Métodos numéricos Sesión 10 (Técnicas iterativas)

Universidad Externado de Colombia
Programa Ciencia de Datos

202410

Tabla de contenidos

Norma

Definición (norma)

Una norma es una función:

$$\mu : V \to \mathbb{R}$$

que cumple las siguientes propiedades

- $\mu(x) \geq 0,$ Para todo $x \in V$
- $\mu(x) = 0,$ Sii $x = 0$
- $\mu(\alpha \cdot x) = |\alpha| \cdot \mu(x),$ Para todo $x \in V, \alpha \in \mathbb{R}$
- $\mu(x + y) \leq \mu(x) + \mu(y),$ Para todo $x, y \in V$, desigualdad triangular

Tipos de norma

- $||x||_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3| + \ldots$: Norma vectorial l_1
- $||x||_2 = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots)^{1/2}$: Euclidiana l_2
- $||x||_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$: Norma vectorial l_∞

Normas matriciales

Para matrices $n \times n$ podemos definir una norma matricial para una matriz A como sigue:

- $||A|| \geq 0$, Para todo $x \in V$
- $||(\alpha \cdot A)|| = |\alpha| \cdot ||A||$, Para todo $x \in V, \alpha \in \mathbb{R}$
- $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$, Para todo $x, y \in V$, desigualdad triangular

Tipos de norma

- $||A||_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$: Norma matricial l_1
- $||A||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$: Norma de Frobenius l_2
- $||A||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$: Norma matricial l_∞

Definición (Norma matricial subordinada)

$$||A|| \equiv \sup\{||Ax|| : x \in \mathbb{R}^n \wedge ||x|| = 1\}$$

Método de Jacobi

El método de Jacobi se obtiene luego de solucionar la i-ésima ecuación en $Ax = b$ para x_i como:

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(-\frac{a_{ij}x_j}{a_{ii}} \right) + \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad \text{para} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

dado que $a_{ii} \neq 0$

En ese sentido, para toda $k \geq 1$, se generan los componentes $x_i^{(k)}$ de $\mathbf{x}^{(k)}$ a partir de los componentes de $\mathbf{x}^{(k-1)}$ como:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(-a_{ij}x_j^{(k-1)} \right) + b_i \right] \qquad \text{para} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

Ejemplos

Encuentre las primeras dos iteraciones del método de Jacobi para el siguiente sistema lineal, tenga en cuenta que inicia con $\mathbf{x}^{(0)} = 0$

$$\begin{cases} E_1: & 3x_1 - x_2 + x_3 & = 1 \\ E_2: & 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 & = 0 \\ E_3: & 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 & = 4 \end{cases}$$

Ejemplos

Encuentre las primeras dos iteraciones del método de Jacobi para el siguiente sistema lineal, tenga en cuenta que inicia con $\mathbf{x}^{(0)} = 0$

$$\begin{cases} E_1: & 3x_1 - x_2 + x_3 & = 1 \\ E_2: & 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 & = 0 \\ E_3: & 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 & = 4 \end{cases}$$

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(-\frac{a_{ij} x_j}{a_{ii}} \right) + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3} x_2 - \dfrac{1}{3} x_3 + \dfrac{1}{3} \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} x_1 - \dfrac{1}{3} x_3 \\ x_3 = -\dfrac{3}{7} x_1 - \dfrac{3}{7} x_2 + \dfrac{4}{7} \end{cases}$$

Ejemplo

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(-a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) + b_i \right] \qquad \text{para} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Iteración 1: Aproximación inicial con $\mathbf{x}^{(0)} = 0$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{3} x_2^{(0)} - \frac{1}{3} x_3^{(0)} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ x_2^{(1)} = -\frac{1}{2} x_1^{(0)} - \frac{1}{3} x_3^{(0)} = 0 \\ x_3^{(1)} = -\frac{3}{7} x_1^{(0)} - \frac{3}{7} x_2^{(0)} + \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \end{cases}$$

Iteración 2: Aproximación con $\mathbf{x}^{(1)} = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{4}{7} \right)^T$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{3} x_2^{(1)} - \frac{1}{3} x_3^{(1)} + \frac{1}{3} = \frac{1}{7} \\ x_2^{(2)} = -\frac{1}{2} x_1^{(1)} - \frac{1}{3} x_3^{(1)} = -\frac{5}{14} \\ x_3^{(2)} = -\frac{3}{7} x_1^{(1)} - \frac{3}{7} x_2^{(1)} + \frac{4}{7} = \frac{3}{7} \end{cases}$$

Método de Jacobi

$$\mathbb{A}x = b \qquad \equiv \qquad \mathbf{x} = \mathbb{T}\mathbf{x} + \mathbf{c}$$

Dado $\mathbf{x}^{(0)}$, se obtiene la sucesión de los vectores solución luego de calcular:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbb{T}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c} \qquad \text{para} \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$$A = D - L - U \qquad \equiv \qquad D\mathbf{x} = (L+U)\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Si D es no singular, entonces la técnica iterativa de Jacobi es:

$$\mathbf{x}^{(k)} = T_j\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}_j \tag{3}$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3} \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_3 = -\frac{3}{7}x_1 - \frac{3}{7}x_2 + \frac{4}{7} \end{cases}$$

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ -1/2 & 0 & -1/3 \\ -3/7 & -3/7 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 4/7 \end{bmatrix}$$

Criterio de parada

$$\frac{||x^{(k)} - x^{(k-1)}||}{||x^{(k)}||} < \epsilon$$

Pseudo

n ← Filas de la matriz A
x ← Aproximación inicial
tolerance ← 1e−p

for k **in** **from** 1 to IterMax do
  xnew ← 0
  for i **in** **from** 1 to n do
    add ← $\sum(A[i,:] * x) - A[i,i] * x[i]$
    xnew[i]= $\dfrac{(b[i] - add)}{A[i,i]}$
  end **for**
  if $\dfrac{||x^{(k)} - x^{(k-1)}||}{||x^{(k)}||} < tolerance$ then
    return xnew
  end **if**
  return x
end **for**

Ejemplo - Implementación

Encuentre las primeras dos iteraciones del método de Jacobi para el siguiente sistema lineal, tenga en cuenta que inicia con $\mathbf{x}^{(0)} = 0$

$$\begin{cases} E_1: & 3x_1 - x_2 + x_3 & = 1 \\ E_2: & 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 & = 0 \\ E_3: & 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 & = 4 \end{cases}$$

Iteración 1: Aproximación inicial con $\mathbf{x}^{(0)} = 0$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{3}x_2^{(0)} - \frac{1}{3}x_3^{(0)} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ x_2^{(1)} = -\frac{1}{2}x_1^{(0)} - \frac{1}{3}x_3^{(0)} = 0 \\ x_3^{(1)} = -\frac{3}{7}x_1^{(0)} - \frac{3}{7}x_2^{(0)} + \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \end{cases}$$

```
Iter  0:  [0.  0.  0.]
Iter  1:  [0.33333333 0.           0.57142857]
Iter  2:  [ 0.14285714 −0.35714286 0.42857143]
Iter  3:  [ 0.07142857 −0.21428571 0.66326531]
Iter  4:  [ 0.04081633 −0.25680272 0.63265306]
Iter  5:  [ 0.03684807 −0.23129252 0.66399417]
Iter  6:  [ 0.03490444 −0.23975543 0.6547619 ]
Iter  7:  [ 0.03516089 −0.23570619 0.65922185]
Iter  8:  [ 0.03502399 −0.23732106 0.65737656]
Iter  9:  [ 0.03510079 −0.23663751 0.65812732]
Iter  10:  [ 0.03507839 −0.23692617 0.65780145]
```

Iteración 2: Aproximación con $\mathbf{x}^{(1)} = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{4}{7}\right)^T$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{3}x_2^{(1)} - \frac{1}{3}x_3^{(1)} + \frac{1}{3} = \frac{1}{7} \\ x_2^{(2)} = -\frac{1}{2}x_1^{(1)} - \frac{1}{3}x_3^{(1)} = -\frac{5}{14} \\ x_3^{(2)} = -\frac{3}{7}x_1^{(1)} - \frac{3}{7}x_2^{(1)} + \frac{4}{7} = \frac{3}{7} \end{cases}$$

Método de Gauss-Siedel

El método de Gauss - Siedel se obtiene luego de solucionar nuevamente la i-ésima ecuación en $Ax = b$ para x_i como:

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(-\frac{a_{ij}x_j}{a_{ii}} \right) + \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad \text{para} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

dado que $a_{ii} \neq 0$

Se realiza una modificación de la ecuación (2), donde para $i > 1$, las componentes $x_1^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)}$ ya han sido calculadas, luego, a esta modificación se le conoce como iteración de Gauss - Siedel.

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{j=1}^{i-1} \left(-a_{ij}x_j^{(k)} \right) - \sum_{j=i+1}^{n} \left(a_{ij}x_j^{(k-1)} \right) + b_i \right] \qquad \text{para} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{5}$$

Ejemplos

Encuentre las primeras dos iteraciones del método de Gauss - Siedel para el siguiente sistema lineal, tenga en cuenta que inicia con $\mathbf{x}^{(0)} = 0$

$$\begin{cases} E_1: & 3x_1 - x_2 + x_3 & = 1 \\ E_2: & 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 & = 0 \\ E_3: & 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 & = 4 \end{cases}$$

Ejemplos

Encuentre las primeras dos iteraciones del método de Gauss - Siedel para el siguiente sistema lineal, tenga en cuenta que inicia con $\mathbf{x}^{(0)} = 0$

$$\begin{cases} E_1: & 3x_1 - x_2 + x_3 & = 1 \\ E_2: & 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 & = 0 \\ E_3: & 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 & = 4 \end{cases}$$

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(-\frac{a_{ij}x_j}{a_{ii}} \right) + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3}x_2 - \dfrac{1}{3}x_3 + \dfrac{1}{3} \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{1}{3}x_3 \\ x_3 = -\dfrac{3}{7}x_1 - \dfrac{3}{7}x_2 + \dfrac{4}{7} \end{cases}$$

Ejemplo

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1}^{i-1}\left(-a_{ij}x_j^{(k)}\right) - \sum_{j=i+1}^{n}\left(a_{ij}x_j^{(k-1)}\right) + b_i\right] \qquad \text{para} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Iteración 1: Aproximación inicial con $\mathbf{x}^{(0)} = 0$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{3}\left[-a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)} + b_1\right] \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{6}\left[-a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)} + b_2\right] \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{7}\left[-a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)} + b_3\right] \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{3}\left[x_2^{(0)} - x_3^{(0)} + 1\right] = \frac{1}{3} \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{6}\left[-3x_1^{(1)} - 2x_3^{(0)}\right] = -\frac{1}{6} \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{7}\left[-3x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)} + 4\right] = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Iteración 2: Aproximación con $\mathbf{x}^{(1)} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)^T$

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{3}\left[-a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} + b_1\right] \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{6}\left[-a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} + b_2\right] \\ x_3^{(k)} = \frac{1}{7}\left[-a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} + b_3\right] \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{3}\left[x_2^{(1)} - x_3^{(1)} + 1\right] = \frac{1}{9} \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{6}\left[-3x_1^{(2)} - 2x_3^{(1)}\right] = -\frac{2}{9} \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{7}\left[-3x_1^{(2)} - 3x_2^{(2)} + 4\right] = \frac{13}{21} \end{cases}$$

Radio espectral

Definición

El radio espectral $\rho(A)$ de una matriz A está definido por:

$$\rho(A) = \max |\lambda| \quad \text{donde } \lambda \text{ es un eigenvalor de } A$$

Teorema

Si A es una matriz $n \times n$, entonces:

1. $||A||_2 = [\rho(A^T A)]^{1/2}$
2. $\rho(A) \leq ||A||$, para cualquier normal natural

Matrices convergentes

Una matriz A de $n \times n$ es convergente si:

$$\lim_{k \to \infty} (A^k)_{ij} = 0 \text{ para cada } i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Radio espectral

Definición

El radio espectral $\rho(A)$ de una matriz A está definido por:

$$\rho(A) = \max|\lambda| \quad \text{donde } \lambda \text{ es un eigenvalor de } A$$

Teorema

Si A es una matriz $n \times n$, entonces:

1. $||A||_2 = [\rho(A^T A)]^{1/2}$
2. $\rho(A) \leq ||A||$, para cualquier normal natural

Matrices convergentes

Una matriz A de $n \times n$ es convergente si:

$$\lim_{k \to \infty} (A^k)_{ij} = 0 \text{ para cada } i, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 16 & 1/2 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 16 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}^4 = \begin{bmatrix} 1/16 & 0 \\ 8 & 1/16 \end{bmatrix} \quad A^{12} = \begin{bmatrix} 1/4096 & 0 \\ 3/32 & 1/4096 \end{bmatrix}$$

Técnicas de relajación

Teniendo en cuenta que $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ es una aproximación a la solución del sistema lineal definido por $\mathbb{A}x = b$. Se define el vector residual para $\tilde{x}$ con respecto a este sistema como:

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbb{A}\tilde{x} \tag{6}$$

Si $r_i^{(k)} = \left(r_{1i}^{(k)}, r_{2i}^{(k)}, \ldots, r_{ni}^{(k)}\right)^t$ corresponde al vector residual en el método de Gauss-Siedel para la solución aproximada $x_i^{(k)}$ definida por:

$$x_i^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k-1)}, \ldots\right)^t \tag{7}$$

Luego, el i-ésimo componente de $r_i^{(k)}$

$$r_{ii}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} - a_{ii} x_i^{k-1} \tag{8}$$

$$a_{ii} x_i^{(k-1)} + r_{ii}^{(k)} = a_{ii} x_i^{(k)} \tag{9}$$

Dado que el método de Gauss-Siedel está definido como:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{j=1}^{i-1} \left(-a_{ij} x_j^{(k)}\right) - \sum_{j=i+1}^{n} \left(a_{ij} x_j^{(k-1)}\right) + b_i \right] \tag{10}$$

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}} \tag{11}$$

Succesive Over - Relaxation (SOR)

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \omega \frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}} \tag{12}$$

- Si $0 < \omega < 1$: Método de sub-relajación
- Si $\omega > 1$: Métodos de sobre-relajación
- Si $\omega = 1$: Método de Gauss-Siedel

Succesive Over - Relaxation (SOR)

$$x_i^{(k)} = (1-\omega)x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[\sum_{j=1}^{i-1} \left(-a_{ij} x_j^{(k)} \right) - \sum_{j=i+1}^{n} \left(a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) + b_i \right] \tag{13}$$

Ejemplo - Jacobi

Encuentre la solución del siguiente sistema lineal utilizando el método de Jacobi, tenga en cuenta que inicia con $\mathbf{x}^{(0)} = 0$

$$\begin{cases} E_1: & 2x_1 - x_2 & = 1 \\ E_2: & -x_1 + 3x_2 - x_3 & = 8 \\ E_3: & -x_2 + 2x_3 & = -5 \end{cases}$$

```
Ite.  0:  [0.  0.  0.]
Ite.  1:  [ 0.5          2.66666667 -2.5        ]
Ite.  2:  [ 1.83333333  2.          -1.16666667]
Ite.  3:  [ 1.5          2.88888889 -1.5        ]
Ite.  4:  [ 1.94444444  2.66666667 -1.05555556]
Ite.  5:  [ 1.83333333  2.96296296 -1.16666667]
                         .
                         .
                         .
Ite.  18:  [ 1.9999746   2.99984758 -1.0000254 ]
Ite.  19:  [ 1.99992379  2.99998306 -1.00007621]
Ite.  20:  [ 1.99999153  2.99994919 -1.00000847]
Ite.  21:  [ 1.9999746   2.99999435 -1.0000254 ]
Ite.  22:  [ 1.99999718  2.99998306 -1.00000282]
Convergencia alcanzada  despus  de 22  iteraciones .
```

Iteración k -ésima

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{2}x_2^{(k-1)} + \frac{1}{2} \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{3}x_1^{(k-1)} + \frac{1}{3}x_3^{(k-1)} + \frac{8}{3} \\ x_3^{(k)} = \frac{1}{2}x_2^{(k-1)} - \frac{5}{2} \end{cases}$$

Ejemplo - Gauss-Siedel

Encuentre la solución del siguiente sistema lineal utilizando el método de Gauss-Siedel, tenga en cuenta que inicia con $\mathbf{x}^{(0)} = 0$

$$\begin{cases} E_1: & 2x_1 - x_2 & = 1 \\ E_2: & -x_1 + 3x_2 - x_3 & = 8 \\ E_3: & -x_2 + 2x_3 & = -5 \end{cases}$$

```
Ite. 0: [0. 0. 0.]
Ite. 1: [ 0.5         2.83333333 −1.08333333]
Ite. 2: [ 1.91666667  2.94444444 −1.02777778]
Ite. 3: [ 1.97222222  2.98148148 −1.00925926]
Ite. 4: [ 1.99074074  2.99382716 −1.00308642]
Ite. 5: [ 1.99691358  2.99794239 −1.00102881]
Ite. 6: [ 1.99897119  2.99931413 −1.00034294]
Ite. 7: [ 1.99965706  2.99977138 −1.00011431]
Ite. 8: [ 1.99988569  2.99992379 −1.0000381 ]
Ite. 9: [ 1.9999619  2.9999746 −1.0000127]
Ite. 10: [ 1.9999873   2.99999153 −1.00000423]
Convergencia alcanzada despus de 10 iteraciones.
```

Iteración k -ésima

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{2} x_2^{(k-1)} + \frac{1}{2} \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{3} x_1^{(k)} + \frac{1}{3} x_3^{(k-1)} + \frac{8}{3} \\ x_3^{(k)} = \frac{1}{2} x_2^{(k)} - \frac{5}{2} \end{cases}$$

Ejemplo - SOR

Encuentre la solución del siguiente sistema lineal utilizando una relajación SOR con $\omega = 1.25$ tenga en cuenta que inicia con $\mathbf{x}^{(0)} = 0$

$$\begin{cases} E_1: & 2x_1 - x_2 & = 1 \\ E_2: & -x_1 + 3x_2 - x_3 & = 8 \\ E_3: & -x_2 + 2x_3 & = -5 \end{cases}$$

Succesive Over - Relaxation (SOR)

$$\begin{aligned} x_i^{(k)} =& (1-\omega)x_i^{(k-1)} + \\ & \frac{\omega}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1}^{i-1}\left(-a_{ij}x_j^{(k)}\right) - \sum_{j=i+1}^{n}\left(a_{ij}x_j^{(k-1)}\right) + b_i\right] \end{aligned}$$

Iteración k -ésima

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \omega\left[\frac{1}{2}x_2^{(k-1)} + \frac{1}{2}\right] + (1-\omega)x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = \omega\left[\frac{1}{3}x_1^{(k)} + \frac{1}{3}x_3^{(k-1)} + \frac{8}{3}\right] + (1-\omega)x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = \omega\left[\frac{1}{2}x_2^{(k)} - \frac{5}{2}\right] + (1-\omega)x_3^{(k-1)} \end{cases}$$

Ejemplo - Sub-relajación con $\omega = 0.5$

Encuentre la solución del siguiente sistema lineal utilizando una relajación SOR con $\omega = 0.5$ tenga en cuenta que inicia con $\mathbf{x}^{(0)} = 0$

$$\begin{cases} E_1: & 2x_1 - x_2 & = 1 \\ E_2: & -x_1 + 3x_2 - x_3 & = 8 \\ E_3: & -x_2 + 2x_3 & = -5 \end{cases}$$

```
Ite. 0:  [0.  0.  0.]
Ite. 1:  [ 0.25      1.375     -0.90625]
Ite. 2:  [ 0.71875   1.989583  -1.20572]
Ite. 3:  [ 1.10677   2.311631  -1.27495]
Ite. 4:  [ 1.38129   2.506872  -1.26076]
Ite. 5:  [ 1.56736   2.637870  -1.22091]
                     .
                     .
                     .
Ite. 30: [ 1.9997    2.999732  -1.00020]
Ite. 31: [ 1.99979   2.999799  -1.00015]
Ite. 32: [ 1.99984   2.999849  -1.000113]
Ite. 33: [ 1.99988   2.999886  -1.000084]
Ite. 34: [ 1.99991   2.999915  -1.000063]
Convergencia alcanzada después de 34
     iteraciones.
```

Iteración k -ésima

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 0.5\left[\frac{1}{2}x_2^{(k-1)} + \frac{1}{2}\right] + (0.5)x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = 0.5\left[\frac{1}{3}x_1^{(k)} + \frac{1}{3}x_3^{(k-1)} + \frac{8}{3}\right] + (0.5)x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = 0.5\left[\frac{1}{2}x_2^{(k)} - \frac{5}{2}\right] + (0.5)x_3^{(k-1)} \end{cases}$$

Ejemplo - SOR con $\omega = 1.01$

Encuentre la solución del siguiente sistema lineal utilizando una relajación SOR con $\omega = 1.01$ tenga en cuenta que inicia con $\mathbf{x}^{(0)} = 0$

$$\begin{cases} E_1: & 2x_1 - x_2 & = 1 \\ E_2: & -x_1 + 3x_2 - x_3 & = 8 \\ E_3: & -x_2 + 2x_3 & = -5 \end{cases}$$

```
Ite .  0:  [0.  0.  0.]
Ite .  1:  [ 0.525      2.98375   −1.058531]
Ite .  2:  [ 2.065218   3.003153  −0.995418]
Ite .  3:  [ 1.998394   3.000884  −0.9997649]
Ite .  4:  [ 2.000544   3.000228  −0.9998917]
Ite .  5:  [ 2.000092   3.000058  −0.9999744]
Ite .  6:  [ 2.000026   3.000015  −0.99999]
Ite .  7:  [ 2.000006   3.000003  −0.999998]
Convergencia alcanzada después de 7
        iteraciones
```

Iteración k -ésima

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 1.01\left[\frac{1}{2}x_2^{(k-1)} + \frac{1}{2}\right] - (0.01)x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = 1.01\left[\frac{1}{3}x_1^{(k)} + \frac{1}{3}x_3^{(k-1)} + \frac{8}{3}\right] - (0.01)x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = 1.01\left[\frac{1}{2}x_2^{(k)} - \frac{5}{2}\right] - (0.01)x_3^{(k-1)} \end{cases}$$

Ejemplo - SOR con $\omega = 1.95$

Encuentre la solución del siguiente sistema lineal utilizando una relajación SOR con $\omega = 1.95$ tenga en cuenta que inicia con $\mathbf{x}^{(0)} = 0$

$$\begin{cases} E_1 : & 2x_1 - x_2 & = 1 \\ E_2 : & -x_1 + 3x_2 - x_3 & = 8 \\ E_3 : & -x_2 + 2x_3 & = -5 \end{cases}$$

```
Ite.  0:  [0.  0.  0.]
Ite.  1:  [0.975       5.83375    0.81290]
Ite.  2:  [ 5.73665   3.91515   -1.82998]
Ite.  3:  [-0.65754  -0.13629   -3.26939]
Ite.  4:  [1.466785   4.15778    2.28476]
                      .
                      .
                      .
Ite.  232:  [ 2.00002 3.00001 -0.99999]
Ite.  233:  [ 1.99998 2.99997 -1.00002]
Ite.  234:  [ 1.99998 2.99999 -0.99997]
Ite.  235:  [ 2.00000 3.00002 -0.99999]
Convergencia alcanzada después de 235
        iteraciones.
```

Iteración k -ésima

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 1.95\left[\frac{1}{2}x_2^{(k-1)} + \frac{1}{2}\right] - (0.95)x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = 1.95\left[\frac{1}{3}x_1^{(k)} + \frac{1}{3}x_3^{(k-1)} + \frac{8}{3}\right] - (0.95)x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = 1.95\left[\frac{1}{2}x_2^{(k)} - \frac{5}{2}\right] - (0.95)x_3^{(k-1)} \end{cases}$$

Convergencia SOR

$$\begin{cases} E_1 : & 2x_1 - x_2 & = 1 \\ E_2 : & -x_1 + 3x_2 - x_3 & = 8 \\ E_3 : & -x_2 + 2x_3 & = -5 \end{cases}$$

$\omega = -0.5$

Ite . 0: [0. 0. 0.]
Ite . 1: [−0.25 −1.291666 1.572916]
Ite . 2: [−0.30208 −3.482638 4.480034]
Ite . 3: [0.16753 −7.331886 9.803023]
Ite . 4: [1.83427 −14.27071 19.52221]
Ite . 5: [6.06908 −27.00461 37.28447]
.
.
.
Ite . 998:[2.9e+277 −4.7e+277 5.6e+277]
Ite . 999:[5.6e+277 −9.0e+277 1.0e+278]
Ite . 1000:[1.0e+278 −1.7e+278 2.0e+278]
Se alcanzó el máximo número de iteraciones.

$\omega = 2.5$

Ite . 0: [0. 0. 0.]
Ite . 1: [1.25 7.7083 3.38541]
Ite . 2: [9.0104 5.4340 −4.53559]
Ite . 3: [−5.473 −9.8249 −11.72779]
Ite . 4: [−2.8215 9.2796 22.94123]
Ite . 5: [17.0818 26.0997 −8.03711]
.
.
.
Ite . 997:[7.6e+175 9.6e+175 −5.7e+175]
Ite . 998:[6.4e+174 −1.8e+176 −1.4e+176]
Ite . 999:[−2.4e+176 −4.5e+175 1.6e+176]
Ite . 1000:[3.0e+176 4.6e+176 3.3e+176]
Se alcanzó el máximo número de iteraciones.

Convergencia SOR

Succesive Over - Relaxation (SOR)

$$x_i^{(k)} = (1-\omega)x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1}^{i-1}\left(-a_{ij}x_j^{(k)}\right) - \sum_{j=i+1}^{n}\left(a_{ij}x_j^{(k-1)}\right) + b_i\right]$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = T_\omega \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}_\omega \tag{14}$$

Theorem (Kahan)

Si $a_{ii} \neq 0$, para cada i=1,2, ..., n, entonces $\rho(T_\omega) \geq |\omega - 1|$. Esto garantiza que el método SOR puede converger solo cuando $\omega \in (0,2)$

Theorem (Ostrowski-Reich)

Si A es una matriz definida positiva y $\omega \in (0,2)$, entonces el método SOR converge dado cualquier vector aproximado inicial $\mathbf{x}^{(0)}$

Theorem

Si A es definida positiva y tridiagonal, la elección óptima de ω es:

$$\omega = \frac{2}{1+\sqrt{1-[\rho(T_j)]^2}}$$

Convergencia SOR

Encuentre las iteraciones del método SOR para el sisguiente sistema lineal matricial utilizando $x^{(0)} = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -\pi \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
              ω = 0.5
Ite .  0:  [0.  0.  0.  0.  0.]
Ite .  1:  [ 0.12   −0.37 −0.047 −0.38 −0.04]
Ite .  2:  [ 0.14  −0.56 −0.14 −0.56 −0.09]
Ite .  3:  [ 0.12  −0.67 −0.22 −0.63 −0.12]
                    .
                    .
                    .
Ite .  12:  [ 0.034  −0.86 −0.37−0.65 −0.16]
Ite .  13:  [ 0.033  −0.87 −0.37 −0.65−0.16]
Ite .  14:  [ 0.033  −0.87 −0.38 −0.64−0.16]
Convergencia alcanzada después de 14
        iteraciones .
```

```
              ω = 1.5
Ite .  0:  [0.  0.  0.  0.  0.]
Ite .  1:  [ 0.375  −1.037 −0.38 −1.03 −0.38]
Ite .  2:  [−0.201  −0.880 −0.52 −0.32 0.07]
Ite .  3:  [ 0.145  −0.879 −0.18 −0.97 −0.40]
                    .
                    .
                    .
Ite .  769:  [0.03  −0.872 −0.38 −0.65 −0.16]
Ite .  770:  [0.03  −0.872 −0.38 −0.64 −0.16]
Ite .  771:  [0.03  −0.872 −0.38 −0.65 −0.16]
Convergencia alcanzada después de 771
        iteraciones .
```

Ejemplo

Encuentre las iteraciones del método SOR para el siguiente sistema lineal matricial utilizando $x^{(0)} = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \; b = \begin{bmatrix} 1 \\ -\pi \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dado que por la iteración del método de Jacobi $A = D - L - U$, la matriz de iteración de Jacobi se define como:

$$T_J = D^{-1}(L + U)$$

Luego T_J es:

$$T_J = \begin{bmatrix} 0 & -0.25 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

Donde $\rho(T_J) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, luego por el teorema anterior donde $\omega = \dfrac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(T_j)]^2}}$

, tenemos que $\omega = \dfrac{8}{4 + \sqrt{13}} \approx 1.0518$

Encuentre las iteraciones del método SOR para el siguiente sistema lineal matricial utilizando
$x^{(0)} = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 1 \\ -\pi \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Compruebe su respuesta con el método de Jacobi y el Gauss-Siedel. ¿Cuántas iteraciones hay para cada método? ¿Cuál es el error relativo y absoluto con respecto a la solución original?