Métodos numéricos
Sesión 1

Universidad Externado de Colombia
Programa Ciencia de Datos

202410

Tabla de contenidos

Definición (Matriz)

Con $m, n \in \mathbb{N}$, una matriz A con valores reales es una $m \cdot n -$ tupla de elementos a_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, la cual está ordenado de acuerdo a un arreglo rectangular con m filas y n columnas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Dimensión: *name.shape*
- Cantidad de elementos: *name.size*

Matrices elementales

1. np.ones([m,n])
2. np.zeros([m,n])
3. np.identity(n)
4. np.transpose(M)

code

```
import numpy as np

 np.array([[4, 1, -1],
           [2, 1, -2],
           [2, 3, 2]])

A.shape
Out[] : (3, 3)

A.size
Out[] : 9

A[0,0]
Out[] : 4
```

Operaciones

Operaciones (Suma)

La suma de dos matrices $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se define como la suma de elementos.

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

code

```
A = np.array([[0, -3, 2],
              [1, 1, -1],
              [1, 1, -1]])

B = np.array([[1, 1, 5],
              [0, 3, 0],
              [1, 4, 1]])

A + B

Out[] : array([[ 1, -2,  7],
               [ 1,  4, -1],
               [ 2,  5,  0]])
```

Operaciones (Producto por escalar)

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces $\lambda \cdot A = \mathbb{K}$,

$$K_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$$

Propiedades

1. Asociativa
   - $(\lambda\psi)C = \lambda(\psi C)$
   - $\lambda(AB) = (\lambda B)C$
2. Distributiva
   - $(\lambda + \psi)C = \lambda C + \psi C$
   - $\lambda(A + B) = \lambda B + \lambda C$

code

```
A =  np.array([[4, 1, -1],
               [2, 1, -2],
               [2, 3, 2]])


In []: 2*A

Out[] : array([[ 8,  2, -2],
               [ 4,  2, -4],
               [ 4,  6,  4]])

In []: np.pi*A

Out[] : array([[12.6,  3.1, -3.1],
               [ 6.3,  3.1, -6.3],
               [ 6.3,  9.4,  6.3]])

np.round(np.pi*A, 1)
```

Operaciones (Producto entre matrices)

Para matrices $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$, los elementos c_{ij} del producto $C = AB \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se computan como:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot blj$$

Propiedades

1. Asociativa
   - $(AB)C = A(BC)$
2. Distributiva
   - $(A + B)C = AC + BC$

code

```
In []:    A = np.array([[4, 1, -1],
                        [2, 1, -2]])

          B = np.array([[4, 1],
                        [2, 1],
                        [1, 0]])
          C=A@B
          C
out []:

          array([[17,  5],
                 [ 8,  3]])
```

Matrices
Operaciones entre matrices
Sistemas de ecuaciones lineales
Determinantes
Eigenvalores y eigenvectores
Conjuntos convexos
Nociones de análisis en $\mathbb{R}^n$

Inversa de matrices

Definición (Inversa)

Considere una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Sea una matriz $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que tiene la propiedad:

$$AB = I_n = BA$$

B es llamada la inversa de A y está denotada por A^{-1}
No todas las matrices tienen inversa. Si A no tiene inversa se llama singular.

code

```
In []:    A =  np.array([[4, 1, -1],
                         [2, 1, -2],
                         [2, 3, 2]])

In []: np.linalg.inv(A)

Out[]  : array([[ 0.4  , -0.25, -0.05],
                [-0.4  ,  0.5 ,  0.3 ],
                [ 0.2  , -0.5 ,  0.1 ]])


In []: np.round(A @ A_, 3)
Out[]  :

         array([[ 1.,  0.,  0.],
                [ 0.,  1.,  0.],
                [-0.,  0.,  1.]])
```

Sistemas de ecuaciones lineales

Definición (Sistemas de ecuaciones lineales)

La forma general de un sistema de ecuaciones lineal es:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde $x_1, \ldots, x_n$ son las incógnitas del sistema. Cada n-tupla $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisfaga el sistema es una solución.

code

```
In []: from sympy import *
       init_printing()
In []: A = Matrix([[1,-3, 9],
                   [-2,5, 0]])
       A
In []: A.rref()
```

$$\text{Out[]} : \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -45 \\ 0 & 1 & -18 \end{bmatrix}, (0, 1) \right)$$

Operaciones (sympy)

1. Suma: $A + B$
2. Resta: $A - B$
3. Transpuesta: $A.T$
4. Inversa: $A**(-1)$
5. Producto: $A*B$

Definición (Determinante)

Un determinante es un objeto matemático para el análisis y solución de sistemas de ecuaciones lineales. Solo se definen para matrices cuadradas $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- $|A|$
- $\det(A)$

Tenga en cuenta que el determinante es una función que asigna a A un número real.

Theorem

Para cualquier matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se cumple que A es invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$

Cálculo

- Para $n = 1$, $\det(A) = \det(a_{11}) = a_{11}$
- Para $n = 2$, $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

  $$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$
- Para $n = 3$, $\det(A) \rightarrow$ Sarrus' rule
- Sea T una matriz triangular, $\det(T) = \prod_{i=1}^{n} T_{ii}$

code

```
  # Option 1
In []: A = Matrix([[1,-3, 9],
                  [-2,5, 0],
                  [1,4,9]])
In []: A.det()

# Option 2

In []: np.linalg.det(A)

Out[]: -126
```

Definición (Traza)

La traza de una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ está definida como:

$$tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

La traza es la suma de los elementos de la diagonal de A

np.trace(matriz)

Propiedades

- $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(I_n) = n$
- $tr(AB) = tr(BA)$

Definición (Polinomio característico)

Para $\lambda \in \mathbb{R}$ y sea una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se define el polinomio característico como:

$$\rho_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$$

$$\rho_A(\lambda) := c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \cdots + (-1)^n\lambda^n$$

$c_0 = \det(A)$
$c_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot tr(A)$

Definición (eigenvalor)

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz cuadrada. Entonces $\lambda in\mathbb{R}$ es un eigenvalor de A y $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ es el correspondiente eigenvector de A si:

$$Ax = \lambda x$$

Ecuación eigenvalor

Theorem

$\lambda \in \mathbb{R}$ es un eigenvalor de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si y solo si λ es una raíz del polinomio característico $\rho_A(\lambda)$ de A

Eigenvalues

Sea:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Paso 1: Encontrar el polinomio característico

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Donde λ es el eigenvalor e I es la matriz identidad.
Sustituimos A y I en la ecuación:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 8-\lambda & 4 \\ 2 & 6-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Paso 2: Se calcula el determinante, obteniendo:

$$(8-\lambda)(6-\lambda) - (4 \cdot 2) = 0$$

$\lambda^2 - 14\lambda + 40 = 0$
Paso 3: Se utiliza el fórmula cuadrática. Donde $a = 1$, $b = -14$, y $c = 40$. Se sustituye y se obtienen los eigenvalores. Por lo tanto, los eigenvalores son $\lambda_1 = 10$ y $\lambda_2 = 4$.

code

```
A = np.array ([[8, 4], [2, 6]])
x, v = np.linalg.eig (A)
```

Definición (Matriz definida positiva)

Una matriz $A \in \mathbb{S}^{n \times n}$, real, es definida positiva si:

$$x^T Ax > 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^{n \times 1}, x \neq 0$$

Condiciones suficientes y necesarias)

Dada una matriz simétrica, las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. A es definida positiva
2. Todos los eigenvalores de A son positivos
3. Todos los subdeterminantes estrictamente principales son positivos
4. Existe una matriz W invertible tal que $A = W^T W$

Conjuntos convexos

Definición

Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Se dice que X es un conjunto convexo, si para cualquier $x_1, x_2 \in X$ y $\lambda \in [0, 1]$

$$\lambda \cdot x_1 + [1 - \lambda] \cdot x_2 \in X$$

Conjuntos convexos

Definición

Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Se dice que X es un conjunto convexo, si para cualquier $x_1, x_2 \in X$ y $\lambda \in [0, 1]$

$$\lambda \cdot x_1 + [1 - \lambda] \cdot x_2 \in X$$

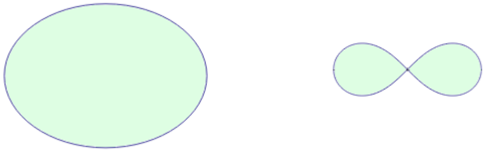

Figure: Conjunto convexo - conjunto no convexo

Teorema 1

Sean C_1 y C_2 dos conjuntos convexos, entonces

1. $\bigcap_{i \in I} C_i$
2. $C_1 + C_2 = \{x + y : x \in C_1, y \in C_2\}$
3. $\alpha \cdot C_1 = \{\alpha \cdot x : x \in C_1\}$ donde $\alpha \in R$

Son conjuntos convexos

Definición hiperplano

Sean $k \in \mathbb{R}^n, k \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}$, se define al **hiperplano** como:

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : k^T \cdot x = \alpha\}$$

Hiperplano

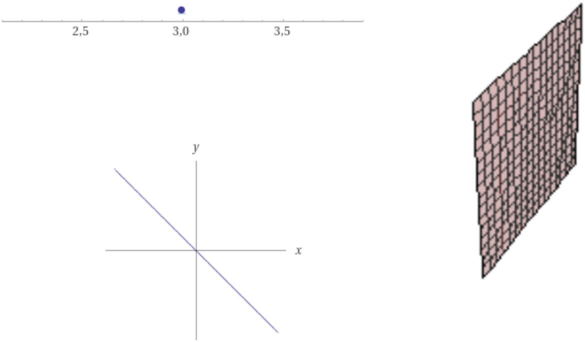

Figure: Punto - Recta - Plano

Semi-espacio

Sean $k \in \mathbb{R}^n, k \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}$, el hiperplano genera cuatro semi-espacios:

1. $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : k^T \cdot x \geq \alpha\}$
2. $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : k^T \cdot x \leq \alpha\}$
3. $\mathring{H}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : k^T \cdot x > \alpha\}$
4. $\mathring{H}^- = \{x \in \mathbb{R}^n : k^T \cdot x < \alpha\}$

Semi-espacio

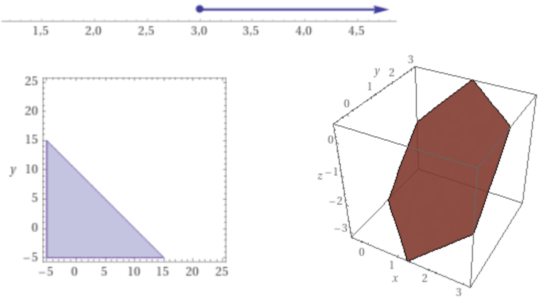

Figure: Semiespacios

Teorema 2

Todo hiperplano y semi-espacio es un conjunto convexo

Ejercicios

¿De los siguientes conjuntos cuáles son convexos?

1. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 4 \geq 0\}$
2. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 4 = 0\}$
3. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 4 \leq 3\}$
4. $\{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 + 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 4\}$
5. $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \cdot x_2 \geq 10\}$
6. $\{x \in \mathbb{R}^2 : x + 4y \leq 21; \quad 3x + y \geq 7; \quad 3x + 1.5y \leq 21; \quad -2x + 6y \geq 0\}$

Norma

Definición

Una norma es una función:

$$\mu : V \to \mathbb{R}$$

que cumple las siguientes propiedades

- $\mu(x) \geq 0,$ Para todo $x \in V$
- $\mu(x) = 0,$ Sii $x = 0$
- $\mu(\alpha \cdot x) = |\alpha| \cdot \mu(x),$ Para todo $x \in V, \alpha \in \mathbb{R}$
- $\mu(x + y) \leq \mu(x) + \mu(y),$ Para todo $x, y \in V$

$$||x||$$

Tipos de norma

- $||x||_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3| + \ldots$: Taxista
- $||x||_2 = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots)^{1/2}$: Euclídea
- $||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$: Hölder de orden p
- $||x||_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$: Máxima

Bolas abiertas - cerradas
$||x - \alpha||$: distancia entre x y α

Definición bola abierta

Sea $V = \mathbb{R}^n$, $k \in V, r \in \mathbb{R}, r > 0$. Una bola abierta con centro en k y radio r, para una norma cualquiera, es el conjunto de puntos $x \in V$ tales que:

$$B_{\text{norma}}(k, r) = \{x \in V : ||x - k|| < r\}$$

Definición bola cerrada

Sea $V = \mathbb{R}^n$, $k \in V, r \in \mathbb{R}, r > 0$. Una bola cerrada con centro en k y radio r, para una norma cualquiera, es el conjunto de puntos $x \in V$ tales que:

$$\bar{B}_{\text{norma}}(k, r) = \{x \in V : ||x - k|| \leq r\}$$

Ejemplo

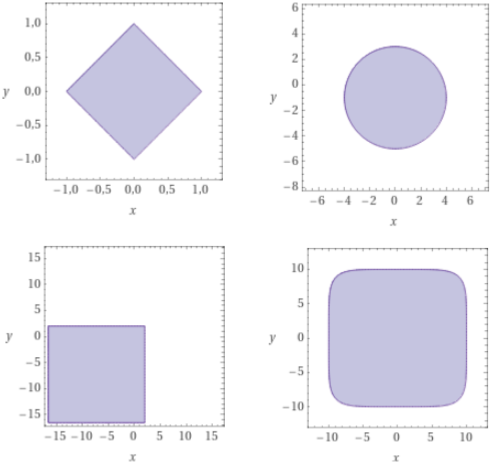

Figure: Bolas

Conjuntos abiertos - cerrados

Punto interior

El punto $\bar{x}$ es un punto interior de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si existe:

$$B(\bar{x}, r) \subseteq A$$

Interior

Sea un $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se define el interior como:

$$\mathring{A} = \{x : x \text{ es punto interior de } A\}$$

Conjunto abierto

Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ se llama abierto si es igual a su interior

Conjunto cerrado

Sea un $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que es cerrado si $\complement A$ es un conjunto abierto