Trabajo Práctico 1 de Simulación
Estudio de Modulaciones

Este trabajo práctico tiene por objetivo calcular y comparar los desempeños de las modulaciones típicas de dos maneras: analíticamente y numéricamente. Consideraremos las modulaciones PAM, QAM, PSK y FSK utilizando sus descripciones en banda base en el espacio de señales correspondiente. Es decir, en este trabajo *no* utilizaremos las formas de onda temporales de las señales.

Consideraremos que el canal es ideal y que el receptor dispone de una señal perturbada con ruido aditivo blanco Gaussiano (AWGN). Es decir, la señal recibida en el período i-ésimo a partir de la cual el receptor determina el símbolo transmitido es

$$y_i = x_i + w_i$$

donde x_i es el símbolo transmitido y w_i es el ruido blanco Gaussiano. De acuerdo a la dimensionalidad de cada modulación tenemos:

- Modulación PAM: $x_i, w_i \in \mathbb{R}$ y $w_i \sim \mathcal{N}(0, \frac{N_0}{2})$.
- Modulaciones QAM y PSK: $x_i, w_i \in \mathbb{C}$ y $w_i \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$.
- Modulación FSK: $x_i, w_i \in \mathbb{R}^N$ y $w_i \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \frac{N_0}{2}\mathbf{I}_N)$.

Para cada una de las modulaciones consideraremos que el orden o tamaño de la constelación M es 2, 4, 8 y 16. En los primeros dos ejercicios consideraremos constelaciones con símbolos equiprobables, dejando el análisis de una 2-PAM con símbolos con distinta probabilidad para el ejercicio 3.

En cada ejercicio analice el resultado y extraiga conclusiones.

Ejercicio 1 - Análisis teórico

1. Grafique las constelaciones de símbolos para las modulaciones mencionadas (cuando sea posible) asumiendo una distancia mínima $d = 2$ y $M = 16$. Indique un posible etiquetamiento de los símbolos y justifique su elección. Dibuje las regiones de decisión de cada símbolo, considerando que los símbolos son equiprobables.
2. Confeccione una tabla indicando la energía promedio de símbolo $\mathcal{E}_s$ y de bit $\mathcal{E}_b$ de cada constelación en función de la distancia mínima d y del orden de la constelación M.
3. Confeccione una tabla indicando, para cada modulación, la probabilidad de error de símbolo P_e y la probabilidad de error de bit P_b en función de la relación señal a ruido por bit[1] SNR_b y de M. Utilice la cota de vecinos cercanos. En el caso PAM y QAM, compare la cota de vecinos cercanos con la probabilidad de error exacta. ¿Bajo qué condiciones las cotas son ajustadas?

[1] Definimos $\mathrm{SNR}_b = \mathcal{E}_b/N_0$ donde N_0 es la densidad espectral de potencia del ruido blanco.

Ejercicio 2 - Simulación Montecarlo

1. Implemente en Matlab/Octave un *script* para estimar con el método de Montecarlo las probabilidades de error de símbolo y de bit en función de la SNR_b. Para este ejercicio y los subsiguientes, varíe SNR_b entre 0 y 10 dB con pasos de 1 dB. Al hacerlo, modifique N_0 y mantenga constante $\mathcal{E}_b$ (y por consiguiente d). Tenga en cuenta las buenas prácticas de programación sugeridas en el tutorial disponible en el campus de la materia.
2. En cuatro figuras distintas, una para cada modulación, grafique la probabilidad de error de símbolo teórica P_e y la estimada $\hat{P}_e$ en función de la SNR_b para $M = 2, 4, 8$ y 16. ¿Qué sucede en el caso de las modulaciones eficientes en ancho de banda PAM, QAM y PSK comparado con la modulación eficiente en potencia FSK cuando M crece?
3. En otras cuatro figuras, una para cada modulación, grafique ahora la probabilidad de error de bit teórica P_b y la estimada $\hat{P}_b$ en función de la SNR_b para $M = 2, 4, 8$ y 16.
4. En otra figura, grafique la probabilidad de error de bit teórica P_b y la estimada $\hat{P}_b$ en función de la SNR_b para las cuatro modulaciones con $M = 16$. ¿Cuál tiene el mejor desempeño?

Ejercicio 3 - 2-PAM No equiprobable

1. Considere la modulación PAM con $M = 2$ y símbolos $x_i \in \{-A, A\}$ con probabilidades a priori p y $q = 1 - p$, respectivamente. Halle el umbral de decisión del detector óptimo y explique conceptualmente cómo varía en función de las probabilidades p y q.
2. Calcule la probabilidad de error teórica exacta P_e.
3. Considere $A = 1$, $p = 1/4$ y $q = 3/4$. Implemente un *script* en Matlab/Octave para estimar P_e usando el método de Montecarlo. Grafique en una misma figura P_e y la probabilidad de error estimada $\hat{P}_e$ en función de la SNR_b.