UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

Tercer Examen Parcial

Licenciatura en
Matemáticas Aplicadas y Computación

Asignatura: Cálculo III
Profesor: Saavedra Luis Héctor Axel

Grupo: 1302

FES UNAM ACATLÁN

20 de noviembre de 2024

Ejercicio 1

Suggest a substitution/transformation that will simplify the following integrands, and find their Jacobians.

(a) $\iint_R (3x+2y)\sin(x-y)\,dA$

(b) $\iint_R e^{(-4x+7y)}\cos(7x-2y)\,dA$

Solución.

Identificar la Transformación para la Parte (a)

Para la parte (a), observamos el término $3x+2y$ junto con $\sin(x-y)$. Una sustitución útil aquí es establecer $u = x - y$ y $v = 3x + 2y$. Esta transformación se basa en la estructura de los términos para simplificar el integrando.

Calcular el Jacobiano para la Parte (a)

Para encontrar el Jacobiano de la transformación $u = x - y$ y $v = 3x + 2y$, planteamos las ecuaciones:

$$x = \frac{1}{5}(2u+v) \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{5}(3x-v).$$

Luego, calculamos el determinante de la matriz Jacobiana:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Esto resulta en:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{5}.$$

Por lo tanto, el Jacobiano es $\frac{1}{5}$.

Identificar la Transformación para la Parte (b)

Para la parte (b), observamos el término exponencial e^{-4x+7y} y el término trigonométrico $\cos(7x-2y)$. Aquí, establecemos $u=-4x+7y$ y $v=7x-2y$, con el objetivo de simplificar el integrando.

Calcular el Jacobiano para la Parte (b)

Para calcular el Jacobiano, expresamos x e y en términos de u y v. Las ecuaciones son:

$$x = \frac{v+2u}{30}, \quad y = \frac{7v+4u}{30}.$$

El Jacobiano es:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Esto resulta en:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{2}{30} & \frac{1}{30} \\ \frac{4}{30} & \frac{7}{30} \end{vmatrix} = \frac{10}{900} = \frac{1}{90}.$$

Por lo tanto, el Jacobiano es $\frac{1}{90}$.

Ejercicio 2

Suggest a substitution/transformation that will simplify the following integrands, and find their Jacobians.

1. $\iint_R (5x+y)^3(x+9y)^4 \, dA$
2. $\iint_R x\sin(6x+7y) - 3y\sin(6x+7y) \, dA$

Solución.

Parte (a)

$$\iint_R (5x+y)^3(x+9y)^4 \, dA$$

Identificar la Transformación

Observamos que los términos $5x + y$ y $x + 9y$ se pueden simplificar utilizando la transformación:

$$u = 5x + y, \quad v = x + 9y.$$

Resolver x y y en términos de u y v

De las ecuaciones de transformación, resolvemos para x y y: Para calcular el Jacobiano, necesitamos escribir x y y en términos de u y v:

$$u = 5x + y \quad \text{y} \quad v = x + 9y.$$

Este sistema se resuelve como sigue:

1. Multiplicamos la primera ecuación por 9:
$$9u = 45x + 9y.$$

2. Restamos la segunda ecuación:
$$9u - v = 45x + 9y - x - 9y,$$
lo que simplifica a:
$$9u - v = 44x \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{9u - v}{44}.$$

3. Usamos la primera ecuación para encontrar y:
$$y = u - 5x = u - 5\left(\frac{9u - v}{44}\right) = \frac{44u - 45u + 5v}{44} = \frac{-u + 5v}{44}.$$

Por lo tanto:
$$x = \frac{9u - v}{44}, \quad y = \frac{-u + 5v}{44}.$$

Calcular el Jacobiano

El Jacobiano J se define como:
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{9}{44}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{44}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{44}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{5}{44}.$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{9}{44} & -\frac{1}{44} \\ -\frac{1}{44} & \frac{5}{44} \end{vmatrix} = \frac{9}{44} \cdot \frac{5}{44} - \left(-\frac{1}{44} \cdot -\frac{1}{44}\right) = \frac{45}{1936} - \frac{1}{1936} = \frac{1}{44}.$$

Por lo tanto, el Jacobiano es:

$$\boxed{\frac{1}{44}}$$

Parte (b)

$$\iint_R x\sin(6x+7y) - 3y\sin(6x+7y)\,dA$$

Identificar la Transformación

Observamos que $6x+7y$ aparece repetido en el integrando. Usamos la transformación:

$$u = 6x + 7y, \quad v = x.$$

Resolver x y y en términos de u y v

De las ecuaciones de transformación, resolvemos para x y y:

$$x = v, \quad y = \frac{u - 6v}{7}.$$

Calcular el Jacobiano

El Jacobiano J se define como:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{7}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{6}{7}.$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{7} & -\frac{6}{7} \end{vmatrix} = (0)(-\frac{6}{7}) - (1)(\frac{1}{7}) = -\frac{1}{7}.$$

Por lo tanto, el Jacobiano es:

$$\boxed{-\frac{1}{7}}$$

Ejercicio 3

Solución.

Ejercicio 4

Solución.

Ejercicio 5

Let $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ be the mapping defined by:
$T(u, v) = (4u, 2u + 3v)$
Let the rectangle $[0, 1] \times [1, 2]$. Find $D = T(D^*)$ and evaluate:

(a) $\iint_D xy \; dx \; dy$

(b) $\iint_D (x - y) \; dx \; dy$

Solución.
El dominio D^* está definido por:

$$0 \leq u \leq \quad 1 \leq v \leq 2$$

Utilizamos los términos de la transformación T para obtener los límites de D:

Para x:

$x = 4u$, como u varía de 0 a 1:

$$0 \leq x \leq 1$$

Para y:

$y = 2u + 3v$, cuando $v = 1$, entonces: $y = 2u + 3$, cuando $v = 2$, entonces: $y = 2u + 6$

Sustituimos $u = \frac{x}{4}$ y acotamos:

$$\frac{x}{2} + 3 \leq y \leq \frac{x}{2} + 6$$

entonces: $D : 0 \leq x \leq 1 \qquad \frac{x}{2} + 3 \leq y \leq \frac{x}{2} + 6$

Procedemos a calcular la matriz Jacobiana de la transformación:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (4)(3) - (0)(2) = 12$$

Por lo tanto:

$$dxdy = \left|J\right| dudv = 12dudv$$

Evaluamos la primer integral:

$$\iint_D xy \ dx \ dy = \iint_{D^*} (8u^2 + 12uv) \cdot 12dudv$$

$$= \int_0^1 \int_1^2 (96u^2 + 144uv) dvdu$$

$$= \int_0^1 (96u^2 v + 144u \cdot \frac{v^2}{2})\Big|_1^2 du$$

$$= \int_0^1 ((192u^2 + 288u) - (96u^2 + 72u))du$$

$$= \int_0^1 (96u^2 + 216u)du$$

$$= (\frac{96u^3}{3} + \frac{216u^2}{2})\Big|_0^1$$

$$= (\frac{96}{3} + \frac{216}{2}) - (\frac{0}{3} + \frac{0}{2})$$

$$= (32 + 108) = 140$$

Evaluamos la segunda integral:

$$\iint_D (x - y) \ dx \ dy = \iint_{D^*} (2u - 3v) \cdot 12dudv$$

$$= \int_0^1 \int_1^2 (24u - 36v) dvdu$$

$$= \int_0^1 (24uv - 36 \cdot \frac{v^2}{2})\Big|_1^2 du$$

$$= \int_0^1 ((48u - 72) - (24u - 18))du$$

$$= \int_0^1 (24u - 54)du$$

$$= (\frac{24u^2}{2} - 54u)\Big|_0^1$$

$$= (12 - 54) - (0 - 0) = -42$$

Ejercicio 6

Repeat Exercise 5 for $T(u, v) = (u, v(1 + u))$

Solución.

El dominio D^* está definido por:

$$0 \leq u \leq \quad 1 \leq v \leq 2$$

Utilizamos los términos de la transformación T para obtener los límites de D:

Para x:

$x = u$, como u varía de 0 a 1:

$$0 \leq x \leq 1$$

Para y:

$y = v(1 + u)$, cuando $v = 1$, entonces: $y = 1 + x$, cuando $v = 2$, entonces: $y = 2 + 2x$

$$1 + x \leq y \leq 2 + 2x$$

entonces: $D : 0 \leq x \leq 1 \quad 1 + x \leq y \leq 2 + 2x$

Calculamos la matriz Jacobiana de la transformación:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 + u \end{vmatrix} = (1)(1 + u) - (0)(v) = 1 + u$$

Por lo tanto:
$$dxdy = \left|J\right| dudv = (1+u)dudv$$

Evaluamos la primer integral:
$$\iint_D xy\ dx\ dy = \iint_{D^*} uv(1+u)\cdot(1+u)dudv$$

$$= \int_0^1 \int_1^2 uv(1+u)^2 dvdu$$
$$= \int_0^1 (u(1+u)^2 \cdot \frac{v^2}{2})\Big|_1^2 du$$
$$= \int_0^1 ((2u(1+u)^2) - (\frac{u(1+u)^2}{2}))du$$
$$= \int_0^1 (\frac{3u^3+6u^2+3u}{2})du$$
$$= \frac{3}{2}\cdot\int_0^1 (u^3+2u^2+u)du$$
$$= \frac{3}{2}\cdot(\frac{u^4}{4}+\frac{2u^3}{3}+\frac{u^2}{2})\Big|_0^1$$
$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{17}{12} - \frac{3}{2}\cdot 0$$
$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{17}{12} = \frac{17}{8}$$

Evaluamos la segunda integral:
$$\iint_D (x-y)\ dx\ dy = \iint_{D^*} (u-v-uv)\cdot(1+u)dudv$$

$$= \int_0^1 \int_1^2 (u+u^2-v-2uv-u^2v)dvdu$$
$$= \int_0^1 (uv+u^2v-\frac{v^2}{2}-uv^2-\frac{u^2v^2}{2})\Big|_1^2 du$$
$$= \int_0^1 (2u+2u^2-2-4u-2u^2)-(u+u^2-\frac{1}{2}-u-\frac{u^2}{2})du$$
$$= \int_0^1 (\frac{-u^2}{2}-2u-\frac{3}{2})du$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \int_0^1 (u^2 + 4u + 3)du$$
$$= \frac{-1}{2} \cdot (\frac{u^3}{3} + 2u^2 + 3u)\Big|_0^1$$
$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{16}{3} - \frac{-1}{2} \cdot 0$$
$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{16}{3} = \frac{-8}{3}$$

Ejercicio 7

Solución.

Ejercicio 8

Solución.

Ejercicio 9

Let T (u, v) be as in Exercise 8. By making a change ofvariables, "formally" evaluate the "improper" integral

(a) $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy,$

Solución.

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy,$$

$$T(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$$

Transformación de variables

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv$$
$$x^2 + y^2 = (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2$$
$$x^2 + y^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2+v^2)^2$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{x^2+y^2} = u^2+v^2$$

Determinante jacobiano

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = (2u)(2u) - (-2v)(2v) = 4u^2+4v^2 = 4(u^2+v^2)$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 4(u^2+v^2)$$

Integral en las nuevas variables

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{u^2+v^2}$$

$$dx\,dy = 4(u^2+v^2)\,du\,dv.$$

Por lo tanto:

$$\iint \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \iint \frac{1}{u^2+v^2}\cdot 4(u^2+v^2)\,du\,dv.$$

$$\iint \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \iint 4\,du\,dv.$$

Región de integración

La region de integracion del conjunto D^*, que es un cuarto de disco en el plano (u,v), donde:

$$u^2+v^2 \leq 1, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0.$$

Integral final en coordenadas polares

$u^2+v^2 = r^2$, - La región es: $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 4r\,dr\,d\theta.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 4r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2r^2\right]_0^1 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,d\theta = 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

$$\iint \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \pi.$$

Ejercicio 10

Calculate where R is the region bounded by x = 0, y = 0, x + y = 1, x + y = 4, by using the mapping T (u, v) = (u - uv, uv).

(a) $\iint_R \frac{1}{x+y}\, dy\, dx$

Solución.

$$\int\int_R \frac{1}{x+y}\, dy\, dx$$

$$T(u,v) = (u - uv, uv).$$

Transformación de variables

$$x = u - uv, \quad y = uv.$$

Determinante Jacobiano

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = (1-v)u - (-uv) = u - uv + uv = u.$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = u.$$

Region de integracion

- $x = 0 \implies u - uv = 0 \implies u(1-v) = 0 \implies u = 0$ o $v = 1$,
- $y = 0 \implies uv = 0 \implies v = 0$ (cuando $u \neq 0$),
- $x + y = 1 \implies (u - uv) + uv = 1 \implies u = 1$,
- $x + y = 4 \implies (u - uv) + uv = 4 \implies u = 4$.

$$1 \leq u \leq 4, \quad 0 \leq v \leq 1.$$

Integral final

$$\int\int_R \frac{1}{x+y}\,dy\,dx.$$

$$x+y=u, \quad dy\,dx = u\,du\,dv.$$

$$\int_1^4\int_0^1 \frac{1}{u}\cdot u\,dv\,du = \int_1^4\int_0^1 1\,dv\,du = \int_1^4 [v]_0^1\,du = \int_1^4 1\,du = \int_1^4 1\,du = 4-1=3$$

$$\int\int_R \frac{1}{x+y}\,dy\,dx = 3.$$

Ejercicio 11

Solución.

Ejercicio 12

Solución.

Ejercicio 13

Solución.

Ejercicio 14

Solución.

Ejercicio 15

Integrate $ze^{x^2+y^2}$ over the cylinder $x^2+y^2 \leq 4, 2 \leq z \leq 3$.

Solución.

Ejercicio 16

Let D be the unit disk. Express

$$\int\int_D (1 + x^2 + y^2)^{3/2} dxdy$$

as an integral over $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ and evaluate.

Solución.

Ejercicio 17

Solución.

Ejercicio 18

Solución.

Ejercicio 19

Solución.

Ejercicio 20

Solución.

Ejercicio 21

Integrate $x^2 + y^2 + z^2$ over the cylinder $x^2 + y^2 \leq 2$, $-2 \leq z \leq 3$

Solución.

Ejercicio 22

Evaluate

$$\int_0^\infty e^{-4x^2} dx$$

Solución.

Ejercicio 23

Solución.

Ejercicio 24

Solución.

Ejercicio 25

Solución.

Ejercicio 26

Solución.

Ejercicio 27

Solución.

Ejercicio 28

Solución.

Ejercicio 29

Solución.

Ejercicio 30

Solución.

Ejercicio 31

Solución.

Ejercicio 32

Solución.

Ejercicio 33

Solución.

Ejercicio 34

Solución.

Ejercicio 35

Solución.

Ejercicio 36

Solución.

Ejercicio 37

Solución.

Ejercicio 38

Solución.