Ejercicios de Probabilidades y Estadística

Curso: Introducción a la Estadística y Probabilidades CM-274

Temas: Probabilidad Condicional, Teorema de Bayes, Teorema de la Probabilidad Total, Independencia, Otros Ejercicios.

Probabilidad Condicional

1. Se tira un par de dados no cargados 1 vez y se establece que los 2 números que aparecen no son los mismos. Calcula la probabilidad de que la suma sea 7 o que la suma sea 4 o que la suma sea 12.
2. Se selecciona al azar dos bolas sin reemplazo de una urna que contiene 4 blancas y 8 negras.
   - Calcula la probabilidad de que ambas sean blancas.
   - Calcula la probabilidad de que la segunda bola sea blanca.
3. Un lote de cien artículos es inspeccionado, probando cuatro artículos seleccionados al azar. Si uno de los cuatro es defectuoso, el lote se rechaza. ¿ Cuál es la probabilidad de que un lote sea aceptado si contiene cinco unidades defectuosas?.
4. Una caja contiene 4 focos defectuosos y 16 focos en buen estado. Una segunda caja contiene un foco defectuoso y uno en buen estado. Se tira un dado no cargado una sola vez. Si sale un 1 o un 2 entonces se saca al azar un foco de la primera caja; de lo contrario, se selecciona un foco de la segunda caja. ¿ Cuál es la probabilidad de que el foco seleccionado esté defectuoso?.
5. Sean A y B dos eventos. Prueba que $\mathbb{P}(A \cap B|B) = \mathbb{P}(A|B)$, asumiendo que $\mathbb{P}(B) > 0$.
6. Tenemos tres monedas: una tiene cara en ambas lados, la segunda tiene cruz en ambos lados, y la tercera tiene cara en un lado y una cruz en la otra. Elegimos una moneda al azar, tiramos, y el resultado es cara. ¿Cuál es la probabilidad de que el lado opuesto sea cruz?.
7. Se lanza una moneda dos veces, Alicia afirma que en el evento de salir dos caras es al menos tan probable, si sabemos que el primer lanzamiento sale cara, que si sabemos que al menos uno de los lanzamientos resulta cara. ¿Es cierto eso?, ¿Hay alguna diferencia si la moneda es justa o injusta?, ¿Cómo podemos generalizar el razonamiento de Alicia?.

Teorema de la Probabilidad Total, Regla de Bayes

1. Dos jugadores se turnan para retirar una pelota de un frasco que contiene inicialmente m pelotas blancas y n pelotas negras. El primer jugador que retire una pelota blanca gana. Desarrolla una fórmula recursiva que permite el cálculo conveniente de la probabilidad de que el jugador que empiece gane.
2. Elizabeth busca un artículo científico en su archivador, que tiene varias cajones. Ella sabe que dejó ese papel en el cajón j con una probabilidad $p_j > O$. Los cajones están tan desordenado que incluso si ella correctamente adivina que el artículo está en el cajón i, la probabilidad de que ella lo encuentre es sólo d_i. Elizabeth busca en un cajón particular, por ejemplo, el cajón i, pero la búsqueda no tiene éxito. Condicionado a este evento, muestra que la probabilidad de que el artículo que busca está en el cajón j, está dada por

$$\frac{p_j}{1 - p_i d_i} \quad \text{si} \quad j \neq i \qquad \frac{p_i(1 - d_i)}{1 - p_i d_i} \quad \text{si} \quad j = i.$$

3. Cada uno de los k frascos contiene m bolas blancas y n bolas negras. Una bola se elige al azar del frasco 1 y se transfiere al frasco 2, a continuación, una bola se elige al azar del frasco 2 y se transfiere al frasco 3, etc. Por último, una bola se elige al azar desde el frasco k. Demuestra que la probabilidad de que la última bola es blanca es la misma que la probabilidad de que la primera bola es de color blanco, es decir, $m/(m+n)$.

4. **Versión Condicional del Teorema de la Probabilidad Total** Sean $C_1, \ldots, C_n$ eventos disjuntos que forman una partición del espacio muestral. Sean también A y B dos eventos tal que $\mathbb{P}(B \cap C_i) > 0$ para todo i. Muestra que

$$\mathbb{P}(A|B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(C_i|B)\mathbb{P}(A|B \cap C_i)$$

5. Se supone que 95 es la probabilidad de que un jurado seleccionado para juzgar un caso criminal emita el veredicto adecuado. Esto significa que si se presenta a juicio un individuo culpable, la probabilidad de que el jurado lo condene es de .95, y recíprocamente: si el individuo juzgado es inocente, la probabilidad de que el jurado lo absuelva es de .95. Se supone también que el cuerpo de la policia local realiza su labor a conciencia, de manera que el 99% de las personas que se presentan en la corte para ser juzgadas son verdaderamente culpables. Se pide calcular la probabilidad de que el acusado sea inocente, si el jurado lo encuentra inocente.

6. Alicia y César tienen $2n+1$ monedas, cada moneda tiene una probabilidad de salir cara igual a $1/2$. César lanza $n+1$ monedas, mientras que Alicia lanza las n monedas restantes. Suponiendo que los lanzamientos de monedas son independientes, muestra que la probabilidad de que después de que todas las monedas se han lanzado, César habrá conseguido más caras que Alicia es un $1/2$.

7. Te dan dos sobres, y sabes que cada uno contiene una cantidad positiva dolares y que las dos cantidades son diferentes. Los valores de estas dos cantidades se modelan como constantes que son desconocidas. Sin saber las cantidades, se selecciona al azar uno de los dos sobres, y después de ver la cantidad en el interior, es posible cambiar los sobres si lo deseas. Un amigo dice que la siguiente estrategia incrementará por encima de $1/2$ la probabilidad de tener el sobre con la cantidad más grande, esta es: lanzar una moneda repetidamente, sea X igual a $1/2$ más el número de lanzamientos necesarios para obtener cara por primera vez, y cambiar si la cantidad en el sobre que ha seleccionado es menor que el valor de X. ¿Es correcto lo que dice tu amigo?.

Independencia

1. Sea $\Omega = \{1, 2, \ldots, p\}$ donde p es primo, sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todos subconjuntos de Ω y $\mathbb{P}(A) = |A|/p$ para todo $A \in \mathcal{F}$. Muestra que si A y B son eventos independientes, entonces al menos uno de los dos eventos es $\emptyset$ o Ω.

2. Sean A y B eventos independientes. Usa la definición de independencia para probar lo siguiente

   - Los eventos A y B^c son independientes.
   - Los eventos A^c y B^c son independientes.

3. Una clase ha tenido una historial de baja asistencia. El profesor molesto decide que no va a dar una conferencia si al menos k de los estudiantes matriculados en la clase están presentes. Cada estudiante irá a clase de forma independiente con probabilidad p_g si el tiempo es bueno, y con probabilidad p_b, si el tiempo es malo. Dada la probabilidad del mal tiempo en un día determinado, obtiene una expresión para la probabilidad de que el profesor va a enseñar su clase ese día.

4. Considere la posibilidad de una moneda que sale cara con probabilidad p y cruz con una probabilidad $1-p$. Sea q_n la probabilidad de que después de n lanzamientos independientes, ha habido un número par de caras. Deriva una recursión que relaciona qn a qn con q_{n-1} y resolver esta recursión para establecer la siguiente fórmula

$$q_n = (1 + (1-2p)^n)/2.$$

5. Un sistema consta de n componentes idénticos, cada uno de los cuales está operativo con una probabilidad p, independientemente de los otros componentes. El sistema está operativo si al menos k de los n componentes son operativos. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema está en funcionamiento?.

6. **Lema de Borel-Cantelli** Considere una secuencia infinita de pruebas. La probabilidad de éxito en la i-ésima prueba es algún número positivo p_i. Sea N el evento que no hay éxito y sea el evento I en que hay un número infinito de éxitos.

   - Asumiendo que las pruebas son independientes y que $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \infty$. Muestra que $\mathbb{P}(N) = 0$ y $\mathbb{P}(I) = 1$.
   - Muestra que $\mathbb{P}(I) = 0$, asumiendo que $\sum_{i=1}^{\infty} p_i < \infty$.

7. Un jugador hace una secuencia de apuestas independientes. En cada apuesta, gana 1 dolar con probabilidad p, y pierde 1 dolar con probabilidad $1 - p$. Inicialmente, el jugador tiene k dolares, y juega hasta que acumula n o le falte dinero. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador va a terminar con n dolares?.

Otros Ejercicios

1. Prueba la identidad

$$A \cup (\cap_{n=1}^{\infty} B_n) = \cap_{n=1}^{\infty} (A \cup B_n).$$

2. Muestra que el intervalo unitario $[0, 1]$ es no contable, esto es, sus elementos no pueden ser ordenados en una secuencia.

3. Un dado de seis caras es rodado tres veces de forma independiente. ¿Que es más probable: una suma de 11 o una suma de 12?.

4. Considera n las personas que asisten a una fiesta. Si suponemos que todas las personas tienen la misma probabilidad de haber nacido en un día durante el año, independientemente de todos los demás, e ignorando la complicación adicional presentada por los años bisiestos (asume que nadie ha nacido el 29 de febrero). ¿Cuál es la probabilidad de que cada persona tiene una cumpleaños distinto?.

5. **Probabilidad Hipergeométrica** Una urna contiene pelotitas, de las cuales m son rojas. Seleccionamos k de las bolas al azar, *sin reemplazo* (las pelotitas seleccionadas no son puestas de nuevo en la urna antes de la próxima elección). ¿Cuál es la probabilidad de que i de las pelotitas seleccionadas sean rojas?.

6. Noventa estudiantes, incluyendo a Juan y Josefina, se van a dividir en tres clases de igual tamaño, y esto se hace al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que Juan y Jaosefina terminan en la misma clase?.

7. Ocho torres se colocan en distintas lugares de un tablero de ajedrez de 8×8, con todas las ubicaciones posibles igualmente probables. Encuentra la probabilidad de que todos las torres estan seguras el uno del otro, es decir, que no hay ninguna fila o columna con más de una torre.