Introducción a la Estadística y Probabilidades CM-274

Teoria de la Probabilidad

Probabilidad es el lenguaje para cuantificar la incertidumbre.

Espacio Muestral y Eventos

El espacio muestral Ω es el conjunto de todos los resultados del experimento. Puntos ω en Ω son llamados *elementos, realizaciones o resultados muestrales*. Subconjuntos de Ω son llamados **Eventos**.

1. **Ejemplo** Si lanzamos una moneda dos veces, entonces $\Omega = \{SS, SC, CS, CC\}$. El evento que la primera cara es obtenida en los lanzamientos es $A = \{CS, CC\}$.

2. **Ejemplo** Sea ω el resultado de la medición de alguna cantidad física, por ejemplo, la Temperatura, entonces $\Omega = \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$. El evento en que la medida es mayor que 10 pero menos o igual a 23 es $A = (10, 23]$.

3. **Ejemplo** Si lanzamos una moneda por siempre, entonces el espacio muestral es infinito

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots,) : \omega_i \in \{C, S\}\}$$

Sea E el evento en que la primera cara aparece en el tercer lanzamiento. Entonces

$$E = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots,) : \omega_1 = S, \omega_2 = S, \omega_3 = S, \omega_i \in \{C, S\} \text{ para } i > 3\}.$$

En particular el conjunto vacio $\emptyset$ y el espacio muestra Ω son eventos. El código R, siguiente, muestra todos los posibles eventos de un experimento con $\Omega = \{a, b, c\}$.

```
> Omega  = set("a", "b", "c")
> # mostramos un conjunto con todos los posibles
> # eventos de un experimento  en un espacio muestral Omega
> 2^Omega

{{}, {"a"}, {"b"}, {"c"}, {"a", "b"}, {"a", "c"}, {"b", "c"}, {"a", "b", "c"}}
```

Dado un evento A, sea $A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$, denota el complemento de A. Informalmente, A^c se lee como *'no A'*. El complemento de Ω es el conjunto vacio $\emptyset$. La unión de eventos A y B es definido como

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \ \ o \ \ \omega \in B \ \ o \ \ \omega \ \text{ en ambos}\}$$

Lo que se puede pensar como *'A o B'*. Si $A_1, A_2, \ldots$ es una secuencia de conjuntos entonces

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega \in \omega : \omega \in A_i, \quad \text{para al menos un i}\}.$$

La intersección de A y B es

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \ \ y \ \ \omega \in B\}$$

que se lee $'A\ y\ B'$. Si $A_1, A_2, \ldots$ es una secuencia de conjuntos entonces

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega \in \omega : \omega \in A_i, \quad \text{para todo i}\}.$$

El conjunto diferencia, definido como $A - B = \{\omega : \omega \in A, \omega \notin B\}$. Si cada elemento de A es contenido en B, se escribe $A \subset B$. Si A es un conjunto finito, $|A|$ denota el número de elementos en A.

Decimos que $A_1, A_2 \ldots$ son disjuntos si $A_i \cap A_j = \emptyset$ siempre que $i \neq j$. Una partición de ω es una secuencia de conjuntos disjuntos $A_1, A_2, \ldots$ tal que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$. Dado un evento A, se define la **función indicador de A** dado por

$$I_A(\omega) = I(\omega \in A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

Una secuencia de conjuntos $A_1, A_2, \ldots$ es monótona creciente si $A_1 \subset A_2 \cdots$ y definimos $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Una secuencia de conjuntos $A_1, A_2, \ldots$ es monótona decreciente si $A_1 \supset A_2 \cdots$ y definimos $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. Para ambos casos escribimos $A_n \to A$.

Ejemplo Sea $\Omega = \mathbf{R}$ y sea $A_i = [0, 1/i)$ para $i = 1, 2, \ldots$. Entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = [0, 1)$ y $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$. Si en lugar de eso definimos $A_i = (0, 1/i)$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (0, 1)$ y $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$.

Probabilidad

Asignamos un número $P(A)$ para cada evento A, llamada probabilidad de A. Para calificar como probabilidad P debe satisfacer los tres axiomas:

Definición Una función P que asigna un número real $P(A)$ para cada evento A es una *función de probabilidad* o *medida de probabilidad* si satisface los tres axiomas

1. $P(A) \geq 0, \quad \text{para cada} \quad A.$
2. $P(\Omega) = 1.$
3. Si $A_1, A_2, \ldots$ son disjuntos, entonces

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Podemos derivar algunas propiedades de P desde los anteriores axiomas.

1. $P(\emptyset) = 0.$
2. $A \subset B \to P(A) \leq P(B).$
3. $0 \leq P(A) \leq 1.$
4. $P(A^c) = 1 - P(A).$
5. $A \cap B = \emptyset \to P(A \cup B) = P(A) + P(B).$

Podemos usar R, para demostrar una propiedad de la Probabilidad, definida en $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ usando $p_1 = 1/2, p_2 = 1/4, p_3 = p_4 = 1/8$.

```
> # Espacio muestral
> Omega = c(1, 2, 3, 4)
> # probabilidades de  4 eventos
> p = c(1/2, 1/4, 1/8, 1/8)
> # ellos suman 1
> sum(p)

[1] 1
```

Más propiedades de la Probabilidad, pueden ser encontradas usando el paquete **sets** de R: `http://cran.r-project.org/web/packages/sets/index.html`.

Propiedades Importantes de la Probabilidad

Aditividad finita de la Probabilidad Para cada secuencia $A_1, \ldots A_n$ de eventos disjuntos dos a dos $(A_i \cap A_j) = \emptyset$ siempre que $i \neq j$), entonces

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots P(A_n).$$

Principio de Inclusión -Exclusión Para dos eventos A y B,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Teorema (Continuidad de la Probabilidad) Si $A_n \to A$ entonces

$$P(A_n) \to P(A) \qquad \text{si } n \to \infty$$

Ejemplo Dos lanzamiento de moneda. Sea H_1 el evento que sale cara en el primer lanzamiento y sea H_2 el evento que ocurra cara en el segundo lanzamiento. Si todas los lanzamientos son igual de probables, entonces $P(H_1 \cup H_2) = P(H_1) + P(H_2) - P(H_1 \cap H_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 3/4$.

Ejemplo Un sistema de una computadora usa passwords que son 5 caracteres y cada caracter es una de las 26 letras (a-z) o 10 enteros (0-9). El primer caracter tiene que ser una letra. Determina la proporción de passwords que

1. inician con una consonante.
2. terminan con un número par $(0, 2, 4, 6, 8)$.
3. inicia con una consonante o termina con un número par.

- Suponiendo que el sistema de la computadora usa passwords que no distinguen las mayúsculas y las minúsculas. Sea A el evento en el cuál el password empieza con una consonante. Hay 21 consonantes, entonces $P(A) = 21/26$. Aquí el denominador es 26, ya que todas las letras son posibles en el passwords.
- Sea B ele evento que los passwords terminan en un número par $(0, 2, 4, 6, 8)$. Entonces $P(B) = 5/36$. Aquí el denominador es 36, ya que todas las letras del alfabeto son 26 y 10 enteros son posibles en el passwords.
- La propiedad de inclusión e exclusión, dice que la probabilidad de A o B es

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Para calcular $P(A \cap B)$, la probabilidad que un password, inicie con una consonante y termine en un número par, calculamos el número posible de passwords. El primer carácter puede ser cualquiera de las 26 letras del alfabeto, y cada uno de los siguientes caracteres puede ser cualquiera de las 26 letras, así como cualquiera de los 10 números enteros, esto es 36 posibilidades en total. Así que el número posible de passwords es $(26)(36^4)$.

Ahora hay 21 maneras de empezar con una consonante y 5 maneras de terminar en un número par, así que el número posible de passwords que empiezan en una vocal y terminan en un número impar es $(21)(36^3)(5)$.

Por tanto

$$P(A \cap B) = \frac{(21)(36^3)(5)}{(26)(36^4} = \left(\frac{21}{26}\right)\left(\frac{5}{36}\right).$$

Usando el principio de inclusión e inclusión que empieza con una vocal o termina con un número par

$$P(A \cup B) = \frac{21}{26} + \frac{5}{36} - \left(\frac{21}{26}\right)\left(\frac{5}{36}\right).$$

En R

```
> 21/26 + 5/36 - (21/26)*(5/36)

[1] 0.8344017
```

esto significa que hay un 80% de posibilidad de seleccionar un passwords iniciando con una consonante y terminando en un número par.

Si Ω es finito y cada resultado del experimento, es igual de probable, entonces

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

que se conoce con el nombre de *Distribución de probabilidad uniforme*. Para calcular probabilidades, necesitamos contar el número de puntos en un evento A. Métodos para contar puntos son llamados **Métodos combinatorios**.

Nota Dado n objetos, el número de maneras de ordenar esos objetos es $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1$. Por conveniencia $0! = 1$. Definimos

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

y sea lee *'n escoge k'*, el cual es el número de elegir k objetos desde n de maneras distintas. Algunas propiedades básicas de esta definifición

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{1} = 1 \qquad y \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Ejemplo Calculemos el número de maneras de escoger 5 numeros de 40 y la probabilidad de que eso ocurra.

```
> prod(40:36)/prod(5:1)

[1] 658008

> 1/choose(40,5)

[1] 1.519738e-06
```

Ejemplo Si los passwords pueden consistir de 6 letras, encuentra la probabilidad que aleatoriamente un password, pueda ser elegido, que no tenga letras repetidas.

En este caso el número posible de passwords es 26^6 y el número casos favorables es $\binom{26}{6}$ y la probabilidad de escoger palabras no repetidas es $\frac{\binom{26}{6}}{26^6}$ y esto cálculo puede hacerse usando R

```
> prod(26:21)/26^6

[1] 0.5366045
```

Ejemplo Resolvamos los siguiente

1. En una fiesta de cinco estudiantes, calcular la probabilidad, que al menos dos tengan el mismo (dia/mes) de cumpleaños, asumiendo que el año tiene 365 dias.
2. La probabilidad que dos estudiantes en una clase tengan el mismo cumpleaños es al menos el 75%. ¿ Cuál es el mínimo tamaño de la clase?.

En efecto

$$
\begin{aligned}
\text{P (todos tiene diferentes cumpleaños)} &= \frac{\binom{36}{5}}{365^5}, \\
\text{P(Al menos dos tiene el mismo cumpleaños)} &= 1 - \frac{\binom{36}{5}}{365^5}.
\end{aligned}
$$

En R. a)

```
> k <- 5
> prod(365:(365-k+1))/365^k     # todos diferentes

[1] 0.9728644

> 1 -prod(365:(365-k+1))/365^k  # al menos dos cumplen el mismo dia

[1] 0.02713557
```

b) P(al menos 2 en el mismo k) $= 1 - \frac{\binom{365}{k}}{365^k}$. Escogemos un k tal que $1 - \frac{\binom{365}{k}}{365^k} \geq 0.75$. En efecto k se encuentra entre 30 y 40. Podemos inferir que k está muy cerca de 30.

```
> k<-30
> 1-prod(365:(365-k+1))/365^k  # al menos dos cumplen el mismo dia

[1] 0.7063162

> k<-31
> 1-prod(365:(365-k+1))/365^k  # al menos dos cumplen el mismo dia

[1] 0.7304546

> k<-32
> 1-prod(365:(365-k+1))/365^k  # al menos dos cumplen el mismo dia

[1] 0.7533475
```

El mínimo k es 32. Es necesario una clase de 32 o más para estar seguro que el 75% seguro, de que dos estudiantes tienen el mismo dia de cumpleaños.

Eventos independientes

Definición Dos eventos son independientes A y B son independientes si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Un conjunto de eventos $\{A_i : i \in I\}$ son independientes si

$$P\Big(\bigcap_{i\in J} A_i\Big) = \prod_{i\in J} P(A_i)$$

para cada subconjunto J de I.

La independencia puede surgir de dos maneras distintas. Algunas veces, asumimos que los eventos son independientes. Por ejemplo al lanzar una moneda dos veces, asumimos que los lanzamientos son indepedientes, lo que se 'traduce', en que las monedas 'no tienen memoria del primer lanzamiento'. En otro caso, derivamos la independencia verificando $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, sea $A = \{2, 4, 6\}$ y sea $B = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $A \cap B = \{2, 4\}$, $P(A \cap B) = 2/6 = P(A)P(B) = (1/2).(2/3)$ y así A y B son independientes.

Observación Supongamos que A y B son eventos disjuntos, cada uno con probabilidad positiva, pueden ser ellos independientes?. (Ejercicio).

Ejemplo Lanzamos una moneda 10 veces. Sea el evento $A =$ ' al menos una cara'. Sea T_j el evento que sellos ocurran en el j-ésimo lanzamiento. Entonces

$$\begin{aligned}
P(A) =& 1 - P(A^C) \\
=& 1 - P(\text{todos los sellos}) \\
=& 1 - P(T_1 T_2 \cdots T_{10}) \\
=& 1 - P(T_1)P(T_2)\cdots P(T_{10}) \text{ usando independencia} \\
=& 1 - (\frac{1}{2}^{10}) \approx .999.
\end{aligned}$$

En R

```
> round (1 -(1/2)^{10}, digits = 5)

[1] 0.99902
```

Ejemplo Sean dos personas que se turnan para encestar una pelota de baloncesto. La persona 1 tiene éxito con probabilidad 1/3, la persona2 tiene éxito con probabilidad 1/4. ¿ Cuál es la probabilidad de que la persona 1 tenga éxito antes de la persona 2?. Sea E el evento de interés. Sea A_j el evento en que el primer éxito es de la persona 1 y que se produce en el número j. Los conjuntos A_i son disjuntos y forman una partición para E, así

$$P(E) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$$

Ahora $P(A_1) = 1/3$. A_2 ocurre si tenemos la secuencia persona 1, pierde, persona 2, pierde y la persona 1 tiene éxito. Luego $P(A_2) = (2/3)(3/4)(1/3) = (1/2)(1/3)$. Siguiendo esa lógica tenemos que $P(A_j) = (1/2)^{j-1}(1/3)$. Así,

$$P(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{j-1} = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{j-1} = \frac{2}{3}.$$

Probabilidad Condicional

Asumiendo $P(B) > 0$, definimos la probabilidad condicional de A, dado que B a ocurrido como sigue

Definición Si $P(B) > 0$, entonces la probabilidad condicional de A, dado B es

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Piensa $P(A|B)$ como la fracción de veces que A ocurre entre aquellos en los que B ocurre. Para cualquier B fijo tal que $P(B) > 0, P(\cdot|B)$ es una probabilidad (es decir, que cumple los tres axiomas de probabilidad). En particular $P(A|B) \geq 0, P(\Omega|B) = 1$ y si $A_1, A_2, \ldots$ son disjuntos, entonces $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$. Pero esto no es cierto en general que $P(A|B \cup B) = P(A|B) + P(A|C)$. Las reglas de la probabilidad se aplican a los eventos de la izquierda de la barra. En general, no es el caso que $P(A|B) = P(B|A)$.

La gente confunde esto todo el tiempo. Por ejemplo, la probabilidad de que tengas puntos (manchas) dado que tienes sarampión es 1, pero la probabilidad de que tienes sarampión, dado que tienes puntos (manchas) no es 1. En este caso, la diferencia entre $P(A|B)$ y $P(B|A)$ es obvio, pero hay casos en los que es menos obvio. Este error se hace con bastante frecuencia en los casos legales que a veces se llama *falacia del fiscal*.

Ejemplo Un test médico para una enfermedad D tiene salidas + y -

Salidas	D	D^c
+	.009	0.099
-	.001	0.891

Desde la definición de probabilidad condicional,

$$P(+|D) = \frac{P(+ \cap D)}{P(D)} = \frac{.009}{.009 + .001} = .9$$

y

$$P(-|D^c) = \frac{P(- \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{.891}{.891 + .099} \approx .9$$

Al parecer, la prueba es bastante exacta. Personas enfermas producen un positivo del 90 por ciento de la veces y las personas sanas producen una negativa sobre 90 por ciento de las veces . Supongamos que una persona se hace una prueba y obtiene un resultado positivo. ¿ Cuál es la probabilidad de que esa persona tiene la enfermedad? La mayoría responde $0,90$, sin embargo la respuesta correcta es

$$P(D|+) = \frac{P(+ \cap D)}{P(+)} = \frac{.009}{.009 + .099} \approx .08$$

Lema Si A y B son eventos independientes, entonces $P(A|B) = P(A)$. También para algún par de eventos A y B

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

Ejemplo Se lanza dos cartas de una baraja, sin reemplazo. Sea A el evento de que el primera carta es el As de Tréboles y sea B el evento de que la segunda corta es la Reina de Diamantes. Entonces $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = (1/52) \times (1/51)$.

```
> (1/51) * (1/52)

[1] 0.0003770739
```

Ejemplo Una pequeña empresa de software emplea 4 programadores. El porcentaje de código escrito por cada programador y el porcentaje de errores en su código se muestran en la siguiente tabla.

Programador	% de código escrito	% de errores en código
1	15	5
2	20	3
3	25	2
4	40	1

Supongamos que se examina el código y se encontró que esta libre de errores. Después de esta prueba , ¿ cuál es la probabilidad de que fue escrito por el programador 1?. En efecto de la probabilidad condicional

$$P(\text{Prog1} \mid \text{no errores}) = \frac{P(\text{Prog1} \cap \text{error})}{P(\text{no errores})}$$
$$P(\text{Progr1} \cap \text{no errores}) = 0.15 * 0.95 = 0.1425$$

P(no errores)

```
> 0.15*0.95 + 0.20 *0.97 + 0.25 * 0.98 + 0.40 * 0.99

[1] 0.9775
```

$P(\text{Progr1} \cap \text{no errores}) = 0.1425/0.9775 = 0.1457428.$
$P(\text{Progr2} \cap \text{no errores})$

```
> 0.20*0.97/0.97775

[1] 0.1984147
```

$P(\text{Progr3} \cap \text{no errores})$

```
> 0.25*0.98/0.97775

[1] 0.2505753
```

$P(\text{Progr4} \cap \text{no errores})$

```
> 0.40*0.99/0.97775

[1] 0.4050115
```

Teorema de Bayes

Ley de la Probabilidad Total Sean $A_1, \ldots, A_k$ una partición de Ω. Entonces, para algún evento B,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B|A_i)P(A_i).$$

Teorema de Bayes Sean $A_1, \ldots, A_k$ una partición de Ω tal que $P(A_i) > 0$ para cada i. Si $P(B) > 0$, entonces para cada $i = 1, \ldots, k$,

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_j P(B|A_j)P(A_j)}.$$

Ejemplo Un mensaje de correo electrónico puede viajar a través de una de las tres rutas de un servidor. La probabilidad de transmisión de error en cada uno de los servidores y la proporción de mensajes que viajan en cada ruta se muestran en la siguiente tabla. Suponga que los servidores son independientes.

	% mensajes	% errores
Servidor 1	40	1
Servidor 2	25	2
Servidor 3	35	1.5

Determina el porcentaje de mensajes que contienen error

```
> # De la probabilidad total
> 0.4 * 0.01 + 0.25*0.02 + 0.35*0.15

[1] 0.0615
```

Ejemplo Un experimentador tienes dos urnas A y B a su disposición. La urna A (B) tiene ocho (diez) canicas verdes y doce(ocho) canicas azules, todas del mismo tamaño y peso. El experimentador selecciona una urna con igual probabilidad y escoge una canica al azar. Se anuncia que la canica seleccionada es azul. Encontremos la probabilidad de que esta canica provenga de la urna B.

Definamos los eventos

A_i: La urna i es seleccionada, $i = 1, 2$.
B : La canica escogida desde la urna seleccionada es azul.
Entonces $P(A_i) = \frac{1}{2}$ para $i = 1, 2$, mientras que $P(B|A_1) = \frac{12}{20}$ y $P(B|A_2) = \frac{8}{18}$. Ahora apliquemos el Teorema de Bayes,

$$P(A_2|B) = P(A_2)P(B|A_2)/\{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)\}$$

Reemplazando en R

```
> (1/2)*(8/18)/((1/2)*(12/20) + (1/2)*(8/18))

[1] 0.4255319
```

Muestreo Aleatorio

Uno de los conceptos en Probabilidades, es de *muestra aleatoria*, que se presenta en diversos aspectos, como la extracción de una carta desde una baraja. En R se puede simular esas situaciones con la función `sample`. Por ejemplo si tu quieres obtener 5 números de manera aleatoria, de un conjunto `1:40`, entonces podemos escribir

```
> sample(1:40, 5)

[1] 11 29  9  5 31
```

Debes notar que el comportamiento predeterminado de `sample` es el *muestreo sin reemplazo*. Es decir, las muestras no contienen el mismo número dos veces, y el tamaño, obviamente, no puede ser más grande que la longitud del vector a muestrear. Si deseas que el muestreo sea con reemplazo, entonces necesitas para agregar el argumento `replace = TRUE`.

El muestreo con reemplazo es adecuado para el modelado de lanzamientos de monedas o lanzamientos de un dado. Así, por ejemplo, para simular 12 veces el lanzamiento de una moneda podríamos escribir

```
> sample(c("H","T"), 12, replace=T)

 [1] "H" "T" "T" "H" "T" "T" "H" "T" "T" "T" "T" "T"
```

En el lanzamientos de monedas, la probabilidad de caras debe ser igual a la probabilidad de sellos, pero la idea de un evento al azar no se limita a los casos simétricos. Se podría igualmente aplicarse a otros casos, como el resultado exitoso de un procedimiento quirúrgico. Podemos simular datos con probabilidades no iguales para los resultados (por ejemplo, un 90% de probabilidades de éxito) utilizando el argumento `prob` a `sample`

```
> sample(c("exito", "fallo"), 10, replace=T, prob=c(0.9, 0.1))

 [1] "exito" "exito" "fallo" "exito" "exito" "fallo" "exito" "exito" "exito" "exito"
```

Ejemplo Simular el lanzamiento de una moneda puede ser hecho usando la función *rbinom* en lugar de *sample*. En efecto

```
> rbinom(10, 1, .5)

 [1] 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1
```

o de la siguiente manera

```
> ifelse(rbinom(10, 1, .5) == 1, "H", "T")

 [1] "T" "H" "T" "H" "T" "T" "H" "T" "H" "H"
```

```
> c("H", "T")[1 + rbinom(10, 1, .5)]

 [1] "H" "T" "H" "T" "H" "T" "H" "H" "H" "T"
```