NÚMEROS INTEIROS, RACIONAIS E FRAÇÕES

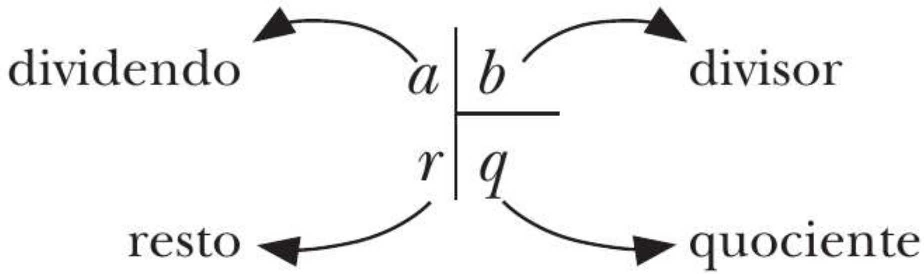
SLIDES 01

ALGORITMO DA DIVISÃO EUCLIDIANA

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$. Na relação

$$a = bq + r, \qquad\qquad 0 \leq r \leq |b|$$

q e r existem e são únicos.



EXEMPLOS

E.1) $\begin{array}{r|l} 9 & 5 \\ \hline 4 & 1 \end{array}$, porque $\underbrace{9}_{a} = \underbrace{5}_{b} . \underbrace{1}_{q} + \underbrace{4}_{r}$ e $0 \leq 4 < \underbrace{| 5 |}_{5}$.

E.2) $\begin{array}{r|l} 17 & -2 \\ \hline 1 & -8 \end{array}$, porque $\underbrace{17}_{a} = \underbrace{(-2)}_{b} . \underbrace{(-8)}_{q} + \underbrace{1}_{r}$ e $0 \leq 1 < \underbrace{| -2 |}_{2}$.

E.3) $\begin{array}{r|l} -23 & 6 \\ \hline 1 & -4 \end{array}$, porque $\underbrace{-23}_{a} = \underbrace{6}_{b} . \underbrace{(-4)}_{q} + \underbrace{1}_{r}$ e $0 \leq 1 < \underbrace{| 6 |}_{6}$.

E.4) $\begin{array}{r|l} -105 & -41 \\ \hline 18 & 3 \end{array}$, porque $\underbrace{-105}_{a} = \underbrace{(-41)}_{b} . \underbrace{3}_{q} + \underbrace{18}_{r}$ e $0 \leq 18 < \underbrace{| -41 |}_{41}$.

E.5) $\begin{array}{r|l} 62 & 63 \\ \hline 62 & 0 \end{array}$, porque $\underbrace{62}_{a} = \underbrace{93}_{b} . \underbrace{0}_{q} + \underbrace{62}_{r}$ e $0 \leq 62 < \underbrace{| 93 |}_{93}$.

PARIDADE DE UM NÚMERO INTEIRO

Um número inteiro é **par** se o resto de sua divisão por 2 é zero. Caso contrário, é **ímpar**.

- Se n é par: $\begin{array}{r|l} n & 2 \\ \hline 0 & q \end{array} \Rightarrow n = 2.q \ (q \in \mathbb{Z})$.
- Se n é ímpar: $\begin{array}{r|l} n & 2 \\ \hline 1 & q \end{array} \Rightarrow n = 2.q + 1 \ (q \in \mathbb{Z})$.

EXEMPLO: JAVASCRIPT

PAR E IMPAR > script.js > ...

```javascript
let parOuImpar = (numero) => {
    if (numero % 2 == 0) {
        console.log(numero + ' é um número par!');
    } else {
        console.log(numero + ' é um número ímpar!')
    }
}

parOuImpar(25);
parOuImpar(30);

```

Elementos Console

top Filtro

Níveis personalizados Nenhum

```
25 é um número ímpar!
30 é um número par!
>
```

FRAÇÕES E NÚMEROS RACIONAIS

Um número é racional se puder ser expresso como a razão de dois números inteiros, um **numerador** dividido por um **denominador** (*não nulo*)

Exemplos:

$\frac{2}{3}$: numerador = 2; e denominador = 3;

$\frac{5}{7}$: numerador = 5; e denominador = 7.

Todos os números **racionais** podem ser expressos como frações e incluem os **inteiros**.

DENOMINADOR EM POTÊNCIAS DE 10

Exemplos:

$\frac{7}{10}$ lê-se: sete décimos;

$\frac{49}{100}$ lê-se: quarenta e nove centésimos;

$\frac{117}{1.000}$ lê-se: cento e dezessete milésimos;

$\frac{4.531}{10.000}$ lê-se: quatro mil quinhentos e trinta e um décimos de milésimos.

EXEMPLO: EM NOTAÇÃO DECIMAL

Por exemplo, o número 245,4165 pode ser expresso como

$$2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 4 \cdot \frac{1}{10^1} + 1 \cdot \frac{1}{10^2} + 6 \cdot \frac{1}{10^3} + 5 \cdot \frac{1}{10^4}$$

Ou ainda,

$$2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4}$$

TIPOS DE FRAÇÕES

- **Fração própria**. O numerador é **menor** que o denominador.

$$\textbf{Exemplos: } \frac{1}{2} \;;\; \frac{3}{7} \;;\; \frac{4}{19} \;;\; \frac{5}{27}$$

- **Fração imprópria**. O numerador é mai**or ou igual** ao denominador.

$$\textbf{Exemplos: } \frac{25}{4} \;;\; \frac{35}{8} \;;\; \frac{9}{9} \;;\; \frac{100}{4}$$

- **Fração aparente**. O numerador é **múltiplo** do denominador. Caso particular da fração imprópria.

$$\textbf{Exemplos: } \frac{2}{1};\; \frac{8}{2};\; \frac{10}{5};\; \frac{18}{6};\; \frac{4}{4}$$

TIPOS DE FRAÇÕES

- Se o **numerador é zero**, e o denominador não, a **fração é igual a zero.**

$$\frac{0}{2} = 0; \quad \frac{0}{7} = 0; \quad \frac{0}{11} = 0; \quad \frac{0}{49} = 0; \quad \frac{0}{731} = 0 \text{ etc.}$$

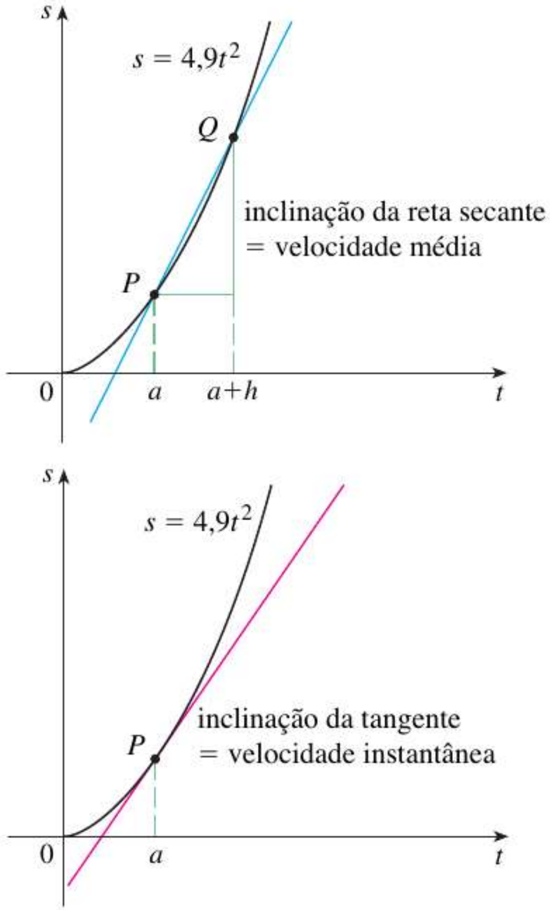
- Se o **denominador é igual a 1**, a fração é **igual ao numerador.**

$$\frac{3}{1} = 3; \quad \frac{17}{1} = 17; \quad \frac{93}{1} = 93; \quad \frac{478}{1} = 478; \quad \frac{57}{1} = 57; \text{ etc.}$$

- Se o **numerador e o denominador são iguais**, a fração é igual a 1.

ATENÇÃO. Se o denominador é zero, a fração não existe (divisão por zero não é definida)

O CÁLCULO E A FORMA INDETERMINADA 0/0



$0/0$ não é uma fração, mas é uma **forma indeterminada**, fundamental no estudo do **Cálculo Diferencial e Integral**. Está relacionada à <u>inclinação da reta tangente</u> em um ponto do gráfico de uma função, entre outras questões de interesse.

Na figura ao lado, você consegue perceber a ocorrência de $0/0$?

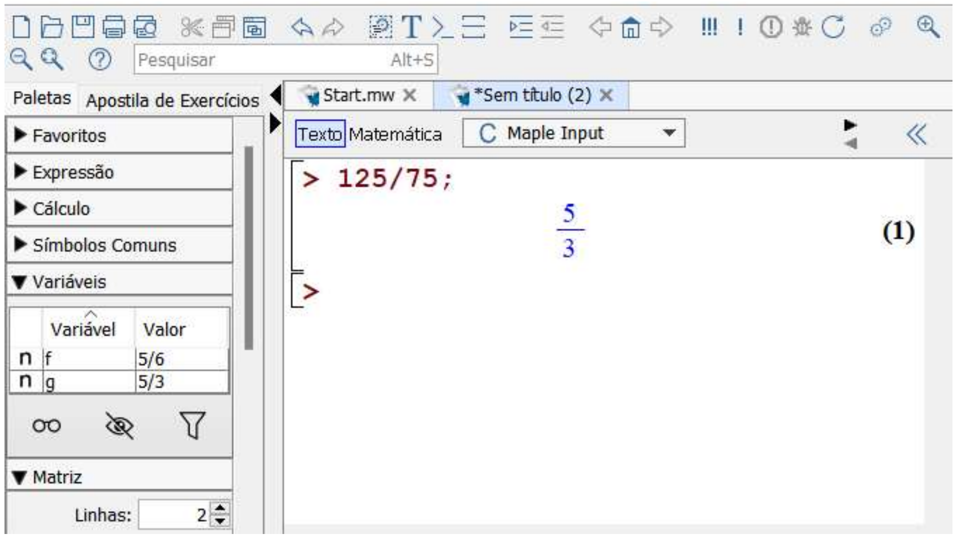
FRAÇÕES EQUIVALENTES

Se duas frações são **equivalentes** (têm o mesmo valor), existe um número racional tal que, ao ser multiplicado pelo numerador e pelo denominador de uma das frações, resulta na outra fração.

Exemplo: $\frac{5}{3}$ e $\frac{125}{75}$

São frações equivalentes, pois

$$\frac{5}{3} = \frac{5 \times 25}{3 \times 25} = \frac{125}{75}$$



Uma seção do Maple 2020

COMPARANDO FRAÇÕES

- Dadas duas frações, como saber qual delas representa o maior valor? Por exemplo, dadas estas duas frações,

$$\frac{6}{5} \text{ e } \frac{7}{9},$$

qual delas é a maior?

Podemos fazer o seguinte:

$$\begin{cases} f_1 = \frac{6}{5} = \frac{6\times 9}{5\times 9} = \frac{63}{45} \\ f_2 = \frac{7}{9} = \frac{7\times 5}{9\times 5} = \frac{35}{45} \end{cases}$$

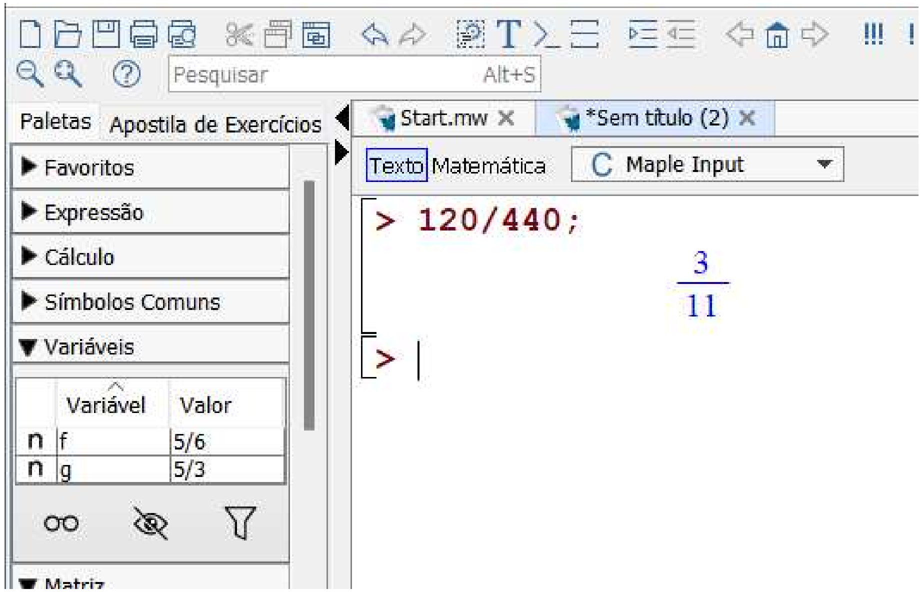
Portanto, $f_1 = \frac{6}{5}$ é a maior fração, porque $63 > 35$.

SIMPLIFICAÇÃO DE FRAÇÕES

- Simplificar significa obter a **forma irredutível** da fração. Veja o exemplo

$$\frac{120}{440} = \frac{120 \div 2}{440 \div 2} = \frac{60}{220}$$
$$\Rightarrow \frac{60}{220} = \frac{60 \div 2}{220 \div 2} = \frac{30}{110}$$
$$\Rightarrow \frac{30}{110} = \frac{30 \div 2}{110 \div 2} = \frac{15}{55}$$
$$\Rightarrow \frac{15}{55} = \frac{15 \div 5}{55 \div 5} = \frac{3}{11}$$

✓ Mais adiante, na disciplina, será discutida a decomposição em fatores primos (**Teorema Fundamental da Aritmética**)



Uma seção do Maple 2020

ADIÇÃO DE FRAÇÕES

- Frações com denominadores iguais

Exemplo:

$$\frac{32}{5}+\frac{53}{5}=? \qquad \frac{32+53}{5}=\frac{85^{\div 5}}{5_{\div 5}}=\frac{17}{1}=17$$

- Frações com denominadores diferentes

Exemplo: $\frac{11}{6}+\frac{10}{9}-\frac{7}{12}+\frac{5}{18}=?$

$mmc(6, 9, 12, 18) = 36$, portanto o denominador comum será 36.

$$\frac{6.11}{36}+\frac{4.10}{36}-\frac{3.7}{36}+\frac{2.5}{36} \Rightarrow \frac{66+40-21+10}{36} \Rightarrow \frac{116-21}{36}=\frac{95}{36}$$

- **MMC** (mínimo múltiplo comum) será visto mais adiante na disciplina

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE FRAÇÕES

- **Multiplicação**. Numeradores e denominadores de ambas frações são multiplicados.

$$\textbf{Exemplo: } \frac{21}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{7}{8} = ? \qquad \frac{21 \times 3 \times 7}{4 \times 5 \times 8} = \frac{441}{160}$$

- **Divisão**. A primeira fração se multiplica pelo **inverso** da segunda.

$$\textbf{Exemplo: } \frac{72}{5} \div \frac{4}{7} = ? \qquad \frac{72}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{72 \times 7}{5 \times 4} = \frac{504^{\div 4}}{20_{\div 4}} = \frac{126}{5}$$

TRANSFORMANDO REPRESENTAÇÕES

- Representando números racionais na **forma decimal** e na **forma fracionária**:

$$0,097 = \frac{97}{1.000}$$

$$5,691 = \frac{5.691}{1.000} = \frac{5.000 + 691}{1.000} = 5 + \frac{691}{1.000}$$

PROPRIEDADES DA REPRESENTAÇÃO DECIMAL

- **Multiplicação** por potência de 10: vírgula se **desloca para a direita** um número de casas igual ao expoente de 10:

$$12{,}7 \times 10 = 127$$
$$132{,}85 \times 100 = 13\ 852$$
$$1{,}345 \times 10\ 000 = 13\ 450$$

- **Divisão** por potência de 10: vírgula se **desloca para a esquerda** um número de casas igual ao expoente de 10:

$$5{,}196 \div 10 = 0{,}5196$$
$$6{,}4 \div 1\ 000 = 0{,}0064$$
$$67 \div 10\ 000 = 0{,}0067$$

DÍZIMAS PERIÓDICAS

- Dízima periódica simples.

$$0{,}454545\ldots \text{ ou } 0{,}\overline{45} \text{ ou } 0{,}(45) \text{ ou } 0{,}\dot{4}\dot{5}$$

$$0{,}316316316\ldots \text{ ou } 0{,}\overline{316} \text{ ou } 0{,}(316) \text{ ou } 0{,}\dot{3}\dot{1}\dot{6}$$

$$0{,}2222\ldots \text{ ou } 0{,}\overline{2} \text{ ou } 0{,}(2) \text{ ou } 0{,}\dot{2}$$

- Dízima periódica composta.

$$1{,}83333\ldots = 1{,}8\overline{3}$$
$$29{,}31727272\ldots = 29{,}31\overline{72}$$

GERATRIZ DE UMA DÍZIMA

Exemplos: $0,\overline{6} = \dfrac{6}{9}$; $\quad 0,\overline{21} = \dfrac{21}{99}$; $\quad 0,\overline{341} = \dfrac{341}{999}$

- Você consegue enxergar uma regra geral para isso?

- Outros exemplos:

$$\textbf{Exemplos: } 0,3\overline{7} = \frac{37-3}{90} = \frac{34^{\div 2}}{90_{\div 2}} = \frac{17}{45}$$

$$0,42\overline{7} = \frac{427-42}{900} = \frac{385^{\div 5}}{900_{\div 5}} = \frac{77}{180}$$

$$5,63\overline{27} = 5\,\frac{6327-63}{9900} = 5\,\frac{6264^{\div 36}}{9900_{\div 36}} = 5\,\frac{174}{275} = \frac{275\times 5+174}{275} = \frac{1549}{275}.$$

DESAFIO

- A dízima periódica

$$0{,}9999\ldots = 0,\overline{9}$$

é exatamente igual a 1. Isso faz sentido para você? Tente provar esse fato considerando que a dízima é, na realidade, uma série geométrica,

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \cdots$$

com uma razão igual a $1/10$.