Ejercicios de Probabilidades y Estadística

Curso: Introducción a la Estadística y Probabilidades CM-274

Temas: Espacio Muestral, Propiedades de la Función Probabilidad, Probabilidad Condicional, Teorema de Bayes, Teorema de la Probabilidad Total, Variables Aleatorias : Discretas y Continuas.

Espacio Muestral

En los siguientes ejercicios, Ω es un conjunto y $\mathcal{F}$ es el espacio de eventos de subconjuntos de Ω.

1. Si $A, B \in \mathcal{F}$, muestra que $A \cap B \in \mathcal{F}$.
2. La *diferencia* A/B de dos conjuntos A y B de Ω es el conjunto $A \cap (\Omega/B)$ de todos los puntos de Ω, los cuales están A, pero no en B. Prueba que si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A/B \in \mathcal{F}$.
3. La *diferencia simétrica* $A \triangle B$ de dos conjuntos A y B de Ω es el conjunto de puntos de Ω que están en A o en B pero no en ambos. Prueba que si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \triangle B \in \mathcal{F}$.
4. Si $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{F}$ y k un entero positivo, muestra que el conjunto de puntos en Ω, los cuales pertenecen a k de los A_i pertenece a $\mathcal{F}$ (en el ejercicio anterior es el caso cuando $m = 2$ y $k = 1$).
5. Demuestra que, si Ω es un conjunto finito, entonces $\mathcal{F}$ contiene un número par de subconjuntos de Ω.

Función Probabilidad

1. Sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ un conjunto de N puntos y sea $\mathcal{F}$ el conjunto potencia de Ω, Verifica que la función $\mathbb{P}$ definida por
$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{N}|A|, \quad A \in \mathcal{F}.$$
es una función de Probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$.
2. Sean $p_1, p_2, \ldots, p_n$ números no negativos tal que $p_1 + p_2 + \cdots + p_N = 1$ y sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ con $\mathcal{F}$ como conjunto potencia de Ω, como en el ítem anterior. Muestra que la función $\mathbb{Q}$ dada por
$$\mathbb{Q}(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i \quad \text{para } A \in \mathcal{F}.$$
es una función de Probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. Es $\mathbb{Q}$ una función de Probabilidad , si $\mathcal{F}$ no es el conjunto potencia de ω, sino solamente algún espacio de eventos de subconjuntos de Ω?.
3. Si $A, B \in \mathcal{F}$, muestra que $\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
4. Si $A, B, C \in \mathcal{F}$, muestra que
$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

5. Sean A, B, C tres eventos tales que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{5}{10}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{7}{10}, \quad \mathbb{P}(C) = \frac{6}{10}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{10}, \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{4}{10}, \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{2}{10}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{10}$$

   Encuentra la probabilidad que exactamente dos de los eventos A, B, C ocurren.

6. Una moneda se lanza 10 veces (de modo que las caras aparecen con probabilidad $\frac{1}{2}$ en cada lanzamiento). Describe el espacio de probabilidad adecuado en detalle para los dos casos cuando

   - el resultado de cada lanzamiento es de interés.
   - solo el número de cruces es de intereś.

Espacio Muestral Discreto

1. Muestra que si una moneda se lanza n veces, entonces hay exactamente

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

   secuencias de posibles resultados en los que se obtienen exactamente k caras . Si la moneda es justa (la salida de caras y cruz son igualmente probables en cada lanzamiento), muestra que la probabilidad de que salga al menos k caras es

$$\frac{1}{2^n} \sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r}$$

2. Distribuimos r bolas distinguibles en n celdas al azar, siendo permitido la ocupacion multiple. Muestra que

   - hay n^r posibles disposiciones.
   - hay $\binom{r}{k}(n-1)^{r-k}$ disposiciones en el cual, la primera celda contiene k bolas.
   - la probabilidad que la primera celda contenga exactamente k bolas es

$$\binom{r}{k} \left(\frac{1}{n}^{k}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{r-k}.$$

3. Demuestre que la probabilidad de que dos manos dadas en un juego de Bridge contengan k ases entre ellos sea

$$\binom{4}{k} \binom{48}{26-k} \Big/ \binom{52}{26}.$$

4. Demuestre que la probabilidad de que en una mano en un juego de Bridge, contenga 6 espadas, 3 corazones, 2 diamantes y 2 tréboles es

$$\binom{13}{6} \binom{13}{3} \binom{13}{2}^2 \Big/ \binom{52}{13}.$$

5. En un juego de bridge, las 52 cartas de un paquete convencional se distribuyen al azar entre cuatro jugadores de tal manera que cada jugador recibe 13 cartas. Demuestra que la probabilidad de que cada jugador recibe un as es

$$\frac{24 \cdot 48! \cdot 13^4}{52!}$$