

# MÉTODOS NUMÉRICOS

## SESIÓN 3

### (ARITMÉTICA COMPUTACIONAL)

Universidad Externado de Colombia  
Programa Ciencia de Datos

202410

- 1 Dígitos
- 2 Error absoluto y relativo
- 3 Exactitud y precisión
- 4 Puntos flotantes
- 5 Aritmética de dígitos finitos

## Definición (Digito significativo)

Los **dígitos significativos** son dígitos que empiezan con un dígito distinto de cero del extremo izquierdo y terminan con el dígito correcto del extremo derecho, incluye los ceros finales que son exactos.

### Ejemplo:

- ① Dígitos distintos de cero
  - 81: Dos dígitos significativos
  - 127.85: Cinco dígitos significativos
- ② Ceros entre dos dígitos significativos distintos de cero
  - 127.17001: Ocho dígitos significativos
  - 101.820001: Nueve dígitos significativos
- ③ Ceros a la derecha del último dígito en decimal o entero
  - 2.700: Cuatro dígitos significativos
  - 0.0270: Tres dígitos significativos
  - 17500: Tres, cuatro, cinco dígitos.

## Definición (Digito significativo)

Los **digitos significativos** son digitos que empiezan con un digito distinto de cero del extremo izquierdo y terminan con el digito correcto del extremo derecho, incluye los ceros finales que son exactos.

## Ejemplo 1:

$$\begin{cases} 0.2072x + 0.4248y = 1.4767 \\ 0.4166x + 0.8494y = 1.8656 \end{cases}$$

## Ejemplo:

- ① Digitos distintos de cero
  - 81: Dos digitos significativos
  - 127.85: Cinco digitos significativos
- ② Ceros entre dos digitos significativos distintos de cero
  - 127.17001: Ocho digitos significativos
  - 101.820001: Nueve digitos significativos
- ③ Ceros a la derecha del último digito en decimal o entero
  - 2.700: Cuatro digitos significativos
  - 0.0270: Tres digitos significativos
  - 17500: Tres, cuatro, cinco digitos.

## Definición (Dígito significativo)

Los **dígitos significativos** son dígitos que empiezan con un dígito distinto de cero del extremo izquierdo y terminan con el dígito correcto del extremo derecho, incluye los ceros finales que son exactos.

## Ejemplo:

- ① Dígitos distintos de cero
  - 81: Dos dígitos significativos
  - 127.85: Cinco dígitos significativos
- ② Ceros entre dos dígitos significativos distintos de cero
  - 127.17001: Ocho dígitos significativos
  - 101.820001: Nueve dígitos significativos
- ③ Ceros a la derecha del último dígito en decimal o entero
  - 2.700: Cuatro dígitos significativos
  - 0.0270: Tres dígitos significativos
  - 17500: Tres, cuatro, cinco dígitos.

## Ejemplo 1:

$$\begin{cases} 0.2072x + 0.4248y = 1.4767 \\ 0.4166x + 0.8494y = 1.8656 \end{cases}$$

①

$$\begin{cases} 0.207x + 0.425y \approx 1.477 \\ 0.417x + 0.849y \approx 1.866 \end{cases}$$

$$x = -311.014 \quad y = 154.957$$

②

$$\begin{cases} 0.2072x + 0.4248y = 1.4767 \\ 0.4166x + 0.8494y = 1.8656 \end{cases}$$

## Definición (Dígito significativo)

Los **dígitos significativos** son dígitos que empiezan con un dígito distinto de cero del extremo izquierdo y terminan con el dígito correcto del extremo derecho, incluye los ceros finales que son exactos.

## Ejemplo:

- ① Dígitos distintos de cero
  - 81: Dos dígitos significativos
  - 127.85: Cinco dígitos significativos
- ② Ceros entre dos dígitos significativos distintos de cero
  - 127.17001: Ocho dígitos significativos
  - 101.820001: Nueve dígitos significativos
- ③ Ceros a la derecha del último dígito en decimal o entero
  - 2.700: Cuatro dígitos significativos
  - 0.0270: Tres dígitos significativos
  - 17500: Tres, cuatro, cinco dígitos.

## Ejemplo 1:

$$\begin{cases} 0.2072x + 0.4248y = 1.4767 \\ 0.4166x + 0.8494y = 1.8656 \end{cases}$$

①

$$\begin{cases} 0.207x + 0.425y \approx 1.477 \\ 0.417x + 0.849y \approx 1.866 \end{cases}$$

$$x = -311.014 \quad y = 154.957$$

②

$$\begin{cases} 0.2072x + 0.4248y = 1.4767 \\ 0.4166x + 0.8494y = 1.8656 \end{cases}$$

$$x = -473.158 \quad y = 234.263$$

## Definición

Suponga que  $p^*$  es una aproximación a  $p$ . El **error real** es  $p - p^*$ , el **error absoluto** es

$$|p - p^*|$$

, y el **error relativo** es

$$\frac{|p - p^*|}{|p|}$$

, siempre y cuando  $p \neq 0$

## Ejemplo:

- $p_1 = 1.277 \quad p_1^* = 1.278$

## Definición

Suponga que  $p^*$  es una aproximación a  $p$ . El **error real** es  $p - p^*$ , el **error absoluto** es

$$|p - p^*|$$

, y el **error relativo** es

$$\frac{|p - p^*|}{|p|}$$

, siempre y cuando  $p \neq 0$

## Ejemplo:

- $p_1 = 1.277$        $p_1^* = 1.278$

$$\text{Error absoluto} = |1.277 - 1.278| = 0.001$$

$$\text{Error relativo} = \frac{|1.277 - 1.278|}{|1.277|} = 0.000783$$



## Definición

Suponga que  $p^*$  es una aproximación a  $p$ . El **error real** es  $p - p^*$ , el **error absoluto** es

$$|p - p^*|$$

, y el **error relativo** es

$$\frac{|p - p^*|}{|p|}$$

, siempre y cuando  $p \neq 0$

## Ejemplo:

- $p_1 = 1.277 \qquad p_1^* = 1.278$

$$\text{Error absoluto} = |1.277 - 1.278| = 0.001$$

$$\text{Error relativo} = \frac{|1.277 - 1.278|}{|1.277|} = 0.000783$$

- $p_2 = 0.007 \qquad p_2^* = 0.008$

## Definición

Suponga que  $p^*$  es una aproximación a  $p$ . El **error real** es  $p - p^*$ , el **error absoluto** es

$$|p - p^*|$$

, y el **error relativo** es

$$\frac{|p - p^*|}{|p|}$$

, siempre y cuando  $p \neq 0$

## Ejemplo:

- $p_1 = 1.277 \quad p_1^* = 1.278$

$$\text{Error absoluto} = |1.277 - 1.278| = 0.001$$

$$\text{Error relativo} = \frac{|1.277 - 1.278|}{|1.277|} = 0.000783$$

- $p_2 = 0.007 \quad p_2^* = 0.008$

$$\text{Error absoluto} = |0.007 - 0.008| = 0.001$$

$$\text{Error relativo} = \frac{|0.007 - 0.008|}{|0.007|} = 0.\widehat{142857}$$

## Definición (Exactitud)

- 1  $n$  cifras decimales: Cuando se puede confiar en  $n$  dígitos a la derecha del lugar decimal
- 2  $n$  dígitos significativos: Cuando se puede confiar en un total de  $n$  dígitos que sean importantes a partir del dígito distinto de cero del extremo izquierdo.

## Definición (Exactitud)

- 1  $n$  cifras decimales: Cuando se puede confiar en  $n$  dígitos a la derecha del lugar decimal
- 2  $n$  dígitos significativos: Cuando se puede confiar en un total de  $n$  dígitos que sean importantes a partir del dígito distinto de cero del extremo izquierdo.

- 1 Suponga que tiene una regla graduada en milímetros para medir un terreno cualquiera. Esto significa que las medidas serán exactas a un milímetro o por 0.001m, por esta razón, una medida como 12.271m tendrá una **exactitud** de tres cifras decimales, mientras que, una medida como 12.2712365m no tendría sentido, dado que podría tomar una medida como la anterior u otra, como la siguiente: 12.272m.

- 2 Para el caso de la medida 12.271m se tendría una exactitud de cinco(5) dígitos significativos.

3

$$2.4 + 6.91 = 9.31$$

## Definición (Redondeo y truncamiento)

- 1 **Redondeo:** Se utiliza para reducir los dígitos significativos en un número

- Un número  $x$  está **truncado** a  $n$  dígitos cuando todos los dígitos que siguen al  $n$ -ésimo dígito son descartados y ninguno de los  $n$  restantes se cambia. (i.e. 0.147 0.14, 0.185 0.18).
- Un número  $x$  está **redondeado** a  $n$  dígitos cuando  $x$  se reemplaza por un  $n$ -dígito que se aproxime a  $x$  con un error mínimo. (i.e. 0.147 0.15, 0.185 0.19).

$$\mathbb{R}_+(\text{decimal}) = \begin{cases} \text{Parte entera} \\ \text{Parte fraccionaria} \end{cases}$$

$$\mathbb{R}_+(\text{decimal}) = \{ \text{Notación científica (normalizada)} \}$$

i.e.

- $12.131 = 0.12131 \times 10^2$
- $0.0012 = 0.12 \times 10^{-2}$

## Representación (Punto flotante normalizada)

Cualquier número real  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$  se puede representar de la forma *punto flotante normalizada* como:

$$x = \pm 0.d_1 d_2 d_3 \cdots \times 10^n$$

donde  $d_1 \neq 0$  y  $n \in \mathbb{Z}$  y  $d_i \in \mathbb{D}$ , es decir:

$$x = \pm r \times 10^n \quad \left( \frac{1}{10} \leq r < 1 \right)$$

r: Mantisa normalizada

n: Exponente

## Representación (Punto flotante binario)

Si  $x \neq 0$  se puede representar de la forma *punto flotante normalizada* como:

$$x = \pm q \times 2^m \quad \left( \frac{1}{2} \leq q < 1 \right)$$

q: Mantisa normalizada:  $q = (0, b_1 b_2 \dots)_2$  donde  $b_1 \neq 0$

n: Exponente

## Ejercicio

- 1 Encuentre los números de punto flotante que se pueden expresar dado que:

$$x = \pm (0.b_1 b_2 b_3)_2 \times 2^{\pm k} \quad (k, b_i \in \{0, 1\})$$

## Representación (Punto flotante binario)

Si  $x \neq 0$  se puede representar de la forma *punto flotante normalizada* como:

$$x = \pm q \times 2^m \quad \left( \frac{1}{2} \leq q < 1 \right)$$

q: Mantisa normalizada:  $q = (0, b_1 b_2 \dots)_2$  donde  $b_1 \neq 0$

n: Exponente

## Ejercicio

- ① Encuentre los números de punto flotante que se pueden expresar dado que:

$$x = \pm (0, b_1 b_2 b_3)_2 \times 2^{\pm k} \quad (k, b_i \in \{0, 1\})$$

- ② Encuentre los números de punto flotante **normalizados** (Agujero en cero)

## Nota

Los números reales que se pueden representar en una computadora se llaman **números de máquina**

Máquina 32 bits (dígitos binarios)

Suponderemos que la máquina (computadora) almacena números en palabras de 32 bits de la forma:

$$\pm q \times 2^m$$



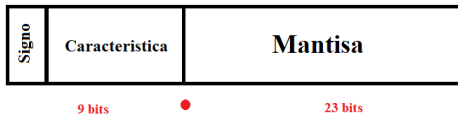
## Máquina 32 bits (digitos binarios)

Suponderemos que la máquina (computadora) almacena números en palabras de 32 bits de la forma:

$$\pm q \times 2^m$$

¿Cómo asignar ese espacio?

- Signo para  $q$ : 1 bit
- Entero  $-m$ : 8 bits (característica)
- Número 1: 23 bits (mantisa)



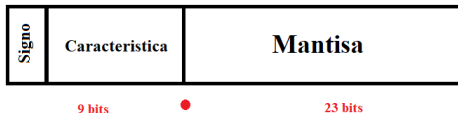
## Máquina 32 bits (digitos binarios)

Suponderemos que la máquina (computadora) almacena números en palabras de 32 bits de la forma:

$$\pm q \times 2^m$$

¿Cómo asignar ese espacio?

- Signo para  $q$ : 1 bit
- Entero  $-m$ : 8 bits (característica)
- Número 1: 23 bits (mantisa)



### Nota

Con este esquema se podrían representar números reales con  $-m$  tan grande como  $2^7 - 1 = 127$ . Por el exponente, se podrían tener numeros del -127 al 128.

$$(-1)^s \times 2^{c-127} \times (1.f)_2$$

- 1 Signo de la mantisa:

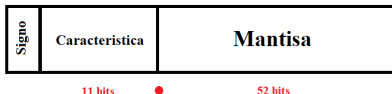
$$s = \begin{cases} 0 & \text{Positivo} \\ 1 & \text{Negativo} \end{cases}$$

- 2 La característica se utiliza para representar al número  $c$  en el exponente  $2^{c-127}$  (código en exceso)
- 3 Los siguientes 23 bits representan  $f$  de la parte fraccionaria de la mantisa en la forma "uno más"  $(1.f)_2$

# Punto flotante de doble precisión

"...en este caso cada número de punto flotante de doble precisión se almacena en la memoria de dos palabras..."

$$(-1)^s \times 2^{c-1023} \times (1.f)_2$$



## ① Signo de la mantisa:

$$s = \begin{cases} 0 & \text{Positivo} \\ 1 & \text{Negativo} \end{cases}$$

- ② La característica se utiliza para representar al número  $c$  en el exponente  $2^{c-1023}$  (código en exceso)
- ③ Los siguientes 52 bits representan  $f$  de la parte fraccionaria de la mantisa en la forma "uno más"  $(1.f)_2$

$$\textcircled{1} [1 \ 10000100 \ 101000011110000000000000]_2$$

$$-52.234375$$

$$[C250F000]_{16}$$

$$\textcircled{2} [1 \ 10000000100 \ 101000011110000 \cdots 00]_2$$

$$-52.234375$$

Suponga que,  $fl(x)$  y  $fl(y)$  son las representaciones de punto flotante para  $x, y \in \mathbb{R}$  y que se definen las operaciones de máquina, suma, resta, multiplicación y división con lo siguientes símbolos  $\oplus$ ,  $\ominus$ ,  $\odot$  y  $\oslash$ , tales que:

- $x \oplus y = fl(fl(x) + fl(y))$
- $x \ominus y = fl(fl(x) - fl(y))$
- $x \odot y = fl(fl(x) \cdot fl(y))$
- $x \oslash y = fl(fl(x) \div fl(y))$

- 1 Trunque a cinco dígitos para calcular las operaciones anteriores para los números  $x = \frac{5}{7}$  e  $y = \frac{1}{3}$

- ① Trunque a cinco dígitos para calcular las operaciones anteriores para los números  $x = \frac{5}{7}$  e  $y = \frac{1}{3}$

$$fl(x) = 0.71428 \times 10^0$$

$$fl(y) = 0.33333 \times 10^0$$



- ① Trunque a cinco dígitos para calcular las operaciones anteriores para los números  $x = \frac{5}{7}$  e  $y = \frac{1}{3}$

$$fl(x) = 0.71428 \times 10^0$$

$$fl(y) = 0.33333 \times 10^0$$

①  $x \oplus y = fl(0.71428 \times 10^0 + 0.33333 \times 10^0) = fl(1.04761 \times 10^0)$

$$x \oplus y = 0.10476 \times 10^1$$