11th grade

ANALISIS COMBINATORIO

Pensaminto numerico

Tipos de nanalis commbinatorio

01 Principios fundamentales de analisis combinatorio

02 Variaciones

03 Permutacion

04 Combinaciones

01

Principios fundamentales de analisis cobinatorio

Principio de la multiplucasion y de la adicion

Principio de la multiplicasion

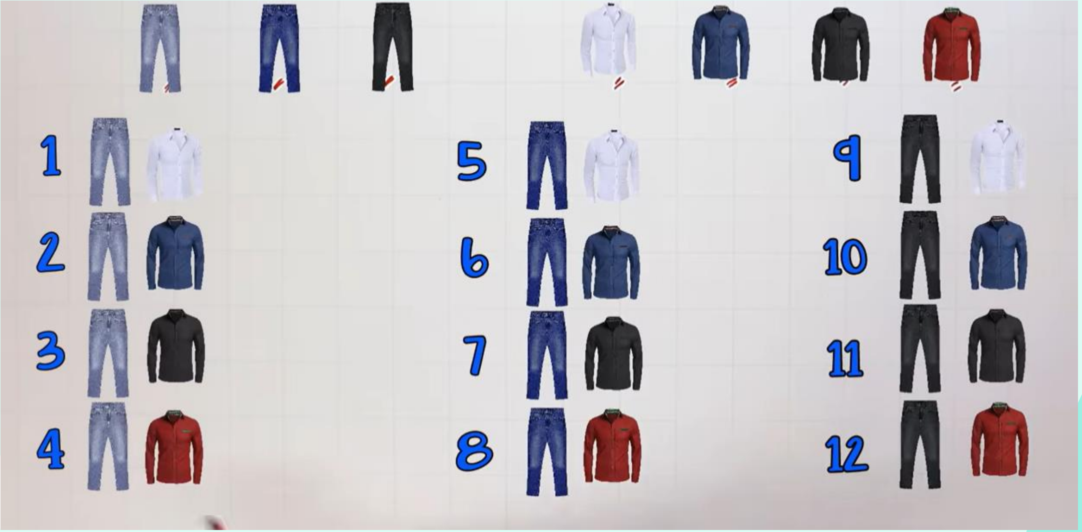
El principio de la multiplicación (producto), establece que, si un suceso se puede realizar de «m» formas diferentes y luego se puede realizar otro suceso de «n» formas diferentes, el número total de formas en que pueden ocurrir es igual a m x n.

Si un evento A se puede realizar de «m» formas diferentes y luego se puede realizar otro evento B de «n» formas diferentes, el número total de formas en que pueden ocurrir A y B es igual a m x n. Es decir, ambos eventos se realizan, primero uno y luego el otro. El «y» indica multiplicación.

Ejemplo

¿de cuántas formas se puede vestir una persona que tiene 3 pantalones y 4 camisas?

Para vestirse, la persona se pone el pantalón y luego la camisa, es decir tiene 3 x 4 = 12 opciones diferentes de vestirse.



Principio de la adicion

Si un evento «A» se puede realizar de «m» maneras diferentes, y otro evento «B» se puede realizar de «n» maneras diferentes, además, si ocurre uno no puede ocurrir el otro, entonces, el evento A o el evento B, se realizarán de (m)+(n) formas. Es decir, aquí ocurre A o ocurre B. El «o» indica suma.

Ejemplo

Supongamos que en tu armario tienes dos pantalones $P=\{P_1, P_2\}$, tres camisetas $C=\{C_1,C_2, C_3\}$ y dos abrigos $A=\{A_1, A_2\}$. Estás a oscuras, y necesitas una prenda, así que tomas una al azar. ¿De cuántas maneras diferentes puedes elegir una prenda?

Fíjate, que el problema no te dice ¿De cuántas maneras diferentes te puedes vestir? que sería cuestión a resolver con el principio de multiplicación; si no que te preguntas cuántas formas diferentes hay de elegir una única prenda al azar.

Para ello tenemos 2 formas diferentes de elegir un pantalón, tres maneras distintas de elegir una camiseta y dos abrigos, por lo tanto, el principio de adición nos asegura que

$$|P\cup C\cup A|=|P|+|C|+|A|=2+3+2=7$$

Por lo tanto, tienes 7 formas diferentes de elegir una prenda al azar.

02 Variaciones

Variaciones sin repetición y con repetición

Variación sin repetición

Sea A un conjunto de n elementos. Las variaciones de n elementos tomados de k en k son el número de grupos ordenados de elementos distintos de A, y se representa por $V\,n,k$

Ejemplo

Tomemos el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$. Primero de todo, observemos observar que, por ejemplo, los grupos abc y bca se consideran diferentes, ya que, aunque tienen las mismas letras $(a, b\ y\ c)$ no están en el mismo orden. Entonces:

- Las variaciones sin repetición de estos 5 elementos tomados de 1 en 1 son: $a, b, c, d, y\ e$
- Las variaciones sin repetición de estos 5 elementos tomados de 2 en 2 son: $ab, ba, ac, ca, ad, da, ae, ea, bc, cb, bd, db, be, ed, etc \dots$
- Las variaciones sin repetición de estos 5 elementos tomados de 3 en 3 son: $abc, acb, abd, adb, abe, aeb, bcd, cad, etc \dots$
- Las variaciones sin repetición de estos 5 elementos tomados de 4 en 4 son: $abcd, acbd, dacd, ebac, caed, etc \dots$
- Las variaciones sin repetición de estos 5 elementos tomados de 5 en 5 son: $abcde, abced, acbed, adbce, baced, bcdea, etc \dots$

Explicasion

Como se puede ver en el ejemplo anterior, para contar cuantas posibilidades hay en cada caso puede resultar muy difícil, ya que hay muchísimas. No obstante, se puede calcular rápidamente mediante la siguiente fórmula:

$$Vn,k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Donde n es el número de elementos que tiene el conjunto A, mientras que k es el número de elementos que tiene el grupo que se quiere construir

Ahora si se quiere saber cuántas variaciones sin repetición de estos 5 elementos tomados de 3 en 3 hay, usando la fórmula de tiene que son 60

$$V_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5*4*3*2*1}{2*1} = 60$$

VARIACIÓN CON REPETICIÓN

- Sea A un conjunto de n elementos. Las variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k son los grupos ordenados formados por k elementos de A (que pueden estar repetidos). Se representa por $VR_{n,k}$

Ejemplo

Si se tiene el conjunto de 5 elementos $A = \{a, b, c, d, e\}$:

- Las variaciones con repetición de estos 5 elementos tomados de 1 en 1 son: $\{a, b, c, d, y\ e\}$

- Las variaciones con repetición de estos 5 elementos tomados de 2 en 2 son: $ab, aa, ac, dc, cc, ee, ae, ea, bc, bb\ cd\ be\ etc \ldots$

- Las variaciones con repetición de estos 5 elementos tomados de 3 en 3 son: $abc, abb, acd, ccc, aba, dce, eed\ cda\ etc \ldots$

- Las variaciones con repetición de estos 5 elementos tomados de 4 en 4 son: $abbd, acdd, beac, eecc, dace\ etc \ldots$

- Las variaciones con repetición de estos 5 elementos tomados de 5 en 5 son: $absde, abbbc, aeded, daece, bcced, edcba\ etc \ldots$

Explicasion

La siguiente fórmula nos da una forma mucho más rápida de contar cuantas variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k hay:

$$VR_{n,k} = n^k$$

En el ejemplo anterior,

Se tiene que el número de variaciones con repetición de los 5 elementos de A tomados de 3 en 3 eso

$$VR_{5,3} = 5^3 = 5 * 5 * 5 = 125$$

Como se puede ver, ¡es mucho más práctico usar la fórmula que probar todas las posibilidades a mano!

03 Permutaciones

PERMUTACIÓN SIN REPETICIÓN, PERMUTACIÓN CON REPETICIÓN Y PERMUTACIÓN CIRCULAR

Permutación sin repetición

Las permutaciones sin repetición de n elementos son los distintos grupos de n elementos que se pueden hacer, de forma que dos grupos se diferencian únicamente en el orden de colocación de los elementos.

Ejemplo

Consideremos el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ Entonces las permutaciones de estos 5 elementos son:

$abcde, acbde, dbeca, adcea, bedac, cdbae, caebd, edabc, etc \ldots$

Explicasion

El número de permutaciones de n *elementos viene dado por la siguiente fórmula:* $P_n = n! = n * (n-1) * (n-2) \dots 2 * 1$

En el ejemplo anterior, se tiene que n*=5, y por lo tanto:* $P_5 = 5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$

Es decir, se pueden hacer 60 permutaciones de los elementos de $A = \{a, b, c, d, e\}$

Permutación con repetición

Las permutaciones con repetición de $\mathbf{n}$ elementos en las que el primer elemento se repite $\mathbf{n_1}$ veces, el segundo $\mathbf{n_2}$ veces, ... y el último se repite $\mathbf{n_r}$ veces, son los distintos grupos de $\mathbf{n}$ elementos que se pueden hacer de forma que, en cada grupo, cada elemento aparezca el número de veces indicado. Además, dos grupos se diferencian únicamente en el orden de la colocación. Se representa por $P_n^{n_1,\ldots,n_1}$.

Ejemplo

Queremos saber cuántos números de cinco cifras hay en las que el 2 aparezca una vez, el 7 dos veces y el 9 dos veces también. En este caso se tiene: $n_1 = 1, n_2 = 2$ y $n_3 = 2$.

Algunas posibilidades son:

27799, 72799, 92977, 92779, 77992, 72979...

pero hay muchas más, y para contarlas todas se podría tardar mucho tiempo.

No obstante, mediante la fórmula anterior se sabe rápidamente que el número de posibilidades es de 30:

Explicasion

Para saber cuántas permutaciones con repetición de **n** elementos, en las que el primer elemento se repite n_1 veces, el segundo n_2 veces, ... y el último se repite n_r veces, viene dado por la siguiente fórmula:

$$P_n^{n_1,\dots,n_1} = \frac{n!}{n_1!\dots n_r}$$

Permutación circular

La permutación circular, es un caso de permutación en el cual los elementos se ordenan en círculo. De modo que el primero elemento que se sitúa en el ordenamiento determina el principio y el final de la muestra.

Donde "n" es el número de elementos.
Hay 3 condiciones importantes que se cumplen en las permutaciones circulares:

Importa el orden.
Los elementos se ordenan en círculo.
Participan todos los elementos en los ordenamientos.

Los problemas clásicos de ordenamientos circulares nos preguntan de cuántas formas se pueden ordenar «n» elementos alrededor de una piedra circular, de una mesa circular, de una fogata, entre otros.

Ejemplo

¿de cuantas maneras se pueden sentar a 7 amigos alrededor de una mesa de forma circular?

$$PC_n = (n-1)!$$

$$PC_n = (7-1)! = 6! = 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 720$$

Los 7 amigos se pueden sentar de 720 formas diferentes

04 Combinaciones

COMBINACIONES CON REPETICIÓN Y SIN REPETICIÓN

Combinaciones con repetición

las combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k son los diferentes grupos de k elementos que se pueden formar a partir de estos n elementos, permitiendo que los elementos se repitan, y considerando que dos grupos se diferencian solamente si tienen elementos diferentes (es decir, no importa el orden). Se representan por $CR_{n,k}$.

Ejemplo

Consideramos el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ se tiene que las diferentes combinaciones con repetición de estos 5 elementos son:

Ejemplo

Combinaciones con repetición de 5 elementos tomados de 1 en 1: $a\,, b, c, d, y\; e$

Combinaciones con repetición de 5 elementos tomados de 2 en 2: Como antes, se tienen $ad, da, ac, ca, bc, bd, be, cd, ce, y\; de,$ pero ahora también se tienen los grupos con elementos repetidos: $aa, bb, cc, dd, y\; ee$

Combinaciones con repetición de 5 elementos tomados de 3 en 3: como antes, tenemos $abe, abc, abd, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, y, cde,$ pero ahora también se tienen los grupos con elementos repetidos: $aab, aac, aad, aae, bba, bbc, bbd, bbe, cca, aad, cce, dda, ddb, ddc\; y\; dde$

- Combinaciones con repetición de 5 elementos tomados de 4 en 4: como antes, se tienen $abcd, abce, abde, acde y\, bcde$, pero ahora también se tienen los grupos con elementos repetidos: $aaab, aaac, aaad, aacd, aade, bbba, bbbc, etc \ldots$

- Combinaciones con repetición de 5 elementos tomados de 5 en 5: A parte del que ya teníamos antes (que era a, b, c, d, e) ahora también se tienen los grupos con elementos repetidos: $aaaaa, aaaab, aaaac, aaaad, aaaae, aaabc, aaabd, aaabe, aaacd, aaace, aaade\ etc.., etc \ldots$

Como se puede ver en este ejemplo, ahora hay muchos más grupos posibles que antes. La siguiente fórmula nos dice cuántas combinaciones con repetición de n tomados de k en k hay:

$$CR_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)}{(n-1)!\,k!}$$

Explicasion

Se quiere saber cuántas combinaciones con repetición de 5 elementos tomados de 3 en 3 hay, usando la fórmula se obtiene que son 35:

$$CR_{5,3} = \binom{5+3-1}{3} = \frac{(5+3-1)}{(5-1)!\,3!} = \frac{7!}{4!\,3!} = 7 * 5 = 35$$

Combinaciones sin repetición

Las combinaciones sin repetición de n elementos tomados de k en k son los diferentes grupos de k elementos que se pueden formar a partir de estos n elementos, de modo que dos grupos se diferencian solamente si tienen elementos distintos (es decir, no importa el orden). Se representan por $C_{n,k}$.

Ejemplo

Consideremos el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ de 5 elementos. Observemos primero de todo que, por ejemplo, los grupos abc y cba se consideran iguales, ya que como se ha dicho no importa el orden mientras los elementos sean los mismos.

Vamos a ver cuáles son las diferentes combinaciones sin repetición de estos 5 elementos:

- Combinaciones sin repetición de 5 elementos tomando 1 de una sola vez: a, b, c, d y e
- Combinaciones sin repetición de 5 elementos tomando 2 de una sola vez: $ab, ac, ad, ae, dc, bd, be, cd, ce,$ y de
- Combinaciones sin repetición de 5 elementos tomando 3 de una sola vez: $abc, acd, ace, ade, bcd, bce, bde$ y cde
- Combinaciones sin repetición de 5 elementos tomando 4 de una sola vez: $abcd, abce, abde, acde$ y $bcde$.
- Combinaciones sin repetición de 5 elementos tomando 5 de una sola vez: El único grupo de 5 elementos que se puede formar a partir de los elementos de A es $abcde$

- Combinaciones sin repetición de 5 elementos tomando 1 de una sola vez: $a, b, c, d \text{ y } e$
- Combinaciones sin repetición de 5 elementos tomando 2 de una sola vez: $ab, ac, ad, ae, dc, bd, be, cd, ce, \text{y } de$
- Combinaciones sin repetición de 5 elementos tomando 3 de una sola vez: $abc, acd, ace, ade, bcd, bce, bde \text{ y } cde$
- Combinaciones sin repetición de 5 elementos tomando 4 de una sola vez: $abcd, abce, abde, acde \text{ y } bcde.$
- Combinaciones sin repetición de 5 elementos tomando 5 de una sola vez: El único grupo de 5 elementos que se puede formar a partir de los elementos de A es $abcde$

Ejemplo

- En este ejemplo se han podido escribir todos. No obstante, si A hubiera tenido muchos más elementos, esto sería mucho más complicado.
- La fórmula siguiente nos permite saber cuántas combinaciones sin repetición de n elementos tomados de k en k hay:
- $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Explicasion

- En el ejemplo anterior, se tiene que $n = 5$. Ahora, si se quiere saber cuántas combinaciones de 5 elementos, tomando 3 de una vez hay, se usa la fórmula y se obtiene:
- $C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!}$
-
- Se puede comprobar en la lista anterior que efectivamente hay 10 conjuntos de 3 elementos.
-

Gracias