

## Exercícios a fazer:

- **Obrigatório**
  - **5 exercícios:** A (escolher 1 dos 3) + B (escolher 1 dos 3) + C (escolher 1 dos 3) + D (escolher 1 dos 5) + 1 outro, totalmente à sua escolha (incluindo A, B, C e D)
- **Facultativo**
  - Tudo o resto, para além dos 5 exercícios

### A. Função logística

- Considere a função logística,  $f(x) = rx(1-x)$ . Usando uma qualquer ferramenta à sua escolha (máquina de calcular, excel, sageMath, etc.) ou então (talvez seja melhor ideia) explorando alguns destes [programas específicos](#) ATENÇÃO: [LINK ALTERNATIVO](#)
  - **1.** Encontre valores do parâmetro  $r$  que resultem em trajetórias (órbitas, sequências temporais) que convirjam para:
    - a) Ponto fixo igual a zero;
    - b) Ponto fixo diferente de zero;
    - c) Ciclo limite com período 2;
    - d) Ciclo limite com período 4;
    - e) Ciclo limite com período 8;
    - f) Ciclo limite com período 3;
    - g) Ciclo limite com período 5;
    - h) Ciclo limite com período 6;
    - i) Atractor aperiódico (caótico).
  - **2.** Mostre que para todos os casos anteriores (exceto o último) a trajetória obtida não é sensível às condições iniciais
  - **3.** Explique no que consiste o chamado "**efeito borboleta**" e ilustre esse fenómeno para o caso da função logística

### B. Jogo do Caos

- A versão mais simples do Jogo do Caos é a seguinte (veja [aqui](#)):
  - 1. Defina três pontos fixos (vértices de um triângulo): **A**, **B** e **C**
  - 2. Inicialize o processo num ponto arbitrário, **X**, no interior do triângulo **ABC**
  - 3. Sorteie um dos 3 pontos (**A**, **B** ou **C**), aleatoriamente, e designe esse ponto por **T**
  - 4. Calcule o ponto intermédio entre **X** e **T** passando esse ponto a ser o novo valor de **X**, ou seja,  $\mathbf{X} = \mathbf{X} + 0.5(\mathbf{T} - \mathbf{X})$
  - 5. Assinale (pinte) o ponto **X** com uma dada cor (por exemplo, cor diferente consoante tenha sorteado A, B, ou C)
  - 6. Volte ao ponto 3 (repita milhares de vezes)
- **1.** Implemente o algoritmo descrito e observe o resultado (faça as opções que entender: pode definir os pontos em coordenadas do Mundo ou trabalhar directamente em coordenadas dos pixels, etc.). Comente o resultado obtido.
- **2.** Repita o exercício anterior mas agora com um número arbitrário de pontos (maior do que 3). **Sugestão:** o utilizador define os vértices do polígono de forma interactiva, e.g., clicando no botão esquerdo do rato para definir a posição de um novo vértice e no botão direito para definir a posição do último vértice e imediatamente dar inicio à simulação.
- **3.** Implemente uma, ou mais, versões do Jogo do Caos com Restrições (e.g., veja na [wikipedia](#) ou [aqui](#))

## C. Gramáticas de Lindenmayer

- Reveja os conceitos (e.g., [aqui](#))
- **1.** Tendo por base o código feito em aula, crie pelo menos dois objectos fractais usando a técnica designada por L-Systems (pesquise na net, encontra muita informação, e.g., veja [aqui](#) ou [aqui](#))
- **2.** Crie uma árvore de frutos usando como base o seguinte sistema de Lindenmayer com duas regras

Variáveis: F, G

Constantes: [ ], +, -

Axioma: F

Regras:

F  $\rightarrow$  G[+F]-F

G  $\rightarrow$  GG

- **Nota 1:** A turtle convencional interpreta os símbolos "F" e "G" da mesma forma (passo em frente, deixando rasto) mas pode alterar ligeiramente o código associando "F" a um ramo terminal (com uma certa probabilidade de ter uma folha ou fruto) e "G" a um ramo não terminal (tronco)

**Nota 2:** Escolha como entender o ângulo de rotação associado aos símbolos "+" e "-"

- **3.** Construa um objecto fractal 3D, em cartolina, a representar uma árvore de Natal. Veja como o fazer [neste vídeo](#). Qual a dimensão fractal da árvore?

**Observação:** Caso pretenda, pode usar as [potencialidades 3D do Processing](#) para construir a mesma árvore, em formato digital

## D. Conjuntos de Julia e Mandelbrot

- Reveja os conceitos (e.g., [Julia Set](#) e [Julia Sets and the Mandelbrot Set](#))
- **1.** Tendo por base o código desenvolvido em aula, experimente formas alternativas de colorir os pontos que não pertencem ao conjunto de Mandelbrot. Documente cada uma das opções tomadas, ou seja, explice qual o critério usado para atribuir as cores e mostre os respectivos resultados
- **2.** Faça com que a sua janela seja subdividida em várias áreas (duas, ou mais), sendo que numa área é visualizado o conjunto de Mandelbrot (como no ponto anterior) e na outra pretende-se que seja visualizado um dado conjunto de Julia (e.g., quando o utilizador clica num ponto, C, do plano complexo, na área que contém o conjunto de Mandelbrot, é então mostrado, na outra área da janela, o correspondente conjunto de Julia, para a constante C). Comente os resultados obtidos, nomeadamente no que respeita à conectividade dos conjuntos de Julia obtidos. (inspire-se, por exemplo [aqui](#))
- **3.** Observe esta [ferramenta pedagógica](#) que permite observar as órbitas de z, relativas à função complexa de variável complexa  $f(z)=z^2+C$ . Encontre valores para C que conduzam a uma órbita:
  - a) Divergente;
  - b) Ponto fixo;
  - c) Periódica;
  - d) Caótica.
- **4.** Que funcionalidades adicionais gostaria que a referida ferramenta tivesse? Justifique.
- **5.** Faça a sua própria ferramenta, em Processing, com funcionalidades semelhantes.

## E. Ferramentas para criar fractais

- Existem inúmeras ferramentas disponíveis online para criação de objectos fractais, tais como, e.g.:

- [Terragen](#)
- [Fracplanet](#)
- [Fractal Grower](#)
- [Context Free Art](#)
- Explore as funcionalidades de uma destas ferramentas, produza objectos fractais com ela e partilhe connosco, no seu relatório, o conhecimento adquirido

## F. Pesquisa e ensaio

- Faça pesquisa sobre o tema Fractais e escreva um pequeno ensaio sobre o assunto.
- A título meramente ilustrativo, considere escrever um ensaio sobre a técnica de produzir música usando fractais (e.g., [aqui](#))

## G. Floresta animada

- Com base no código desenvolvido em aula, dê asas à sua imaginação, construindo um Mundo Virtual e respectiva Narrativa, onde a Floresta ocupa um papel central.
- **Exemplo:** Uma floresta onde as árvores crescem, mudam de cor de acordo com as estações do ano, dão fruto, bandos de pássaros passeiam sobre as árvores (usar flocking), ocorre fogo de artifício em épocas festivas (usar física e sistemas de partículas - e.g., ver [aqui](#) e [aqui](#)), etc.