inclusión-exclusión**): El principio de inclusión-exclusión, es una generalización de la propiedad

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

para dos eventos $A, B \subset \Omega$. Esto es equivalente a un resultado de la teoria de conjuntos

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

donde la notación $|A|$ significa el número de elementos contenidos en el conjunto A.

► Sean $A_1, A_2, \dots, A_n$ eventos donde $n \geq 2$ se cumple que

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \sum_{i<j<k<l} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + \cdots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).$$

donde $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega$. Esto es equivalente a un resultado de la teoria de conjuntos

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \sum_{i<j<k<l} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| + \cdots + (-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n|$$

Para la prueba, supongamos que un punto está contenido exactamente en m de los conjuntos $A_1, A_2, \dots A_n$, donde m es un número entre 1 y n. Entonces el punto es contado m veces en $\sum_{i=1}^{n} |A_i|$, es contado $C(m, 2)$ veces en $\sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$, es contado $C(m, 3)$ veces en $\sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k|$, etc.
La notación $C(m, k)$ significa el número de maneras de escoger un conjunto de k objetos desde un conjunto de m objetos, sin repetición.

Después de alcanzar $\sum_{i_1<i_2<\cdots i_m} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m}|$, donde el punto es contado una vez (desde que $C(m, m) = 1$), se encuentra que el punto no es contado en absoluto, en cualquiera que implique la intersección de más de m conjuntos.

El resultado aquí es que un punto que está contenido en exactamente m de los conjuntos se contará S veces en $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$, como en la ecuación anterior, donde S tiene la forma de

$$S \equiv C(m, 1) - C(m, 2) + C(m, 3) - C(m, 4) + \cdots + (-1)^{m+1}C(m, m).$$

Para calcular S, recordamos el teorema binomial

$$(x + y)^m = \sum_{k=0}^{m} C(m, k)x^k y^{m-k}, \text{ donde } C(m, k) = \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

Poniendo $x = 1$ y $y = -1$ en la ecuación anterior, tenemos $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C(m, k) = 0$

Usando $C(m, 0) = 1$, se sigue que

$$1 - C(m, 1) + C(m, 2) - C(m, 3) + \cdots + (-1)^m C(m, m) = 0$$

Lo cual implica que $S = 1$. Esto implica que cada punto contenido en la unión de $A_1, A_2, \dots A_n$ es contado exactamente una vez. Así queda demostrado el resultado.